

2015 年度

数学学習指導設計Ⅱ

単元：2 次関数($y = ax^2$)

J4

東谷 新吾

清水 祥真

山本 柊

山本 祥大

山本 隆広

目次

1. 単元設定と設定理由.....	3
2. 学習指導要領の変遷.....	3
3. 教科書比較.....	6
3.1 啓林館.....	6
3.2 東京書籍.....	11
3.3 数研出版.....	14
3.4 大阪書籍.....	15
3.5 大日本図書.....	19
3.6 教育出版.....	22
3.7 学校図書.....	26
4. 問題開発.....	28
5. 指導案.....	29
5.1 指導案作成の過程.....	29
5.1.1 第1回.....	29
5.1.2 第2回.....	30
5.1.3 第3回.....	30
5.2 作成した指導案.....	31
6. 感想.....	38

1.単元の設定と設定理由

単元：2 次関数($y=ax^2$)

設定理由

中学生で習った 1 次関数や 2 次関数に対して、苦手意識がある生徒が多く、グラフを書くことができない。とくに、二次関数とグラフの関係が分からない生徒が多いと考える。この単元では、 $y = ax^2$ という 2 次関数を扱い、関数概念の理解を深め、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できる。ここでは、2 次関数のグラフの特徴を中心に考え、関数的な見方・考え方で物事を捉えられるような授業を設計したい。

2.学習指導要領の変遷

数学学習指導要領の変遷を表 1 に示す。

年代	類似点	相違点	項目
昭和 22 年から昭和 33 年	・ 特になし。	・ 2 次関数が高校数学の幾何の分野から中学数学の数量関係の分野に移動。 ・ 自然現象や社会現象などの経験主義や単元学習に偏り過ぎない系統性を重視。	数量関係
昭和 33 年から昭和 44 年	・ 「簡単な 2 次関数の特徴を理解させ、関数についての理解を深める」という目標。	・ $y = ax^3$ を扱うようになる。 ・ 2 元 1 次方程式、資料の活用がなくなり逆関数について扱うようになる。 ・ 定義域、値域などの語句の定義の理解。	数量関係
昭和 44 年から昭和 52 年	・ 定義域と値域の理解。 ・ 関数のとる値の変化の割合の理解。	・ 「関数の特徴を理解する」という目標から関数関係表現・私用する能力向上へと変る。 ・ 逆関数がなくなり、2 乗に反比例する関数が追加。	関数

		・用語をただ使用することがなくなる。	
昭和 52 年から平成元年	・「事象の中から、関数関係にある二つの量を取り出し、変化や対応の特徴を調べる能力を伸ばす」という目標。	・2乗に反比例する関数 にな り、 $y = ax^2$ になる。	数量関係
平成元年から平成10年	・とくになし。	・数学指導要領がかなり具体的に書かれている。 「事象の中から関数関係にある二つの数量を取り出し、変化や対応の特徴を調べる能力を伸ばす」から「具体的な事象の中から二つの数量を取り出し、それらの変化や対応を調べることを通して、関数 $y=ax^2$ について理解するとともに、関数関係を見いだし表現し考察する能力を伸ばす。」と変る。…①	数量関係
平成 10 年から平成15年	・とくになし。	・とくになし。	関数
平成 15 年から平成20年	・とくになし。	・グラフ、表、式の関連性を強調。 ・関数を用いて具体的な事象について説明することを要求。 ・事象の中から関数関係を理解することを要求。	関数

考察

まず、昭和 22 年から 32 年の間では、中学校に 2 次関数という分野はなく、昭和 33 年からの導入であった。2 次関数を初めて取り入れた昭和 33 年では、初めてということで、 $y = ax^2$ という基礎の形を知り、2 次関数を扱うことができるよう授業設計されていた。昭和 44 年には、 $y = ax^3$ や逆関数を取り入れ、2 次関数以外の関数も扱っているが、これが逆に生徒たちには混乱をまねいたのか、昭和 52 年には $y = ax^3$ と逆関数はなくなっている。昭和 52 年では、二乗というところに着目したのか、二乗に比例、反比例する関数を扱うようになっている。しかし、平成元年、二乗に反比例する関数もなくなり、2 次関数の基礎となる $y = ax^2$ を学ぶという昭和 33 年導入当初の授業設計へと帰着していた。さらに、昭和 52 年では、用語（定義域や値域など）にも着目し、生徒が理解して用語を使えるような指導も重視していた。平成元年から平成 10 年の間では指導要領の内容にあまり変化はなかった。平成 10 年から 20 年の間では、いろいろな関数という項目が追加され、昭和 44 年に扱われていた $y = ax^3$ や逆関数を使用するのではなく、高校数学の簡単な導入として 2 乗以外の関数にも着目できるように、関数の紹介がされていた。

平成元年から 10 年の間では、指導要領の書き方、書かれ方に大きな変化があった。平成元年では、箇条書きでかかれていたのが、文章でかなり詳しく書かれていたり、かなり具体的に明記されていた。（表の①より）昭和 33 から平成元年にかけては、指導要領の内容の変化は沢山あったものの、書き方の変更はあまりなかった。平成に入って、指導要領の書き方に変化がでてきたのは、指導要領を書くという重要性にも注目がでてきたからではと考える。

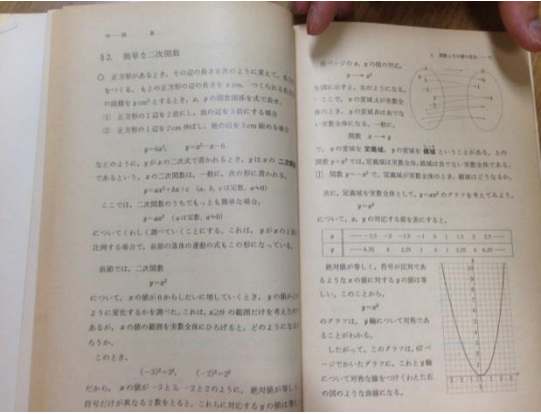
表に項目という枠を設けたのですが、これはその年代ごとに項目として扱われていた部分をまとめてみたものです。2 次関数の項目には主に二つあり、「関数」と「数量関係」です。数量関係は関数と資料の活用という分野をまとめたものことらしく、つまり表から、つねに項目が変化していることから、「資料と活用」を入れるかどうかでかなり試行錯誤しているのがわかります。

