創造性の基礎を培う授業構成とその展開

溝　口　達　也
鳥 取 大 学
（第39回 中国・四国算数・数学教育研究（鳥取）大会　研究部長）

1.　はじめに

第39回中国・四国算数・数学教育研究（鳥取）大会において，われわれは，**「創造性の基礎を培う授業構成とその展開」**を大会主題として標榜した。この主題の趣旨は，次の通りである：『今後10年間の（鳥取県の）算数・数学教育の営みを焦点化するものとして「創造性の基礎を培う」を考えたい。しかし，単にそのような子どもの育成を目指す，というのではなく，そのために教師は何をするべきかを考えるとき，教師としての第一義的営みとして，授業をいかに設計し，かつこれを評価することであると考え，このことを「授業構成とその展開」と述べた。教育という営みにおいては，確かに子どもが主役であるものの，教育研究の主体は教師であるという認識を再確認する意味を含めて，本主題を設定した。』

本稿の目的は，この大会主題を解題し，算数・数学教育という営みに対して，特に授業の設計，実践，分析についての枠組みの試案を提案することである。

2.　創造性の基礎

2.1　「創造」と「創造的」

創造性という語は，様々な分野，文脈で用いられる。われわれは，いまこの語を教育，しかも算数・数学教育という営みにおいて考究の対象とするのであるが，一般に創造性が語られるとき，それは，次の3つの様相として述べられることが多い。すなわち，「独創性」「流暢性」「柔軟性」である。「独創性」とは，文字通り，これまでに誰も考えていないような，その個人独自のアイデアの創出によるものを意味する。「流暢性」は，当該のことがらに対して，より多くのものを創出する様相を表す。また「柔軟性」は，当初当該のことがらとは無縁であると思われたようなものに対して，これを結びつけることで新しい何かを生み出すことである。これらの3様相は，なるほど多くの先行研究において議論されてきているように，われわれの考える「創造性」を明瞭に説明し，記述しているように思われる。しかしながら，教育の営みに携わるわれわれは，子どもがこれこれの「創造性」を示すことができたといくら分析できたとしても，それでは十分ではなく，むしろいかにして子どもに「創造性」を実現し得るか，が課題として残されることになる。

それでは，われわれは，上に示された3様相としての「創造性」を果たして子どもにいかに実現するべきであるか。このとき，「柔軟性」については，後述するように教授・学習上の問題として定立し得ることは可能であろう。一方，「流暢性」については，そのことの価値は認め得たとしても，それではいかにしてそのことが具体的に学習指導の対象となり得るかといえば，「他の考え方はないだろうか」の類いの支援に象徴されるように，厳密な意味においては個々の子ども自身が実現することを待つ以上に，現在のわれわれが有する手だてはない。そのことは，もう一つの様相である「独創性」にも関わることとして考えられ，実際の学習指導においては，われわれ教師は，いわゆる「別解」を子どもが

想起するために，具体的な視点の変更やそこで用いられる新たな（数学的）道具の示唆を行うのが普通である。もちろん，ここでこのことを否定する意図はなく，「独創性」という様相から見たとき，それは既に子どもによって実現されたものとはなっていないことを示したいのである。この点において示されるように，子どもの算数・数学学習において期待される「創造性」は，いわば「開かれた創造性」といった語義の純粋な意味において子どもに依存するものというよりは，むしろ教育的に，従って教師によって「期待される創造性」である。換言すれば，「創造性」に対して，われわれはこれを《目的》概念（目的としての「創造」）として捉えるのではなく，《方法》概念（方法としての「創造的」）として教育の営みにおいてその実現を図ることを意図することが要請される。目的としての「創造」は，既存の知識・概念等の延長としては，いかにしても可能ではなく，これらとは異なるものを新しく構成することによって初めて可能となる。そのようなことを学習の主体である子どもたちに求めることは，果たして適当であろうか。そうではなく，われわれは，当該の教育目標を実現するにあたり，あたかも子どもたち自身が，数学的知識・概念等を発見し，構成し，導き出したものであるかのような場の構成を図ることを通して，子どもたちが《真理に対する責任の担い手》として成長していくことを期待するのである。

2.2　創造的実践力

従って，われわれは上記の意味において，純粋な語義としての「創造性」を教育の対象とするのではなく，まさにこの点において「創造性の基礎」を標榜するのであり，そして，これを実現する上での期待する子ども像として以下のように規定される《創造的実践力》を掲げる。

- ❖ 困難に直面しても，果敢に立ち向かい克服していける子ども
- ❖ 学んだ数学的な見方・考え方（知識・技能等）を，学んだ以上に使いこなせる（実践できる）子ども
- ❖ 学んだことを生かして，さらに新しいことを生み出せる子ども

これは，次節に示される算数・数学学習に対する基本的な考え方から導き出されるものでもある。

2.3　算数・数学学習の問題構成 *problématique*

われわれは，日々学習指導を通して子どもに望ましい人間性を形成してほしいと期待する。そのためにわれわれは，子どもが算数・数学学習を通して，子どもの思考がそれまでよりも高次のものへと発展することを期待する。しかし，子どもは「学習」しようとして学習するわけではない。ある活動を経たとき，結果としてそれが，教師の視点から見れば「学習」であると映るのである。このとき子どもが行うことは，ある場面に直面して何らかの問題を意識し，それを解決しようとすることである。そうした問題は，しばしば子どもの直面する困難として生じる。子どもが困難に直面し努力する必要があるような場合「学習」が成立するのである。 従って，子どもが問題を解決する際，ほとんど努力を要しないような場合，われわれは「学習」の程度としては，それほど高いものとしては認めない。無際限な困難を想定する必要はないが，問題を解決する上で，子どもにとって相当の努力を要するような場合，高い程度の「学習」と認めることになる。それゆえ，子どもがいかなる困難に直面すべきであり（***epistemological***），また実際に直面し（***psychological***），そしていかにそのような困難を克服すべきか（***learning***），さらにそれをいかに支援するか（***teaching***），が基本

