算数・数学の理解のためのイメージの創造

MATH MADE VISUAL [1)]

溝口達也*

算数学習において，図が思考を促進したり，問題解決の有効な手段となったりすることが多くの場面で見られます。実際，1999年のTIMSSビデオテープ研究において（日本の調査は1995年），図1に見られるように第8学年の教室において，我が国の数学の授業（中2）は諸外国に比して圧倒的に図を用いる割合が高いことが示されました。[2)]

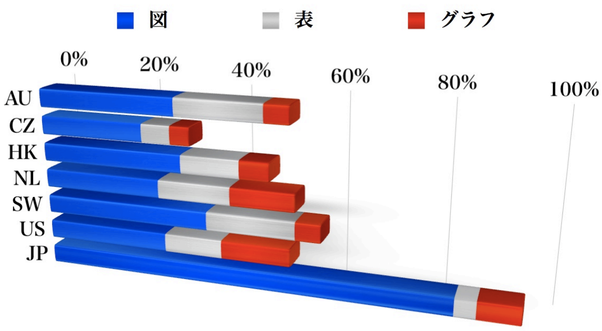

図1　第8学年【授業における図・表・グラフの頻度】

図が算数・数学の学習や理解に果たす役割は，多くの人が認めるところであろうと思います。それは，何よりも《具体的》だから，ということであるかも知れません。しかし一方で，図はそれを見る人，考える人によって，異なる見方，考え方を生み出すものでもあります。

アメリカ数学協会発刊の *Classroom Resource Materials* シリーズに，『*Proofs Without Words*』（第1巻1993年刊, 第2巻2001年刊）があり，秋山仁氏らによって『証明の展覧会』（東海大学出版会刊）として翻訳されています。厳密にいえば，語なしに証明が果たして成立するか，という主張も成り立ちます（実際，証明とは，数量や図形に関する命題の連鎖を表す言語によって記述されるものです）が，そのような証明の構成要素としての命題を構想する*imagine*上で，図の有する機能を最大限活用しようというのがその意図するところであろうと思われます。

今回ご紹介するのは，『*Proofs Without Words*』の著者であるロジャー・ニールセン氏が共著者として著すもので，前著よりもそうした図の機能性を顕在化するよう構成されているようです。

例えば，自然数の列の和を考えてみましょう。よく知られているように，図2のようにしてその和を求めることが可能です。自然数列の和は，その形状から「三角数」と呼ばれることがあります。いま，nまでの自然数の和をT_nで表すこととします。

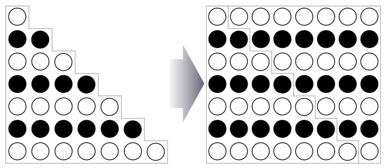

図2　自然数列の和

奇数列の和　$1+3+5+...+(2n-1)$　はどうでしょう。しばしば，図3のように図的表記がなされます。この配列を上の場合と同様にして図4のように変形・移動させることで，奇数列の和が平方数を表すことを見ることができます。