3.教科書比較

3.1 啓林館

S49 発行

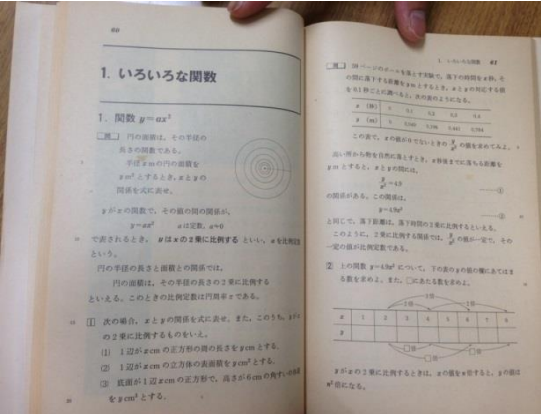
・ 正方形、長方形の面積



「簡単な2次関数」という領域を示したうえで左上に記載されているような問題を提示することで、2次関数の特徴を理解させようとしている。

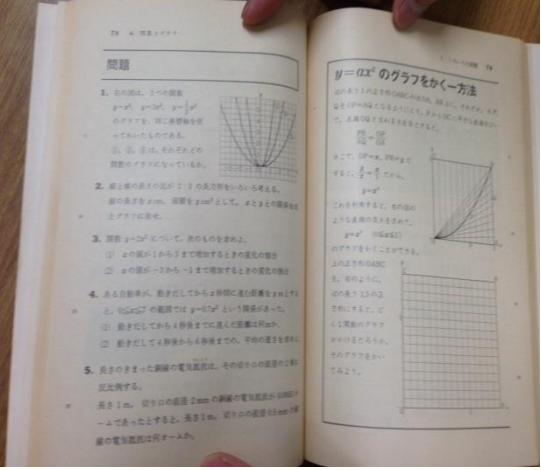
S55 発行

・ 円の面積
・ 物体の自由落下



S52 数学学習指導要領に「いろいろな事象と関数」が導入され、それに対応するものが上記のものだと考えられる。ここでは円の面積と物体の自由落下を例にあげている。

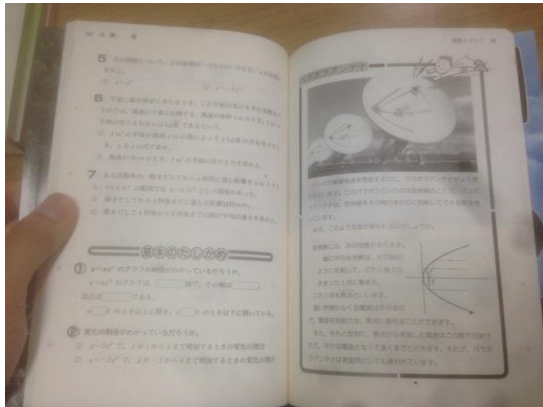
・ 自動車の制動距離



この年の教科書から現在でも載っている自動車の制動距離が導入されている。しかし問題として掲示されているだけで、「身近な事象」としては紹介されていない。

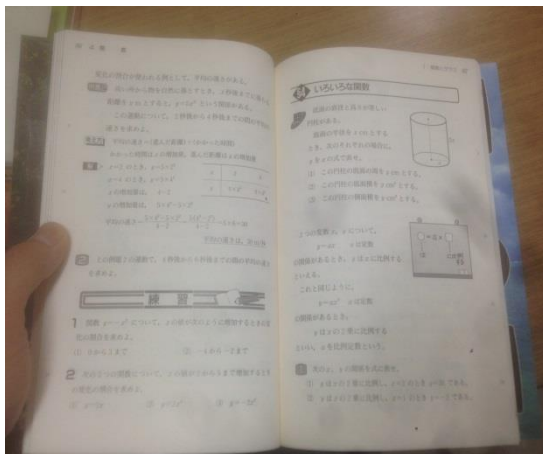
H4 発行

- ・風の抵抗
- ・自動車の制動距離
- ・ストロボアンテナ

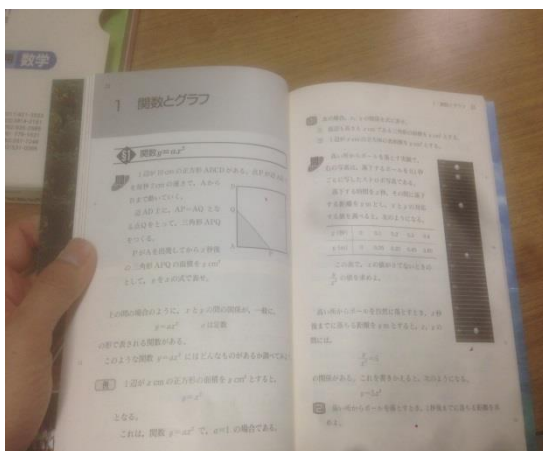


この教科書から現在の教科書でも扱われている車の制動距離が扱われている。また風速の変化に対する力の問題やパラボラアンテナも新しく2次関数を用いた例としてあげられている。以前までの自由落下にストロボ写真を導入することにより時間による物体の位置を図として表現している。

- ・物体の自由落下

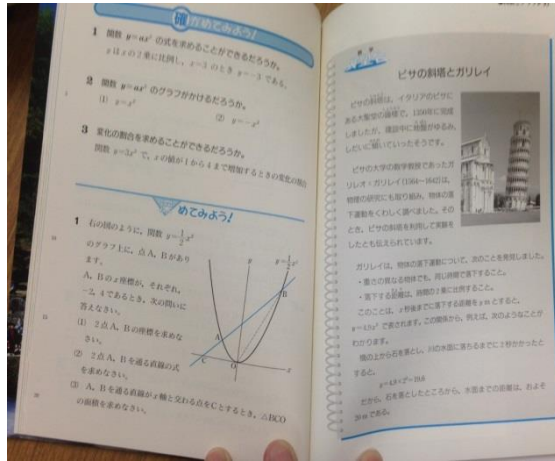


- ・三角形、長方形の面積



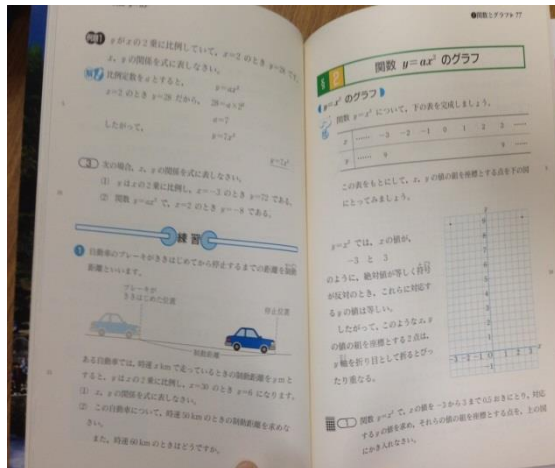
H14 発行

・物体の自由落下



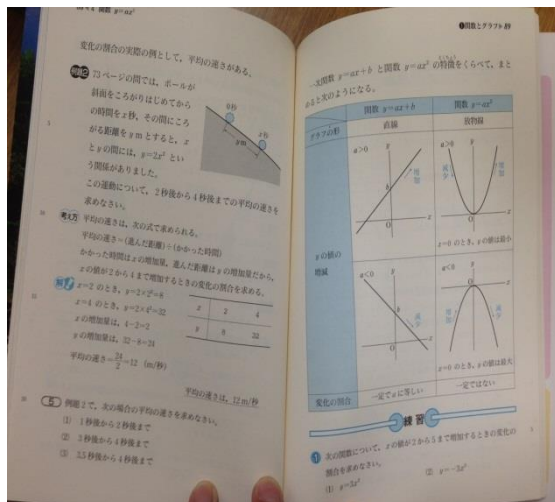
自由落下ではピサの斜塔でガリレイの行った実験を行ったことを紹介する箇所が導入されている。

・自動車の制動距離



自動車の制動距離をイラストで表し、以前のものより子どもにどのような事象かということをつかりやすくしていると考えられる。

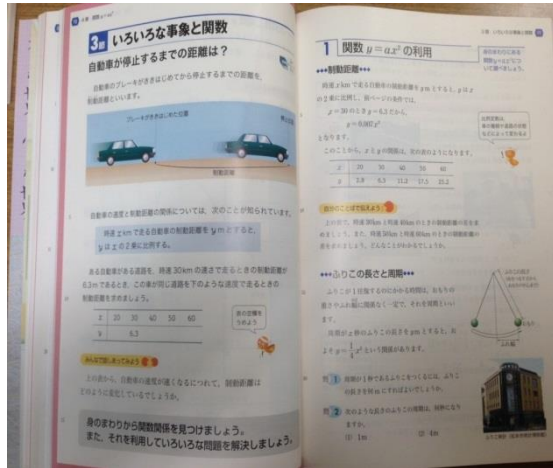
・斜面をころがるボール



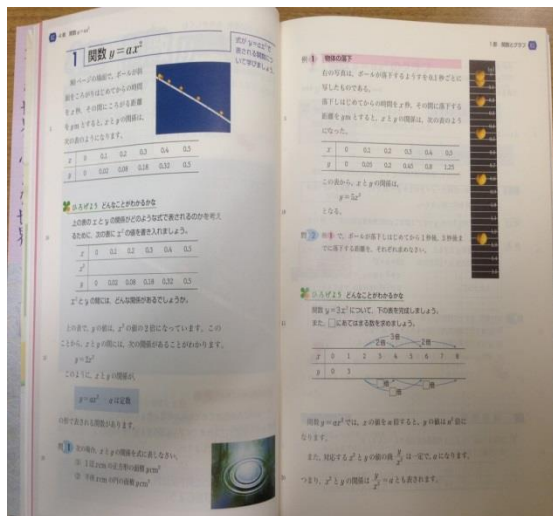
この教科書から「斜面をころがるボール」が導入され、斜面をころがるボールの距離と時間の関係は2次関数で表され、実際に距離などを求めている。