的な問題構成（*problèmatique*）として提起される。

3. 算数・数学学習と問題解決

3.1 数学的な見方・考え方と問題解決

われわれは，これまで数回の学習指導要領の改訂を経てきた。そこにおいて，算数科ならびに数学科の教科としての目標の変遷を見た。そのそれぞれに，固有の特徴があり，常にわれわれの教育実践を方向づけてきたことは否定されるものではない。しかしながら，そこに一貫して脈々と流れる算数・数学教育の目的として，われわれは《数学的な見方・考え方の育成》を見ることができる。

数学的な見方・考え方は，文字通り「見方・考え方」であり，それ自体われわれにとって観察不可能である。このとき，前節の指摘を受ければ，まさに数学的な見方・考え方が生きて働く場として，われわれは数学的問題解決をおくのである。すなわち，問題解決における活動を通して，子どもの数学的な見方・考え方を顕在化させ，これをもって観察可能な対象とすることを意図するのである。このことは，評価の問題とも不可分な関係にあり，われわれは目標として数学的な見方・考え方を掲げる以上，これを評価する必要がある。上述の通り，観察不可能な対象を評価するにあたり，観察可能な問題解決における子どもの活動を通してこれを評価することを考えたいのである。従って，次に問題とされるのは，問題解決における子どもの活動であり，われわれは，以下に述べるようにこれを「算数・数学的活動」として位置づけたいと考えるのである。

3.2 算数・数学的活動と問題解決

目標に対する（方向づけられた）評価の対象としての活動は，従って，教師の目から見たときにそこに数学的価値の備わったものとして認められる必要がある。単に，何か操作をしていたり，思いを巡らしていたりすればよいとするものではなく，「算数・数学的活動」はこの意味で理論負荷的な対象である。そして，そのことは教師側に終始していてよいとされるものではなく，次には子ども自身がそのことを自覚的に行うことを目指したい。すなわちこうした考えの基に，「算数・数学的活動」は，子どもが算数・数学の問題解決において，合目的的に行う活動であり，そこには当該の数学的価値が負荷されていると見なされるのである。それゆえ，「算数・数学的活動」は，子どもがそのようにするであろうと《予想される》対象ではなく，まさに《期待される》それとして位置づけられなければならないのである。

3.3 算数・数学的活動と創造的実践力

実際の，子どもの算数・数学学習においては，個々の教材に固有なものとして「算数・数学的活動」は特定されるべきものである。このとき，そのような「算数・数学的活動」は，一意に認められるものとして特定されるべきではない。すなわち，われわれは，子どもの学習においてこれを期待するならば，そこには一連の系列としての多様な様相をおく必要がある。換言すれば，子どもが困難としての問題場面に直面したとき，必ずしも一足飛びに，あるいは一様な方向性をもって解決へといたるとは限らない。そのために，われわれは，いかなる数学的価値を有する活動を子どもがいかに経験することによって，真の問題の解決へといたり，かつこれを子どもが評価し得るかを教授上の問題として，同定する必要がある。そのために，実際の授業設計において，これらの活動を特定する視点を設けておくことは，有効であろうと思われる。このとき，先述の創造的実践力として示された子ども像の様相は，一つの視点の枠組みを提供することになろう。

例えば，次のような事例を考えてみよう。

小学校第6学年の単元『平均』における「平均の利用」での場面で，以下のような問題が提示されたときのことである。A，B2つのグループが表のように空き缶を集めたときのグループ全体の1人当たりの平均を求める。このときの期待される算数的活動は，

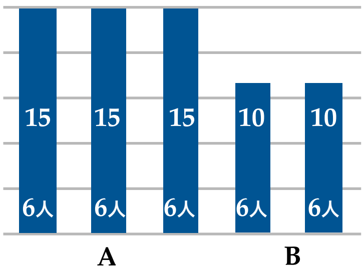
	人数	1人平均の個数
A	18人	15個
B	12人	10個

以下の通りである。

活動A：はじめ子どもはどのように考えてよいか見通しが立っていない。そこで，教師は，A，B2つのグループの平均を算出した基のデータ群を表にしたものを配布する。このとき，その表は意図的に1列に6個のデータが示されるようにしている。子どもは，既習のことがらを用いて，2つのグループを1つの全体と見なして，（空き缶の総数）÷（総人数）により求める平均を算出する。これは，《困難に直面しても，果敢に立ち向かい克服していける》様相と見ることができる。実際，30人分の各データの総和を求めようとすると，電卓を用いたとしても結構しんどいものである。しかし，それでもこの方法は，平均というものを最も原則的に求めるものであるとも言える。子どもが，このことを既習であるのだから，何としてでもやってみせるとするのであれば，それは実に素晴らしい活動として称賛されて然るべきである。

活動B：しかし一方で，やはり上記の方法ではあまりにも手間暇がかかってしまう，あるいはもっと手際よくすることはできないだろうかと考えることも期待したいことである。手続きの数が増えれば増えるほど，そこに誤り（計算ミス）が生じやすくなる可能性もまた増える。ここで，子どもが，A，Bそれぞれのグループの総和を最初に示された表から求めることができることを想起できれば，活動Aはより洗練されたものとなる。これは，《学んだ数学的な見方・考え方（知識・技能等）を，学んだ以上に使いこなせる（実践できる）》様相と見ることができる。例えば，元のデータをグラフで表せば，おそらくでこぼことした様子を目にすることになるだろう。しかし，最初に示された表は，このグラフが2つのグループごとにそれぞれ「ならされた」ものであることを意味しており，そのように子どもが見れることは，まさに平均の意味をよりよく理解している表れである。