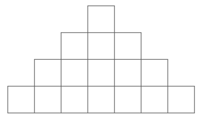

図3　奇数列の和a

ところで，図4を別の視点で見てみると，図4の左側の三角形状の図は，「●」と「○」の部分をそれぞれT_{n-1}とT_nと見ることができます。そうだとすれば，

$$T_{n-1}+T_n=n^2$$

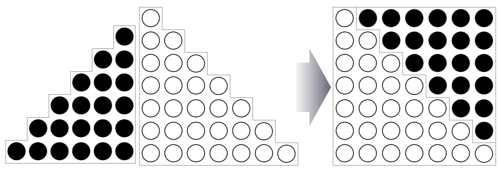

図4　奇数列の和b

という関係を見ることもできます。さらに，最初のピラミッド形状を図5のように配列して考えることもできます。この図を基

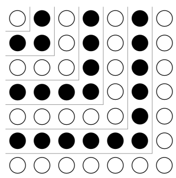

図5　奇数列の和c

* 鳥取大学准教授

にすると，偶数列の和は図6のように考えることができます。偶数列は，図6の左のように配列するこ

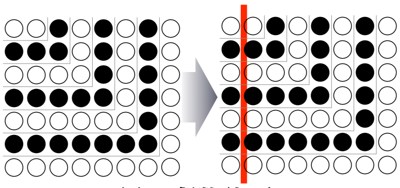

図6　偶数列の和

とができますが，この図の一番左側の列を除いたものは，奇数列の配列（図5）になっており，これを利用して和を求めることができます。

それでは，次の図7に示される「図の式」は，何を表しているとよむことができるでしょう。

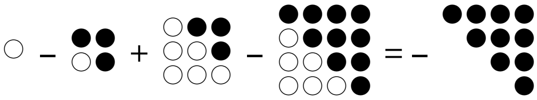

図7　図の式

図の通りに数で表記すれば，

$$1-4+9-16=-10$$

です。しかし，図をよむ，図で考える，ということは，そのような《特殊》にとどまることではなく，そこに《一般》を見ることであろうと思います。自然数列や，奇数列，偶数列の和は，図に示された特殊な場合について考察するだけでなく，どんなときでもそれが成り立つことを見ることが要請されるものです。まさに，図は《特殊の中に一般を見る》媒介としての役目を果たすものであろうと考えるのです。図7は，左辺の個々の項は平方数（あるいは奇数列の和）を表しており，右辺は三角数（あるいは自然数列の和）を表しています。符号の関係を併せて見るとき，次のような式を表していることがわかります。

$$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}T_n$$

ともすると，こうした図の役割は，中学校以上の文字式を学習する際の導入であったり，支援の一つとして考えられがちですが，小学校の算数学習においても，《図と式の対応》を考えるとき，極めて重要なものであるように思います。そして，そうした考え方は，小学校の低学年でも，もっともっと考えてよいように思います。

例えば，小学校第2学年における（2位数）－（2位数）の筆算の学習場面で，通常教科書では，十進位取り記数法を基にしながらも，実際には，「数え棒」や「ブロック」で各位の数の大きさを表現する傾向にあるようです。すなわち，十進法には基づくものの，位取り記数法は必ずしも正確に表象されているとはいえません。このとき，各位を同じ《シンボル》で表象するよう学習指導を図ることで，次のような思考を展開することが可能です。

「1から5のカードから2まいをえらんでひきざんをします。（図8）おなじこたえになるときのきまりをみつけよう。」

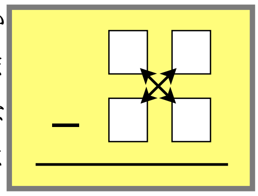

図8　筆算の問題

この問題に対して，図9に示されるように，子ども

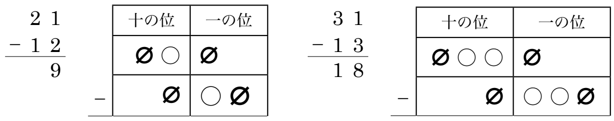

図9　モデルによる筆算の操作の例

たちは解決を図り，ここからカードの差の数だけ10－1=9があることを見出します。さらに，図10に示されるように，各々の筆算について別々の図を用いるのではなく，一つの図を通して，カードの差が等しいときにはいつでも同じ関係が成り立つきまりを発見するのです。3)

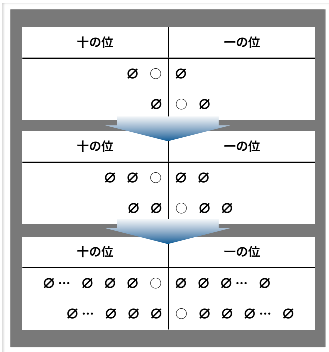

図10　モデルによる筆算の操作の一般化

こうした活動は，どの教材，どの単元でなければできない，とされるものではなく，むしろどんな教材でも，どんな単元でも十分に取り組むことが可能な活動であるといってよいと思います。そのときに重要であるのは，ただこれまでと違った図の解釈を促すことではなく，あくまで，数学的知識及び概念の本性に基づく解釈であり，またそのようなモデル（イメージ）を開発することが求められるということではないでしょうか。

註

1) Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2006). *MATH MADE VISUAL: Creating Images for Understanding Mathematics*. The Mathematical Association of America.

2) National Center for Education Statistics (2003). *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study*.

3) 溝口達也, 松本寿子 (*in press*). 小学校第2学年の図的代数における一般化を志向した授業の設計：大学と附属小学校の連携による協同的授業設計とその実践，鳥取大学地域学部紀要 地域学論集, 5(2).