H24 発行

- ・自動車の制動距離
- ・ふりこの長さと周期



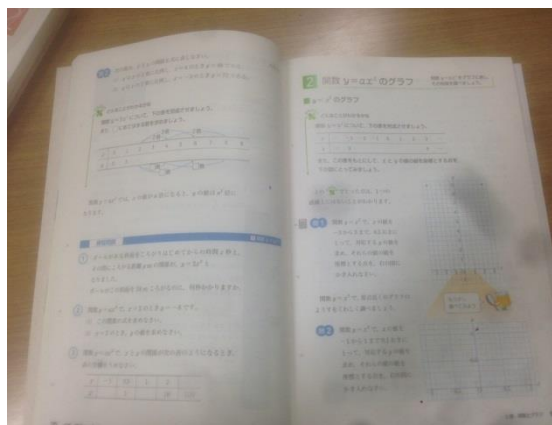
- ・斜面をころがるボール
- ・正方形、円の面積
- ・物体の自由落下



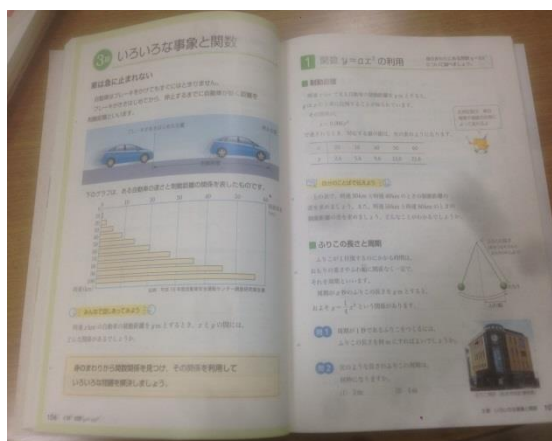
あげられている事象としてパラボラアンテナ、車の制動距離、斜面を転がる球のストロブ写真があり、それは以前の教科書にも記載されていたものだが、この教科書から「ふりこの長さ」と周期」という事象があげられている。また「自分のことばで伝えよう」という項目が新しく導入され、生徒にほかの数値の場合どうなるか考えさせることで、数学的思考を身につけさせようとしていると考えられる。H24 と H28 の間では学習指導要領に改訂がなかったため、相違点は特にない。

H28 発行

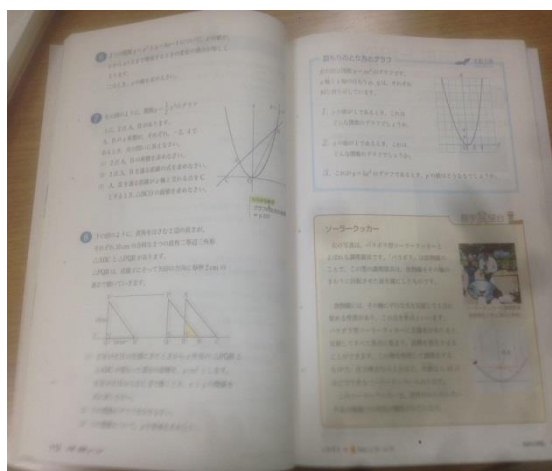
- ・物体の自由落下
- ・斜面をころがるボール



- ・自動車の制動距離
- ・ふりこの長さと周期



- ・ソーラークッカー



基本的には「物体の自由落下」「斜面をころがるボール」、「自動車の制動距離」、「ふりこの長さと周期」というような H24 発行教科書と同じような事象を問題としており、変化はほとんどしていないと考えられる。

H24 発行教科書ではパラボラアンテナだった箇所でも H28 ではソーラークッカーを取り上げ、放物線形状でできているものは焦点が一点に集まることがここで紹介されている。

3.2 東京書籍

S49 発行

他の年度と比べると事象の中から関数を取り出すことを求めているため、式、グラフ、表の関連性について教えることに従事している。

S55 発行

1 2乗に比例する関数

高いところからボールを落とすと、落ち始めてから x 秒間に落ちた距離を y cmとすると、 y は x の関数であり、およそ次の式で表されることがわかっている。

$$y = 5x^2 \quad (1)$$

この式から、いろいろな x の値に対応する y の値を求めて表を作ると、次のようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36
y	0	5	20	45	80	125	180

この表からわかるように、 x^2 の値に y の値が対応してあることは x^2 に比例している。

例1 上の表で、 x がある値、たとえば1からその2倍、3倍、4倍……に変化すると、 y はもとの値からそれぞれ何倍に増加するか。

例2 (1)で、 $x=1$ のとき $y=5$ であるが、 x の値が $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ のときの y の値はそれぞれもとの何分のいくつになるか。

学校指導要領について、この年に「事象から関数関係を取り出し、変化や対応の特徴を調べる能力を伸ばす。」という記述が追加された。つまりこの年から二次関数の利用の分野が追加された。

物体の落下

例3 図のような正方形ABCDの頂点Aから点P、Qが同時に出発し、PはAB上をBまで、QはAD上をDまで、同じ速さで動く。AP、AQが x cmのときの△APQの面積を y cm²として、次の問に答えよ。

① y を x の式で表せ。

② ①で求めた式から、次の表の空らんにあてはまる数を求めよ。

x	0	2	4	6	8	10
y						

③ x の変域を $0 \leq x \leq 10$ として、 y の変域を求めよ。

三角形の面積

H4 発行

4 高いところからボールを落とすとき、落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とする。このとき、 y は x の2乗に比例し、落ち始めてから2秒間には、19.6 m 落ちるという。次の問に答えよ。

- ① y を x の式で表せ。
- ② 落ち始めてから4秒間には、何m 落ちるか。
- ③ 落ち始めて1秒後から3秒後までの間の平均の速さを求めよ。

5 右の図のような直角三角形 ABC において、点 P は辺 AB 上を B から A まで動き、点 Q は辺 BC 上を AC へ PQ となるように動くものとする。BP の長さが x cm のときの $\triangle PBQ$ の面積を y cm² として、次の問に答えよ。

- ① BQ の長さを x の式で表せ。
- ② y を x の式で表せ。
- ③ $x = 3$ のときの y の値を求めよ。
- ④ x と y それぞれの変域を求めよ。

6 $y = x^2$ のグラフ上の点 P(x , y)、原点 O、点 A(4, 0) を頂点とする $\triangle POA$ の面積を S とし、次の問に答えよ。

- ① S を x の式で表せ。
- ② $S = 50$ のときの P の座標を求めよ。

物体の落下、三角形の面積

図5 走っている自転車の運転者が危険を感じてブレーキをふんで、ブレーキがきき始めてから停止するまでに進む距離を制動距離という。この制動距離はだいたい速さの2乗に比例するという。時速40 kmで走っているときの制動距離を12 m として、次の問に答えよ。

- ① 時速 x km で走っているときの制動距離を y m として、 y を x の式で表せ。
- ② 時速60 km で走っているときの制動距離はおよそ何m か。

制動距離

S55 発行とは異なり三角形の面積に比を組み込んだ問題になっている。またこの年から制動距離の問題が扱われるようになった。

H24 発行

Q よしひろさんは、友だちと自転車で遊びに行ったときに、前を走っていた友だちが急に止まったので、「危ない！」と思いブレーキをかけたが、前の友だちにぶつかってしまいました。自転車で集団で走行するとき、安全に走行するためには、自転車の間隔を何 m くらいあければよいでしょうか。

自転車で走っている人が、危ないと思ってからブレーキがきき始めるまでに走った距離を空走距離、ブレーキがきき始めてから止まるまでに走った距離を制動距離という。したがって、危ないと思ってから止まるまでに進む距離、すなわち停止距離は、次のように表される。
(停止距離) = (空走距離) + (制動距離)