活動C：さらに，活動Bを基にすれば，次のように見ることも可能であろう。表に示される人数を見ると，どちらも6の倍数になっている。この点に着目することによって，「ならす」という平均の本性を基にして活動Bよりもさらに手際よく当該の平均を求めることができる。そして



それは，データに対する新しい見方を作り出していることにも注目したい。まさにその意味で，《学んだことを生かして，さらに新しいことを生み出せる》様相と見ることができるのである。実は，活動Aにおいて必要な子どもに配布された表は，こうした活動Cをその先に期待するものとして用意されたわけである。

4.　算数・数学科の授業構成

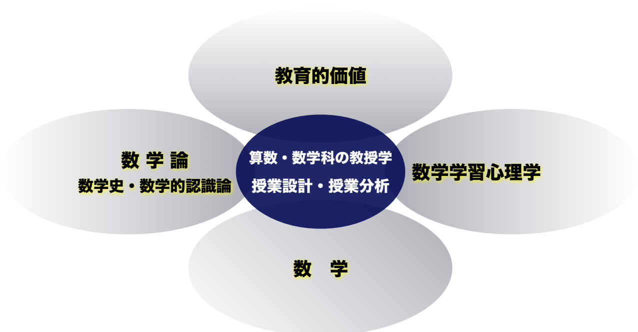
4.1　教材研究

どの教科においても等しく言えることであ

るが，授業構成を考える上で，最も重要な仕事は教材研究である。従来からも，このことは強調されてきている。ここでわれわれが検討する課題としては，「創造性の基礎を培う」，換言すれば「創造的実践力を育成する」ことを目指した授業構成を標榜する上で，算数・数学学習の教材研究をいかに進めるかという点である。既に述べたように（*cf.* 2.3），算数・数学学習を，基本的に子どもが困難としての問題に直面しこれを解決することとして捉え，その学習指導が，子どもにいかなる困難に直面させるべきであり，かつ子どもは実際にどのように直面し，教師はその解決（困難の克服）に当たっていかに支援していくべきかと見るならば，われわれは少なくとも次のような2つの相に係わる教材研究が要請される。

数学的立場からの考察

第一は，数学的立場からの考察である。これは，教材として位置づけられる内容の学問知としての数学的背景を知ることを単に意味するものではない。もちろんそのことも重要なことであろう。しかし，それ以上に，そのような内容を教材として位置づけることの数学的価値（「よさ」），またそうした内容の系統性や困難性等の分析が中心的な作業となる。



例えば，小学校第4学年の『角』の学習指導において，次のような知見を得ることが数学的立場からの考察となり得る。

『角は，図形の構成要素として，最も基本的なもの（形）の一つである。同時に，図形を測定する場面においては，長さとともに最も基本的な測定の対象（量）となる。そもそも，何のために測定を行うのか。測定によって，数値化を図ることにより，得られた測定値を計算の対象（数）へと変換することがその目的である。そのような数値化は，いかにして行われるか。すでに児童は，これまでに長さやかさ，重さ等について，量の数値化を経験してきている。そこでは，それぞれの対象の基本単位を決め，その何倍か（比例倍）で数値化が行われてきている。しかし，その前提として，そうした量が果たして測定可能である，という認識を有することが必要とされる。角（度）はまさに，そのような認識を有する必要を確認されるべき対象であろう。このためにどのような活動が要請されるべきか。「量」として，すなわち測定の対象として角（度）を認識する以前に，児童は「比較」という活動を経る。このことは，単に心理（学）的に測定に向かわせるにあたって，認知的負担の軽いものから始めるという理由からだけではない。量は，初めから量として存在しているわけではなく，それを量，すなわち測定の対象として認識することが極めて重要な活動となってくる。長さや重さの場合，このことに特に留意することがなくとも，児童は，いわば直観的にそれを認識することが可能である。このこと自体は否定されるものではない。しかし，かさは，必ずしもそうではなく，角（度）についても同様である。このために，先ず，少なくとも大小の区別が可能であることから始めることで，何とかその大小を普遍化しようとする意図の実現を図って，測定による数値化が行われるのである。これが，比較による量としての対象化の基本的な考え方である。では，特に角（度）の場合，このことがいかになされるべきであろうか。量の指導には，測定の他に，「量感」の指導がある。すなわち，量の／に

ついての／に対する感覚の指導である。角（度）には，これまでの量と違い，回転という動的な操作を伴う量感が要請される。この操作を伴わなければ，実際角（度）の比較が，不可能だからである。比較によって大小が決定されるということは，このことの一意性が保証される必要があることを意味する。例えば，30°と150°，あるいは45°と315°を区別するためには，回転という動的操作が不可欠なのである。同時に，このことは，測定をする際にも基本的な前提となる。すなわち，これまでの量の測定においては，測定値は単調増加であるのに対して，角（度）は周期性を有する。このために，他の量との形式保存を意図するならば，これまでの（静的）量に対して動的量としての性格が要請されるのである。』

<u>問題解決の立場からの考察</u>

教材研究の第二の相は，問題解決の立場からの考察である。これは，第一の相，すなわち数学的立場からの考察によって分析された（教材として位置づけようとする）内容を子どもが学習するにあたって，具体的にどんな問題（とその系列）が用意され，実際の活動ではどんな（数学的）活動を経ることがそうした価値を経験し，困難を克服し得るか計画することである。

例えば，小学校第1学年における『繰り上がりのあるたし算（第1時）』について，次のような知見を得ることが問題解決の立場からの考察となり得る。

『繰り上がりのあるたし算は，第1学年の児童にとって，既習事項を基に新しい数学的知識を構成していく格好の教材であるといえる。教科書では，通常（問題場面の違いはあっても）数値として「8＋3」が選択されることが多いようである。しかし，この数値設定で「繰り上がりのあるたし算」の数学的価値の実現を期待する問題解決が可能であろうか，あるいはそこに潜在的に含まれる克服されるべき困難を，児童は経験することが可能であろうか。本学習場面において，最も重要な点は，和が10を超える場合，10の補数を基に繰り上がる操作を考え出すことである。この点が，児童の問題解決活動において期待される算数的活動として組織される必要がある。そこで，本時は，（具体的な問題場面については省略）8＋6が問われる場面を設定し，以下のような算数的活動の変容を期待したい。