ふつうの走行では、自転車の時速はおよそ 13 km で、このときの空走距離と制動距離は、次のような値になる。
空走距離 2.4 m、制動距離 1.0 m …… ①

一般に、制動距離は、速さの 2 乗に比例するといわれている。また、空走距離は、速さに比例するといわれている。

問 1 ①の値をもとにして、自転車の時速が 26 km のときの空走距離、制動距離、停止距離を求めなさい。



制動距離

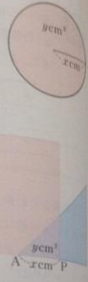
例 1 半径が x cm の円の面積を y cm² とします。

- y を x の式で表しなさい。
- 半径が 2 倍になると、面積は何倍になりますか。
- 面積を 2 倍にするには、半径を何倍にすればよいですか。

例 2 右の図のように、長方形の下じきと直角二等辺三角形の定規を重ねます。AP が x cm のときの重なった部分の面積を y cm² とし、次の問に答えなさい。

- y を x の式で表しなさい。
- ①で求めた式から、下の表の空らんにあてはまる数を求めなさい。

x	0	2	4	6	8	10
y						



円の面積 三角形の面積

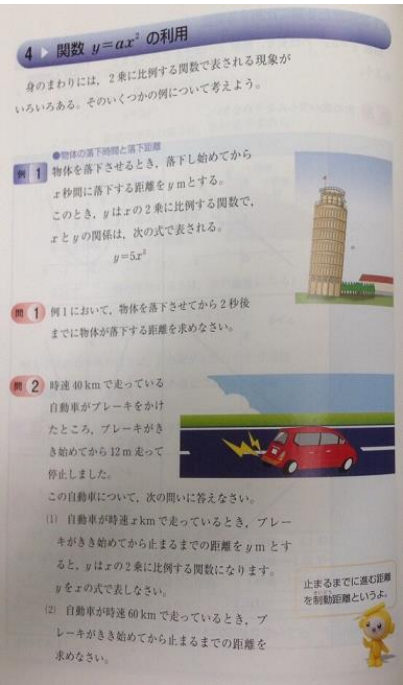
H4 発行のものと異なり、空走距離の説明も追加された。(ただし問題に直接関係はない)

またこれまでにはなかった円の面積を用いた問題が扱われるようになった。

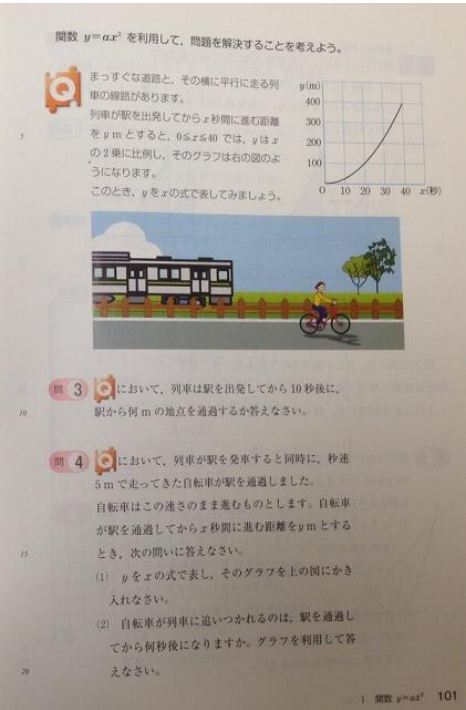
S55 発行とは異なり三角形と四角形の重ね合わせを組み込んだ問題になっている。

3.3 数研出版

H24 発行



物体の落下、制動距離



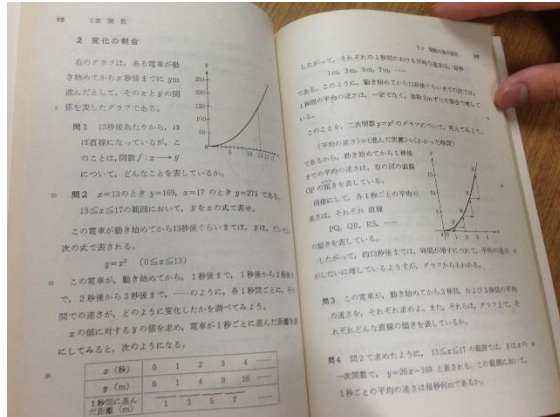
加速度運動

今までの問題と異なり事象と式、グラフの関連を考えるようになった。学習指導要領が（内容：イ 関数 $y = ax^2$ について、表、式、グラフを相互に関連付けて理解すること。）と書き換えられたことが要因に挙げられるのではないかな。
 これまでになかった二次関数と一次関数の交点を求める問題が扱われるようになった。

3.4 大阪書籍

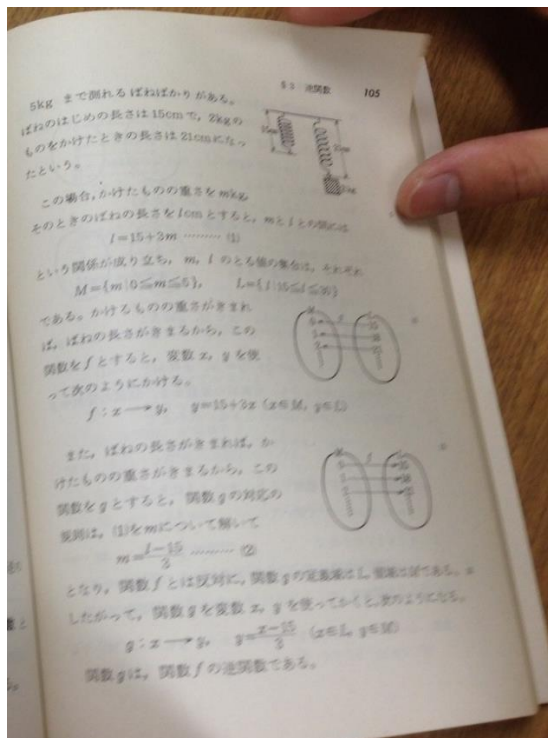
S49 発行

・電車の移動距離と時間の関係についての問題

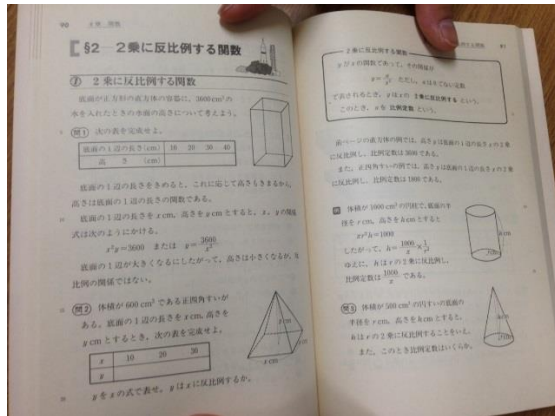


数学指導要領に逆関数が組み込まれたことにより、関数を用いた具体的な問題にも逆関数を用いたものがあった。左の写真からもわかるように、現代の教科書と比較すると簡単な図とグラフのみで後は言葉と式による説明がされている。