活動A：数え足し

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○　● ● ● ● ● ●
1 2 3 4 5 6 7 8　9 10 11 12 13 14

「式に表すことのできる操作を考えてみよう」

活動B：10の補数

B1：○○○○○　○○○
●●●●●　●

☜両方を分解しなければいけない

B2：○○○○　○○○○●
●●●●●

☜10を作るのに，あといくつ必要かを考えた優れた方法だが比較的大きな数を足さなければならない

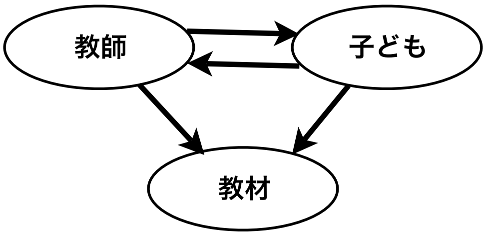
B3：○○○○○○○○●●
●●●●

☜10を作るのに，後いくつ必要かを考えたより優れた方法

活動C：Bの操作を式に表し，式を用いて，操作を説明できる。』

4.2　数学的問題解決の授業

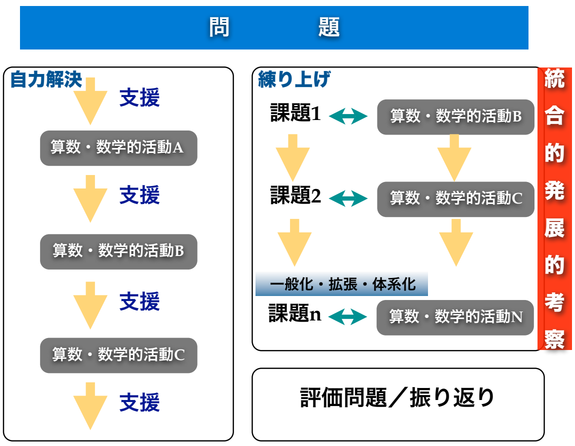
教材研究を経て，われわれはこれを授業という教授学習場面に臨む。それは，教師，子供，教材によって構成される教授学的三角形の相互作用による営みとして理解されるものであり，算数・数学学習においては，数学的問題解決の様相をとる。これは，2.3において



述べたように，子どもが学習するとは，直面する問題（困難）の解決（克服）を意味し，教師は，子どもの問題解決が成功裡に進行するべくその環境を整えることとなる。

一般に，算数・数学の授業としての数学的問題解決は，これまでの研究成果において，次のような基本的な流れを踏むことが認められてきている。われわれは，さらに先述

のように，ここに算数・数学的活動を位置づけることにより，数学的問題解決の授業のより一層の充実を図るものである。それは次のような枠組みによって示されるものである。



以下では，この基本的な枠組みに沿って議論を展開する。

4.2.1　問題の提示：「よい問題」の開発と見積もりの重視

上述の通り，教師は，教材研究によって，子どもがいかなる困難に直面するべきか，という点を明らかにする（数学的立場からの考察）。このことは，次に，子どもがそのような困難に実際にいかに直面するべきであり，どのような解決の方向性を有することを期待するか（問題解決の立場からの考察），ということの検討を要請する。問題の提示の場面においては，従って，単に所与の問題場面が子どもに提示されればよいのではなく，開発された「よい問題」が，真に子どもの問題として子ども自身が問題意識を持てるようにすることが学習指導上のポイントとなる。このとき，一人一人の子どもの問題解決力の育成を考えるならば，解決の方向性を決定してしまうような行き過ぎた見通しを教室全体で確認することは避けたい。必要なことは，与えられた問題場面の分析であり，これによってそこで真に問題となることの焦点化（定式化）が把握されることが行われるべきことである。その際，多くの場面で見積もりを行うことが有効であろう。

例えば，小学校第6学年における異分母分数の加減の学習（同値な分数）において，次のような問題場面（具体的な場面そのものは省略）が提示されたとしよう。

『 $\frac{2}{4}(\ell)$，$\frac{2}{3}(\ell)$，$\frac{3}{4}(\ell)$ の大小関係』

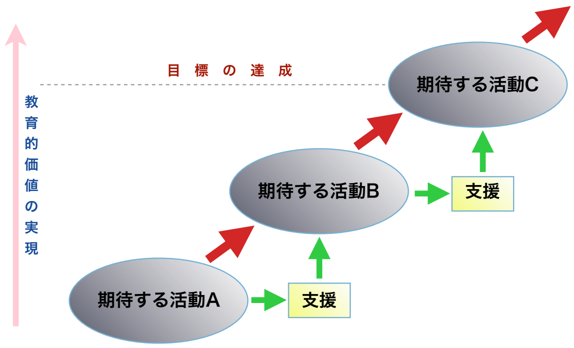
ここで期待される見積もりは，$\frac{2}{4}$ と $\frac{2}{3}$ を比較するとき，分子が同じで分母が異なる（前者が4等分されたものの2つ分，後者が3等分されたものの2つ分）ことから，後者の方が大きいこと，また $\frac{2}{4}$ と $\frac{3}{4}$ では，分母が同じで分子が異なることから，後者の方が大きいこと，従って，解決しなければならないのは，$\frac{2}{3}$ と $\frac{3}{4}$ ではどちらが（しかもどれ

だけ）大きいか，ということである。

こうした活動が，問題の分析にあたって必要とされ，この場合，ここで行った見積もりから，分母をそろえれば（分子をそろえれば）大小の比較ができる，という見通しを得ることが可能となる。（「よい問題」の開発については，単元の指導計画と連関して述べる(*cf.* 5.)。）