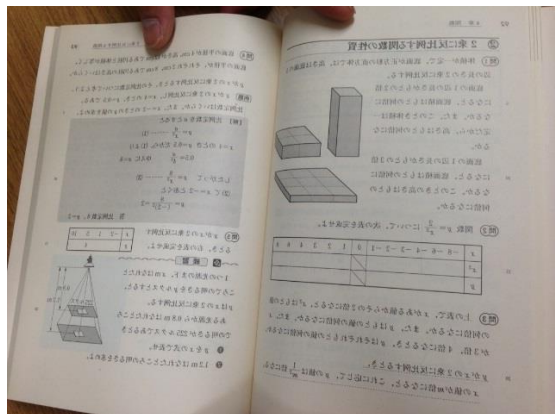
・バネの伸びとおもりの重さの関係についての問題



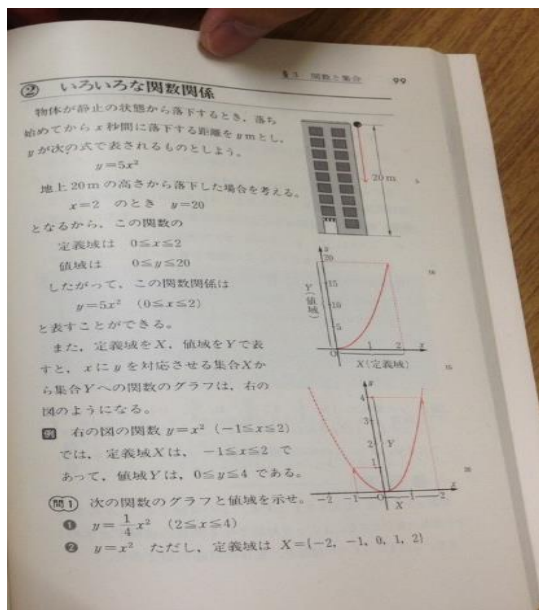
- ・立体の体積を一定にしたときの底面1辺の長さと高さの関係の問題



数学指導要領に逆関数が組み込まれたことにより、関数を用いた具体的な問題にも反比例を用いたものがあつた。左の写真からもわかるように、S49年の教科書と比較するとイメージしやすいよう図が増えており、そのためその問題から考えられることを問う問題もあつた。

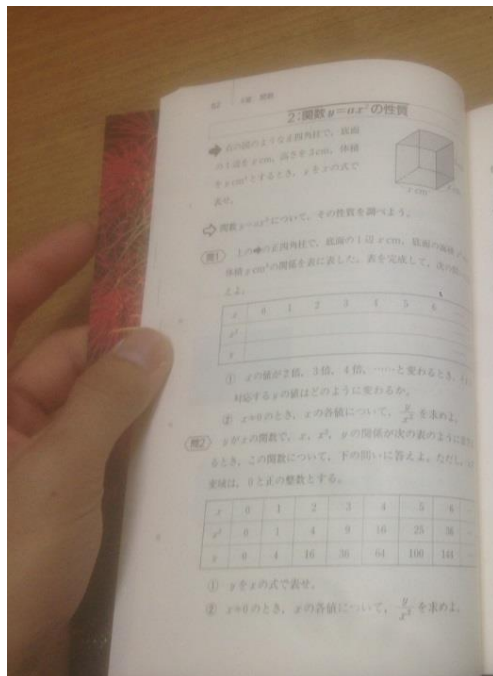


- ・物体の落下の距離と時間の関係の問題



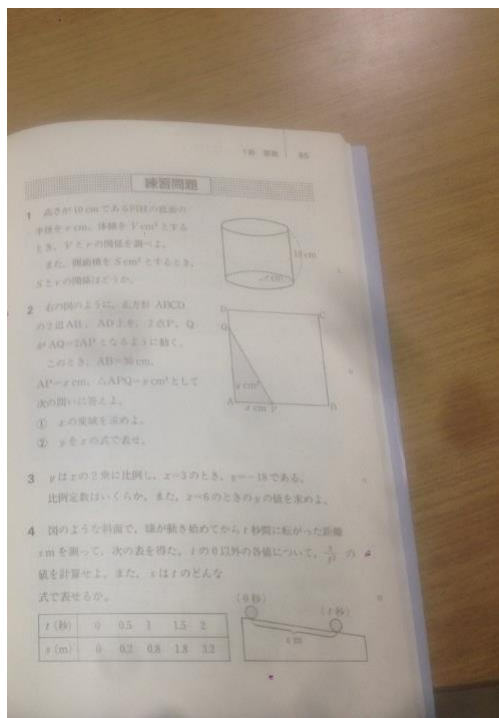
H4 発行

・立体の底面積と体積の関係の問題



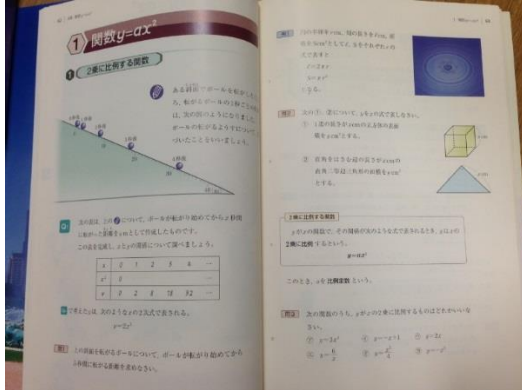
学習指導要領の関数の範囲が簡潔にまとめられたためか、H4 年の教科書には関数の範囲のページ数が少なくなっていた。そのため問題も少なくなっており章末問題にまとめられていた。

・斜面を転がる球の時間と距離の関係の問題



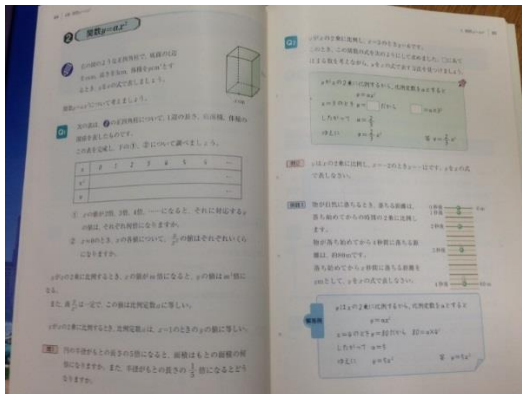
H14 発行

・斜面を転がる球の時間と距離の関係の問題

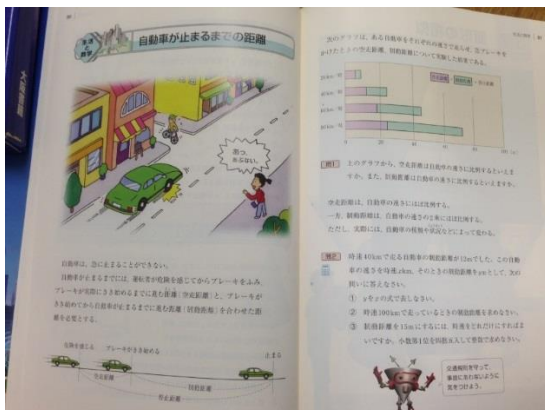


今回からカラーになったことでより生徒がイメージしやすいようになったと感じた。また今回から導入部分で具体的な問題を扱うようになった。

・立体の底面積と体積の関係の問題



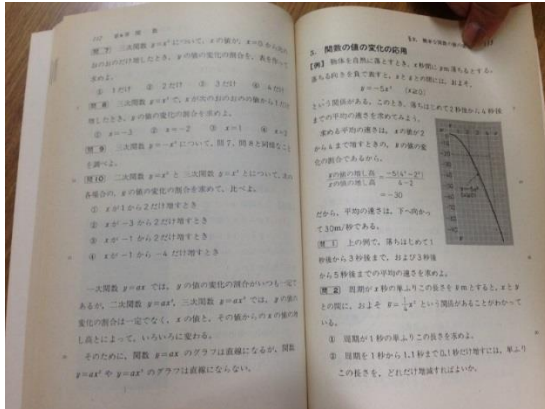
・自動車のスピードと空走距離、制動距離の関係の問題



3.5 大日本図書

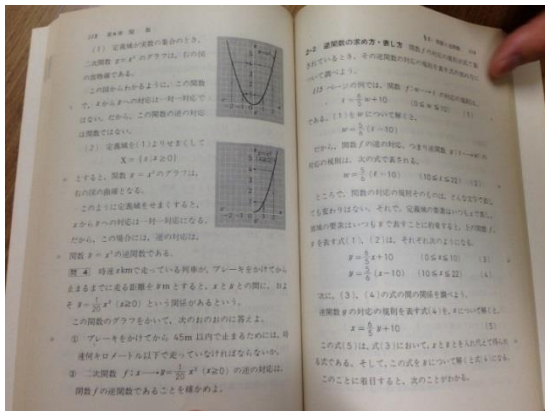
S49 発行

・物体が落下するときの時間と距離の関係の問題



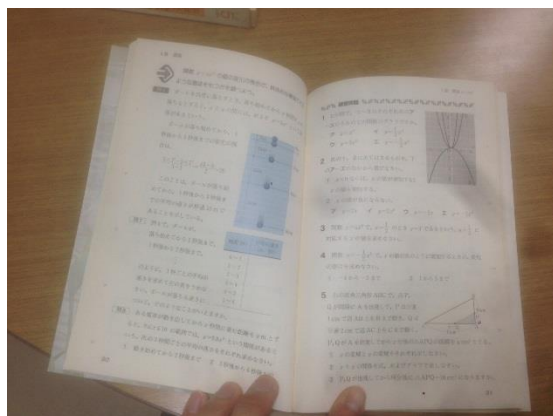
逆関数について触れているものの、具体的な事象を取り上げた問題はなかった。他社の教科書よりも図が少なく言葉での説明が中心となっている。

・列車がブレーキをかけてからの時間と距離
の関係の問題

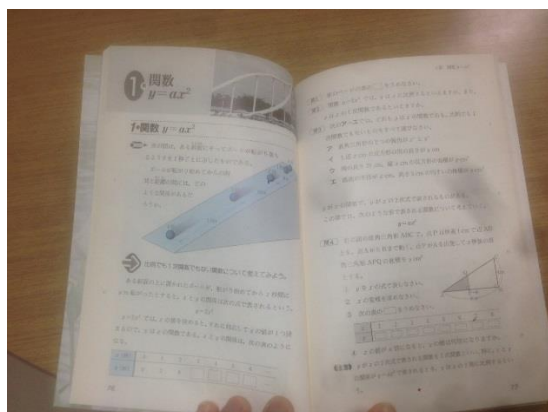


H4 発行

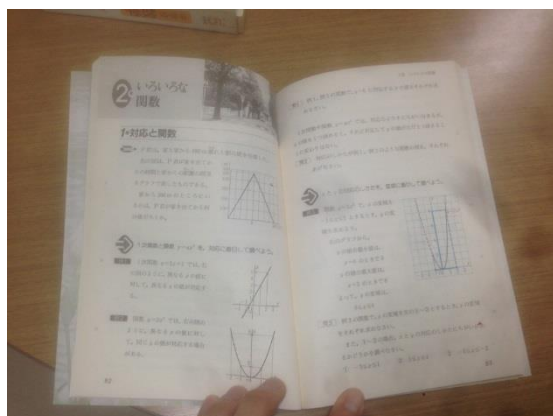
・物体の落下、斜面を転がるときの時間と距離の関係の問題



S49 年発行の教科書よりもページ量が少なくなりましたが、グラフ、図が増えていた。問題の量は大きく減少したわけではなかった。

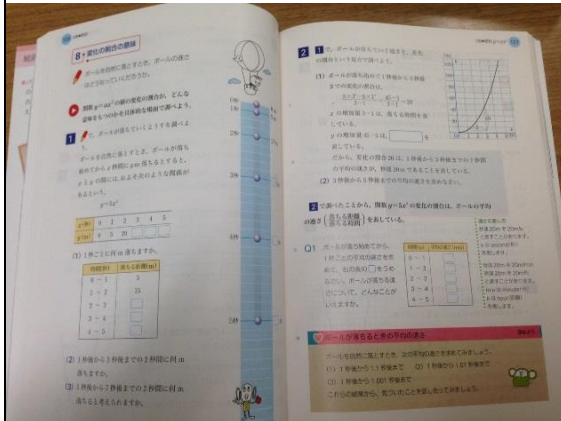


・人が歩いた時間と距離の関係の問題



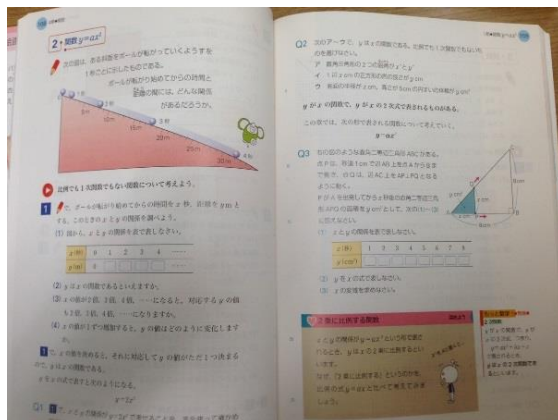
H24 発行

・物体の落下の距離と時間の関係の問題

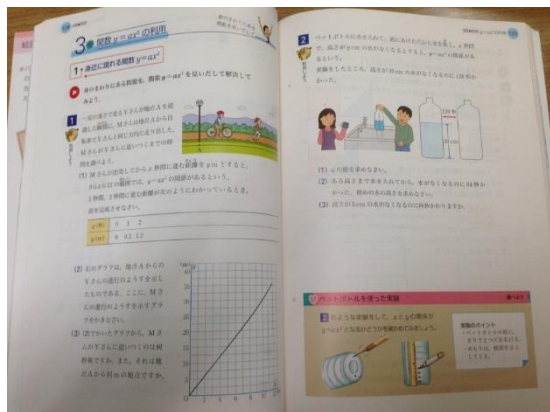


大きく問題の設定に変わりは無かったが、カラーになり生徒がイメージしやすいような図が多く盛り込まれているといった印象を受けた。

・物体が斜面を転がるときの時間と距離の関係の問題



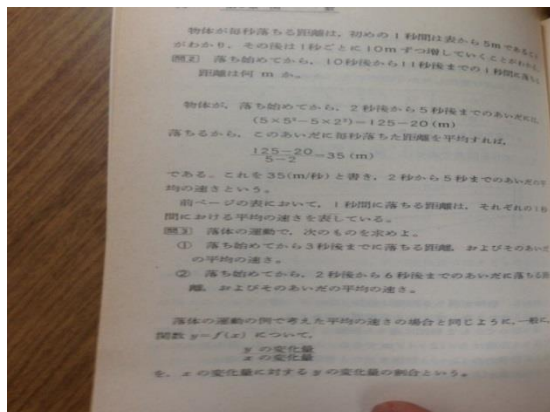
- ・走る人に自転車で追いかけて追いつくまでの時間の問題。
- ・ペットボトルに入っている水が底の穴から抜ける時間の問題