4.2.2　自力解決：期待する算数・数学的活動とその変容のための支援

自力解決について通常見られるのは，授業にあたり，教師が児童・生徒の予想される反応を列挙することである。このことは，それ自体否定されるものではないし，むしろ（学級・教科の）担任であれば，個々の子どもがおよそどんな行動をするであろうかと予想できることは，望ましいことである。しかしながら，いわゆる「個人差に応じた指導」についての次のような指摘は，授業を設計していく上で極めて重要なことである；「2人の学習者A，Bが，異なる解決（考え方）を実行することが，直ちに教授上の問題となるのではなく，AとBに対して，同一の対応でよいのか，それとも異なる対応を必要とするのかが問われ，それによって何種類の対応が必要とされるかが定まる。」すなわち，個人差に応じた指導（解決予想）の根拠は，学習者の可能な解決パターンにあるのではなく，教授上いかなる指導（支援）が要請されるかにある。それでは，そのような「支援」は何に対して，何のために実施される必要があるか。このとき，われわれは子どもの算数・数学的活動に焦点をあてたいと考えるのである。ここで言う「算数・数学的活動」は，単に操作活動や実験的活動のみを意味するのではない。先述の通り(*cf.* 3.2)，「算数・数学的活動」とは，《子どもが算数・数学の問題解決において，合目的的に行う活動であり，そこには当該の数学的価値が負荷されていると見なされる》とするものであり，ここで数学的価値を負荷して子どもの活動を見るのは教師である。そのように負荷された数学的価値が，学習の結果，子どもにも移譲されることをねらうのである。従って，従来「予想される反応」として捉えてきた子どもの活動は，(教師によって)「期待される活動」として捉え直され，これによって，個々の活動には，それぞれどんな数学的価値を負荷するか，ということが位置づけられることとなる。このとき，それでは従来の「予想される反応」は全くその役割を果たさないかといえば，決してそうではない。いくら素晴らしい数学的価値が負荷されようとも，子どもの実態と全くかけ離れた活動を期待するわけにはいかない。また，「期待される」ということは，必ずしも子どもの反応としては予想されないものも含むということであり，従って，次に「支援」が問題とされるわけである。



先の指摘にもあったように，支援は子どもの個人差に応じた手だてである。しかし留意すべきことは，単に問題の解決を直接的に導くようなものではないということである。上述のように，われわれは期待される算数・数学的活動を位置づけた。それらは，それぞれが価値負荷的なものであった。従って，個々の活動は，どれかひとつを子どもが経験すればよいとされるものではなく，（必ずしも自力解決の場だけでとは限らないが）授業全体を通してすべての子どもがこれらの活動を経験することに値打ちがある。そのため，「支援」は，そうした個々の活動の橋渡しとし

て，子どもの活動の水準を適切に高めていくものでなければならない。そのような自力解決の過程を踏むことが，次の練り上げの場において，真に練り上がっていく様相を，一人一人の子どもが経験し得るものとなる。

4.2.3　練り上げ：統合的発展的考察

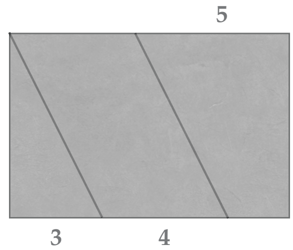
まず最初に確認しておくべきことは，練り上げの場は，決して子どもの解決の発表会であったり，ましてや品評会ではない，ということである。練り上げは，数学的知識や概念についての社会的構成を意図して行われるものといってよい。われわれは，先に学習を子どもの困難の克服と位置づけた。そのような困難は，子どもが個々に克服すべきものであるものの，克服によって達成される認識（知識，概念，等）は個人的であるべきではない。すなわち，社会的に共有される・受け入れられるとされる知識・概念等をその達成において意図するのであり，学習指導の過程における個々の子どもの個人的な知識の変容を教授学上の問題として，自力解決の場を置くのである。この意味で，自力解決のための練り上げではなく，練り上げのための自力解決である，ということができる。すなわち，自力解決の過程で，子どもが様々なことを考えたのだから，是非これらを他の子どもに紹介したい，として練り上げが行われるのでは決してなく，練り上げを首尾よく実施しようとするとき，そこにはどうしても個人差が顕在化し，通常授業の最初から練り上げに入ることが不可能なため，まず自力解決の場を置くのである。従って，すべての子どもたちが練り上げの場に参加できることが，必須要件となる。先に示した図においては，1つのケースとして，練り上げが《活動B》から開始されている。このようなケースにおいては，自力解決の場において，既にすべての子どもが《活動A》を達成しており，《活動B》を達成したかこれに従事していることが要請される。従って，練り上げを開始するにあたって，言わば「参加チケット」として《解決B》は位置づけられる。このとき，練り上げにおける活動を取り上げる上で示される「課題」は，基本的には，自力解決における「支援」であってよい。それは，以下の理由による。個々の「支援」は，活動の促進を意図するものとして置かれたものであり，それゆえそれらはその一つ一つが子どもにとって重要な意味を持つことになる。もし自力解決においてようやく《活動B》に着手することができた子どもには，以後の「支援」をまだ経験していないことになり，そこから教室全体で協同で解決活動を遂行していく必要がある。《活動B》を何とか達成し，次の「支援」を教師から受けていた子どもには，その「支援」によって期待される活動がまだ達成されていないわけであるから，この子どもは，ここから協同で解決活動を遂行することになる。《活動C》を遂行していたり，達成した子どもには2つの可能性がある。第一は，期待する活動の系列に沿って解決活動を変容させてきた子どもである。このような子どもには，自らの解決活動を振り返る貴重な場を提供することになる。第二は，初めから自力で《活動C》を達成した子どもである。もちろん自力解決の場においても同様な教師の働きかけが必要なことはいうまでもないが，このような子どもたちは，多くの場合，自身が遂行した活動の価値を必ずしも把握できているわけではない。従って，練り上げの場において，個々の解決活動の価値とその変容を，教師による「課題」を基に経験することを通して，自らの解決活動の価値を真に評価し得ることになる。

以上は，どちらかと言えば，形式的，形態的なことがらに関するものである。より重要なこととして，「練り上げ」とは何かと言う根本的問題にわれわれは答える必要がある。

数学的問題解決の授業では，所与の問題の解決が得られればそれでよいとされるものではない。そのような問題解決（の過程）を通して，数学的な概念，知識，技能，等を作り上げていくことにこそそのねらいがあると言ってよい。従って問題の解決が得られることは，真の練り上げの開始であると見ることもできる。先に示した図において，《活動C》に続いて，《活動N》を位置づけるのはこのためである。再度，算数・数学教育の目標に立ち返るならば，それは「数学的な見方・考え方の育成」と述べることができるが，われわれはこのことを子どもの問題解決力の育成ということに還元して目的の達成を図ろうとするのであった。ここで，「数学的な見方・考え方」を育成するとは，「算数・数学にふさわしい創造的な活動ができるようにすること」と言われることもある。このとき，そのような「創造的な活動」の典型として《統合的発展的考察》が指摘される。統合的発展的考察とは，「統合による発展を目指した考察」であり，われわれは，まさに統合的発展的考察こそが練り上げの場で行われることとして捉えたいのである。そうした統合的発展的考察の実際の様相として，図においては《拡張》《一般化》《体系化》が示されている。すなわち，これによって初めて，問題の解決を通して数学的な知識や概念を構成することが達成されると見るのである。この意味で，後述の指導計画についての議論とも連関するが，いわゆる「発展」は，単元の終末だけに位置づけられるものではなく，毎時間の授業の中で，特に練り上げの場において行われるものとして位置づけたい。以下では，特に，《拡張》と《一般化》について検討してみよう。

《拡張》と《一般化》

例えば，次のような問題の解決をみてみよう：右の図における（三角形，平行四辺形，台形の）面積の比を求めなさい（小学校第6学年）。この問題に対する「期待される算数的活動」は，次の通りである。（与えられていない辺の比については，問題の分析を通して確認したものとする。）



活動A：「高さ」に何らかの具体的数値を当てはめてそれぞれの図形の面積を算出

活動Aでは，面積を求める上で必要な高さが与えられていないことから，仮想的に高さをたて，その比を求めている。このとき，高さはどんな値であっても面積の比は不変であることの認識が要請される。

活動B：それぞれの図形を三角形に分割し，面積の比を底辺の和の比に還元

活動Bでは，活動Aにおいて個々の図形の求積公式を利用していたのに対し，ただ一つの求積公式を利用することで，求める面積の比を簡潔に表すことが実現される。

活動C：それぞれの図形を台形とみなし，面積の比を（上底＋下底）の比に還元

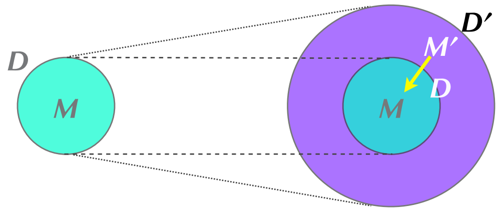
活動Bで，一つの観点により問題の解決を図っているものの，そのために図形に補助線を加えるという操作が必要とされた。これに対し，活動Cでは，そのような操作を必要とせず，むしろ観点そのものに変更を加えることにより問題が解決されている。

活動Cにおける観点の変更を指摘したが，より詳しく述べれば次の通りである。活動Bにおける求積公式の利用は，公式が直接適用できるために図形を個々の三角形に分割したことは上に述べた通りである。一方活動Cでは，台形の求積公式を利用しやすいように図形に操作を施しているわけではない。台形の定義に基づいて，平行四辺形を台形の仲間として見る（包摂関係）ことで，この公式をよ

り広い範囲に適用できるようにしている。さらに，このような見方を（直角）三角形にも拡げて見ているのである。このとき，台形の求積公式には，何らこれまでと変更がなされたわけではない。言わば，既知の数学的アイデアを，これまで以上にその適用範囲を拡大していると指摘できる。換言すれば，台形の求積公式の利用の《一般化》が行われたといえる。このときわれわれは，《一般化》について次のことを確認する。すなわち，《一般化》のプロセスにおいて保存された数学的アイデアは何であるか，そしてそのような数学的アイデアによって従来の「特殊」であったどんなものが統合され得たか，という点である。

以上の《一般化》に対して，算数・数学学習における《拡張》の場面として典型である（×小数）の乗法の意味の拡張の場面について検討しよう。乗法の意味の拡張とは，言うまでもなく，（×整数）の場面で，乗法の意味が「同数累加」であったのに対して，この意味づけでは（×小数）の意味をうまく説明することができないため，これを「割合としての意味」すなわち，A×pについて，「Aを1と見たときにそのpにあたる大きさ」として意味づけることである。

このとき，新しく作られる意味は，（×整数）の意味を基にして考えられるものではない。むしろ，新しい意味ができた後に，これまでの（×整数）の意味との比較を通じて，これを取り込んでいくこと，換言すれば統合していくことになる。これが《拡張》である。拡張とは，普通次のように述べられる：《領域Dで意味Mが成り立つ。Dを含むより広い領域D′において成り立つ意味M′が，Dに限定したときMと同値であるとき，M′はMの拡張であるという。》もしそうであるならば，（×小数）について乗法の意味を拡張しようとするとき，少なくとも次のような活動