3.6 教育出版

S49 発行

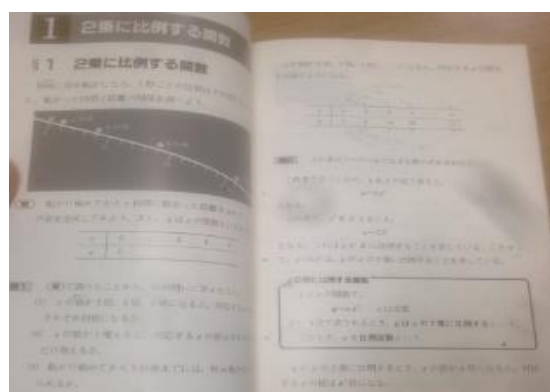
・物体の自由落下（図なし）



図がなく、字だけで説明されているためイメージが付きづらい。さらに、いきなり「これが2次関数」としてかけると断言されていて非常にわかりづらい。

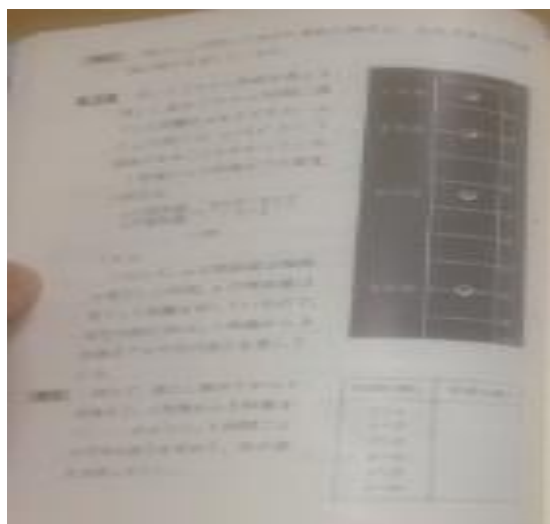
S55 発行

・斜面を転がるボール



S49 に対して、S55 では問題とその図を示している。さらに、値の変化がグラフでかかれていてとてもわかりやすい。

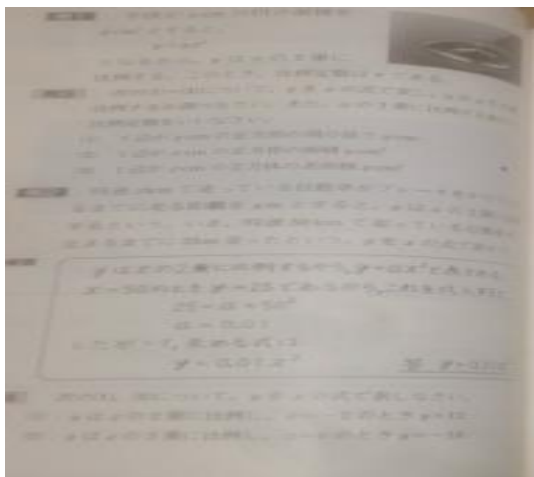
・物体の自由落下



図が用いられていてイメージはしやすいが、これは、「2次関数であらわされるので」とだけかかれていて、落下運動を使って2次関数を使用するのは取り組みにくい。

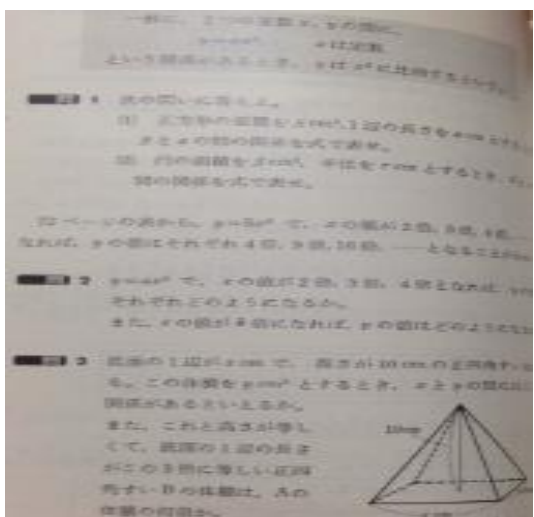
H4 発行

- ・円の面積
- ・自動車の制動距離



ここで初めて、ボールの運動以外を使った事象を用いての 2 次関数で表せる運動がでてきた。特に、円の問題はすでに習っているものなので、わかりやすい。

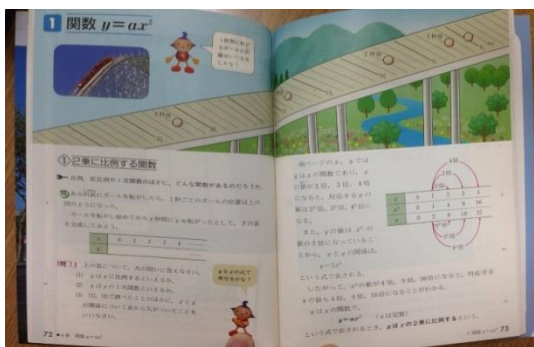
- ・正四角錐の面積



円に続き、活用では四角錐が扱われている。面積の計算は公式を使うことで解け、かつその式が 2 次関数に結びつく。しかし、それは円でやったものと変わらないのでここでは公式を利用させるような問題よりも違うものがよいと感じた。

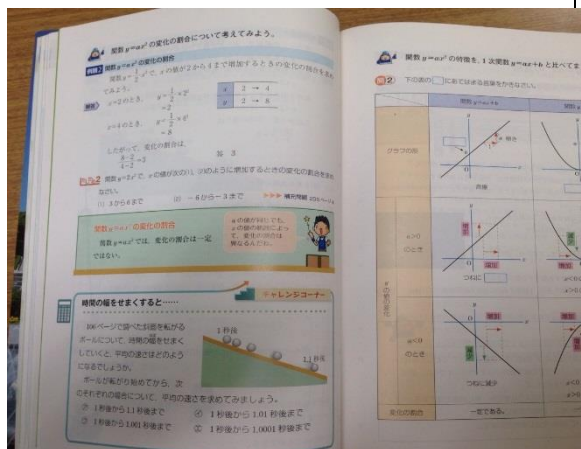
H14 発行

- ・斜面を転がるボール (カラー)



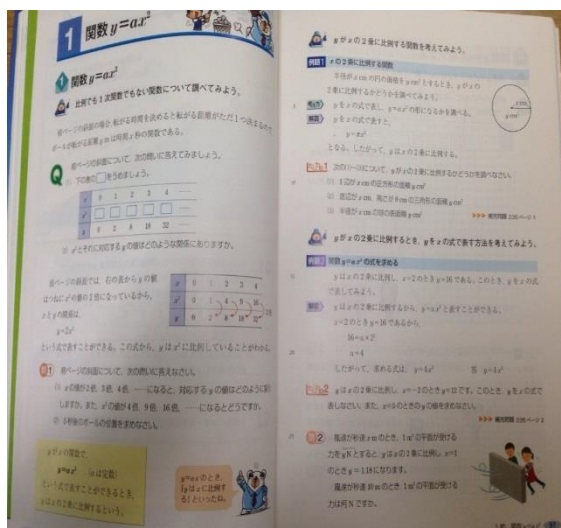
H4 との違いはまず、カラーになったこと。さらに三次元で見ることができるので、ボールが転がっているというのがよくわかる。そして、目ごとの距離と秒が絵に書き込まれているため、値の増減がどうなっているのかがとてもわかりやすい。

・一次関数と2次関数の特徴を比較



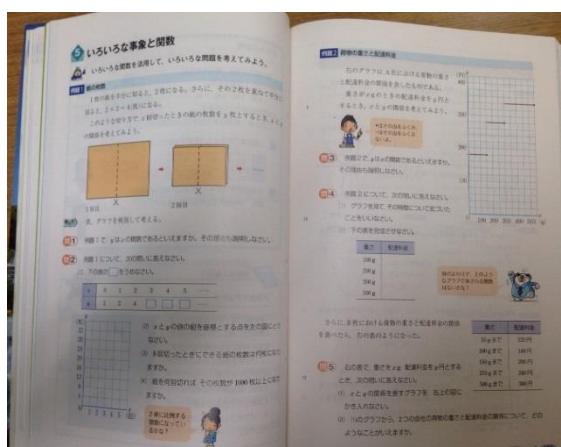
H24 発行

・斜面を転がるボール



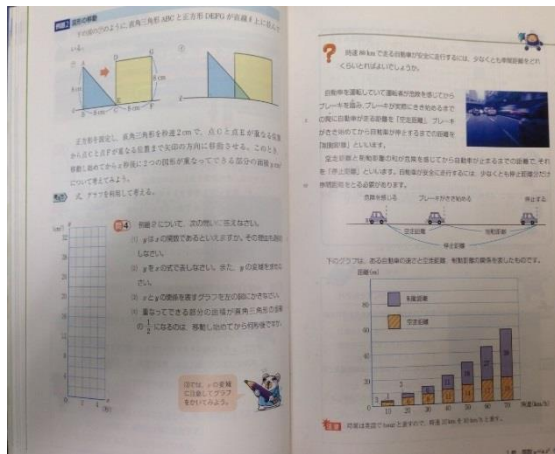
ここでいつもボールの問題が扱われ 2 次関数の導入が行われていたが、なくなり、値の表だけを使って説明されている。