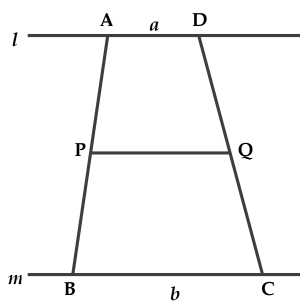


の様相が要請されることになろう：1）整数の場合に成り立ったかけ算の意味が，小数の場合（×小数）では，不都合であることの認識；2）小数の「乗法」の意味をつくる／小数の場合に成り立つ意味の構成（この時点では，厳密にはまだ乗法であるとは宣言できない）；3）新しくつくった意味と，既に在る意味との比較；4）既に在る意味を，新しい意味に統合。

ここで考えたいことは，《一般化》との違いである。上述のように，《拡張》は，はじめに拡張されるべき意味（概念）が所与のものとして示された上で初めて可能であるということである。これに対し，《一般化》は，既知のものを文字通り一般化していくことであり，そこには認識上の方向性が認められる。すなわち，両者は認識論的に見て，かなり違った様相を呈するであろうということである。《拡張》と《一般化》は，どちらも数学的な見方・考え方（の育成）として必要かつ重要なものであることは間違いない。両者はよく混同されて用いられることもあるが，上記のような検討を踏まえるならば，明確に区別されるべきものであることが確認され，従って授業，特に練り上げの場においてもその展開の仕方には異なるアプローチが要請されることになろう。

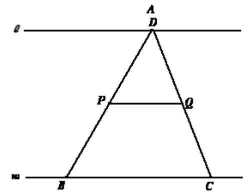
演習

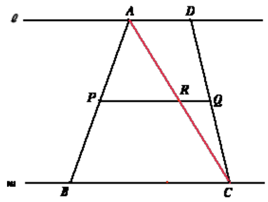
次のような事例について，これまでの議論を演習してみよう。

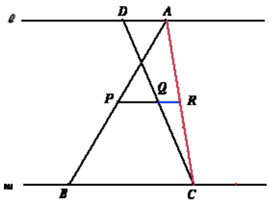


問題は，「図のように，$l /\!/ m$，P, QをそれぞれAB, CDの中点

とし，$AD=a$，$BC=b$ とするとき，PQの長さを a, b で表せ」というものである。ここで真に問題としたいことは，「点 A, B, C, D の位置によって，PQ の長さはどのように変わるか」ということである。







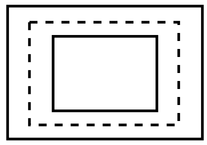
最も把握しやすい場合は，点 A, D が一致するときであろう。この場合，中点連結定理（中学校第2学年）により，$PQ=b/2$ が導かれる。原題の図の場合は，第一の場合を2回適用することで，$PQ=(a+b)/2$ が導かれる。では，ABとCDが平行線の内側で交差する場合はどうであるか。第2の場合における方法を一般化すれば，やはり中点連結定理を2回適用することで，$PQ=(b-a)/2$ が導かれる。しかし，この考え方は図的直観に依存するところが大きい。すなわち，なぜ前の場合において（分子が）$(a+b)$ であるのに対して，この場合 $(b-a)$ になるかということの説明である。中学校第2学年の学習として，長さに対して何らかの約束をすることで正の長さ・負の長さを決めることも可能であろう。高等学校であれば，ベクトルのアイデアを利用することで，$|\overrightarrow{AD}|=|a|$，$|\overrightarrow{BC}|=|b|$と見ることで，

$$PQ=\frac{|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|}{2}=\frac{|a+b|}{2}$$

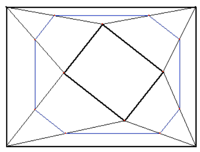
（a, b はともに負の値をとり得る）

として，4点 A, B, C, D の位置に依存することなく示されたことになる。これは，中点連結定理の《拡張》になっており，そのような見方によって，あらゆる場合について統合することが可能となり，従ってそのような統合によって発展的な考察が行われたと見ることができる。

一方，この場面は小学校算数の立場で見れば，PQの長さは，ADとBCの平均であると見ることもできる。換言すれば，「平均」という数学的アイデアが，抽象され洗練されたと見ることもできるのである。小学校における同様の扱いとして，次のような場合がある。



図のように，外側の長方形と内側の長方形（ちょうど「真ん中」に位置している）の中間に作った「道」（図の点線部分）の長さを求める問題である。いま，外側の長方形の周囲の長さをL，内側の長方形の周囲の長さをℓとすれば，求める長さは，$\frac{L+\ell}{2}$として得られる。これは，「平均」の考えによるものである。では，内側の長方形の位置が「真ん中」ではない場合，どのように見ることができるか。内側の長方形が平行移動した場合，元の考え方を押し拡げて，処理することができる（一般化）。回転移動した場合はどうか。ここでは結論だけとするが，右図のように「中間の道」を定義することで，（中点連結定理を利用して）これまでの形式（上の式）を保存することができる。しかもこの見方は，平行移動した場合についても含めて考えることができ，《拡張》による統合が行われたと見ることができるのである。



算数・数学的活動の関連付け

ここまでの議論において，《一般化》や《拡張》による統合的発展的考察を事例を元に展開してきたわけであるが，実際の授業実践においてこのことがどのように実現されるか，という点について確認しておきたい。《一般化》や《拡張》は，もちろん教材研究を通じて，当該の教材をいかに授業において展開していくかという視点から決定されるものではあるが，少なくとも教師はそのことを

目指しているものの，子どもは初めからそのことを意図して思考を展開するわけではない。従って，特に練り上げの場において，「さあ一般化（あるいは拡張）しましょう」とは当然働きかけることはない。このとき，いずれのアプローチにおいても，統合的発展的考察を促すということは，個々の算数・数学的活動を関連付けることによるものであることを確認することができる。すなわち，活動間の関連付けを図るとき，それが当該の教材に応じて《一般化》によるものであったり《拡張》によるものであったりするわけである。それゆえ，教師が練り上げにおいてまずねらうことは，個々の算数・数学的活動はどのように関連付けられるか，という点にあるといってよい。

4.2.4　振り返り/ 評価問題：次時への課題

問題解決の授業における最後の相は，本時の学習を振り返ったり，あるいは本時の学習の達成を確認すべく評価問題を実施することである。特に評価問題は，よく本時の問題よりもはるかに困難である問題が提示されることもあるが，その意図するところは，本時達成された統合的発展的考察，換言すれば，本時の問題の解決を通して構成された数学的知識や概念の確認をすることであるとするならば，本時の問題に比べていたずらに複雑すぎることなく，この時間に学習したことはこんなことだった，と確実に子どもたちが意識し得るような問題設定が望ましい。

また，そのような評価問題等を通して，本時の学習を振り返ることにより，次にいかなることが問題となりそうかの見通しを与えることも，後述する指導計画とも連関して，問題解決が単元を通して行われる上で極めて重要な授業設計の観点となろう。

5.　単元の指導計画の再編成

上述の統合的発展的考察に関わって，次のような指摘に耳を傾けてみよう：「「統合」ということは，目標という立場からは，子どもにそうした観点に立って創造的に取り組むことができるようにするということがねらいであるが，その基盤には，先ず，教師が，統合・発展という立場に立って，前後の内容のつながりをつかみ，その観点に立った課題の提示が行われていることが必要なのである。…しかし，実際には，こうした点に，むしろ問題がある場合が少なくない。」ともすると，教科書の問題を教科書の配列のまま指導することがあるが，まさにわれわれはこうした実態を見直す必要がある。これまでに，子どもの創造的実践力を育成するにあたり，数学的問題解決の授業を算数・数学的活動を組織化することで再構成することを試みてきた。そのような問題解決は，1時間ごとにその評価がなされるだけでは不十分であり，少なくとも単元を通した問題解決を構想する必要がある。このとき，単元を通した問題の開発ということが従来からも指摘されてきた。ここでは，このことをより一層充実するためにも，下表に示されるような単元の指導計画

時	学習内容	本時の目標	中心となる考え	問題	主たる算数・数学的活動

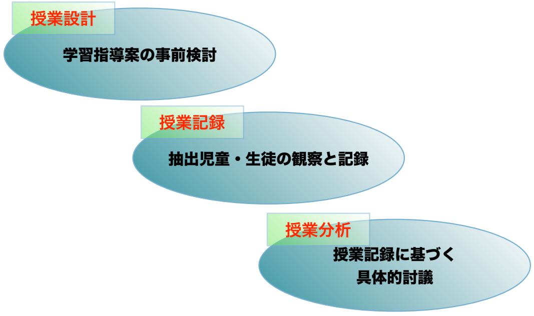
を構想したい。すなわち，従来単元の問題（群）を構想する仕方でその指導計画が設計されることを目指していたのに加え，毎時間を結ぶ「中心となる考え」と各時間に展開される「主たる算数・数学的活動」を構想することである。「主たる算数・数学的活動」については，事例の考察を通じて上述してきた通りである。ここで「中心となる考え」とは，端的に言って，各時間においてどのよう

な統合的発展的考察が行われることを目指すか，ということを焦点化したものであり，実際の様相としては各時間にどのような一般化，拡張，あるいは体系化が期待されるか，ということになろう。

　このような指導計画が構想されることが望ましいことではあるが，現実にはなかなか物理的，時間的な要因により実現が困難であろうことが予想される。しかし，授業研究会が実施される際や，後述するように教員のチームが個人個人手分けをすることでこのような指導計画を財産として共有できることを期待する。このことは，また授業実践の評価を科学的にするためにも重要な資料となることが想定される。すなわち，昨年よりも，5年前よりも，そして10年前よりもどんな点がどんなふうに進展したと見ることができるか，ということに対する具体的資料としてである。

6.　協同による授業研究の実施

　最後に次の点を指摘しておきたい。ともすると，様々な場における授業研究会におけるいわゆる研究授業は，授業者本人の苦労の上に成立していることが多い。このことは否定されるものではないが，しかし，その結果，研究会を実施しようとしてもなかなか授業者が決定しなかったり，決定した授業者の負担が極めて大きいものであったりする。このことは，研究会においても協議の中で議論が実のあるものとなりにくかったり，逆に苦労した授業者に不満が残る原因にもなりがちである。この意味で，「互いに授業を見合う」といったこれまでの授業研究会の実施の様相から「ともに授業を作る・語る」という様相への転換を提案したい。すなわち，少なくとも授業研究会における授業設計は協同によるチーム作業と捉えるべきであり，これによって，その協議においては，まさに当初設計の段階で考えられたことが首尾よく実現され得たのか，それともどんな点で不十分であったり，あるいは欠落していたのか，といった次につながる生産的な協議が可能となろう。このための具体的方策としては，授業の中で，抽出児童・生徒の行動を観察し，そのような児童・生徒に対する教師の支援によって活動はどのように変容し得たか，またはそうでなかったか，といった授業記録を基にした協議を行うことを提案したい。さらに，このような授業研究会が，これまで以上に学校現場で積極的に実施されることを期待したい。ともすると，進度等の時間的な問題などによりなかなか実施しにくい状況もあるようであるが，より長期的な視点に立ったときに，その場の取り繕いよりもはるかに優れて教師一人一人の学習指導力の向上こそが，子どもの学びの力を高めていくことにつながることを，われわれは改めて肝に銘じたい。



7.　おわりに

　本稿では，論述の煩雑さを避けるために，敢えて引用・参考文献の出典を明記しなかった。本来はこのようなことは望ましいことではないものの，以下主要な資料とさせていただいた文献を示したい。もちろん，この他にも諸所に渡って示唆を受けた文献があり，また本稿の文責はすべて筆者にあることは言うまでもない。

- 中島健三 (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方：その進展のための考察，金子書房.
- 伊藤説朗 (1993). 数学教育における構成的方法に関する研究（上・下），明治図書.