・折り紙の面積変化

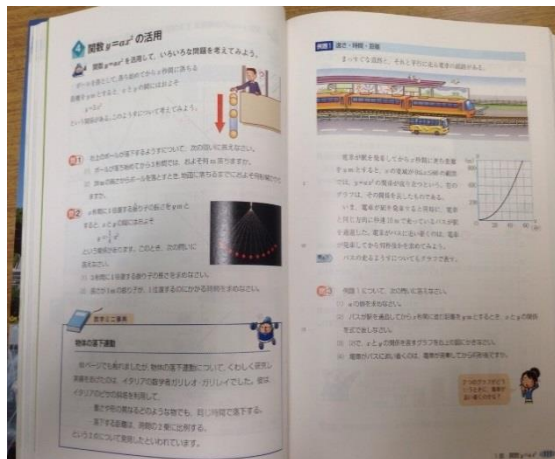


H24 では、活用の問題が多くさらに日常的また自分たちでも簡単にできるような実験的な問題が 3 問扱われていた。折り紙の問題は、実際に生徒にやらせて、実際の値を使って確かめて、2 次関数をいうものを利用できる。また、振り子や図形の問題は今まで習ったことのある公式を使いかつ、自分で図形の動きを考えながら解かなければいけないと、かなり活用的でとてもよいと感じた。

・三角形と四角形の重なり合った面積

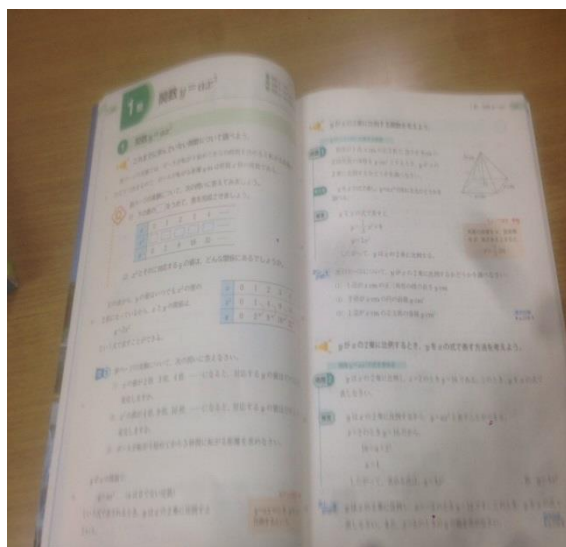


・物体の自由落下



H28 発行

・斜面を転がるボール

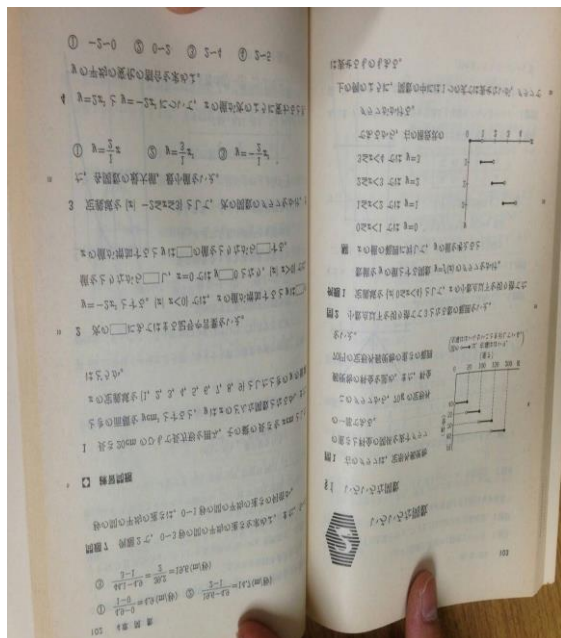


H24 との変化はほとんど見られない。

3.7 学校図書

S49 発行

・四角形の面積



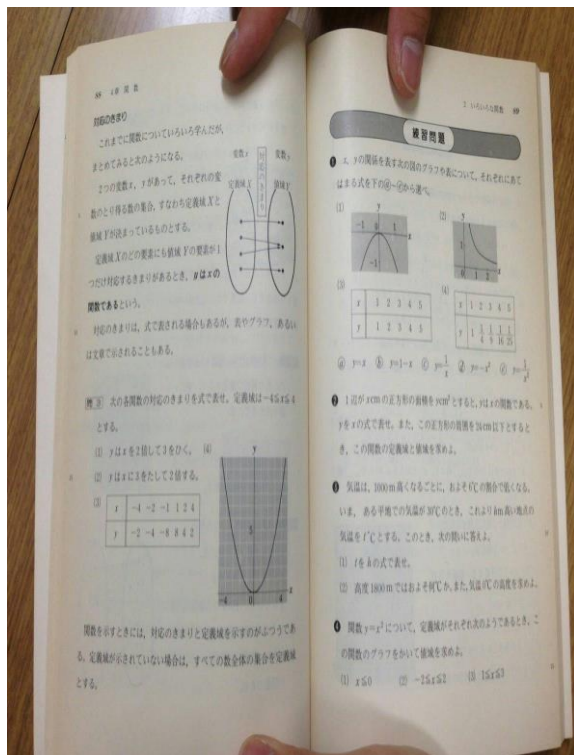
面積問題を多く扱っている。問題の図があり視覚的にわかりやすくしている問題が一部あった。

定義域の表現が「数を全部書き出す」表記になっている。

応用的な問題はなかった。

S55 発行

・気圧と温度の関係

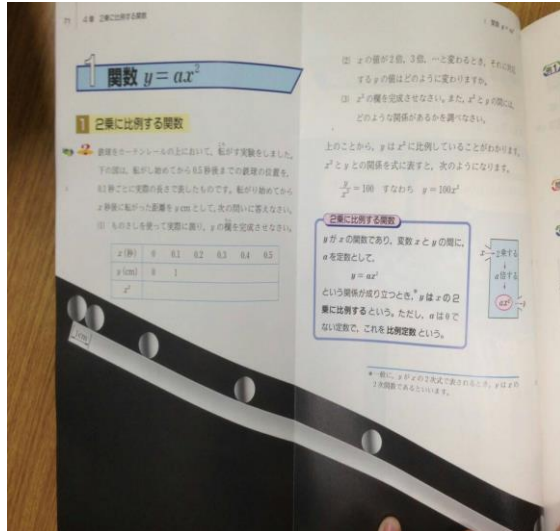


S 49 より実用的な問題の増加。

y を x の式で表してからグラフや応用に発展している。

H14 発行

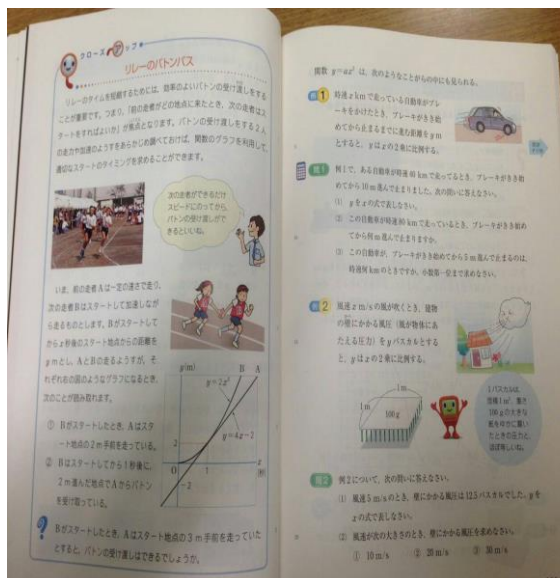
・斜面を転がるボール



実際に自分で実験などをするように教科書が実験を提示。
橋など放物線が見られるものも掲載。

H24 発行

・リレーのバトンパス ・自動車の制動距離 ・壁に当たる風圧



橋の放物線に加えパラボラアンテナも例にとっている。
実験要素も残っている。
また実際に身のまわりで起きる現象で2次関数をとるものの例を多様に上げている。

4.問題開発

<問題場面>

問題

レンズの形は図1のように放物線からできており、図2のようにレンズの焦点距離 f はレンズの形によって異なる。また、図3は $y = ax^2$ と f の関係を表したグラフである。
 レンズの縦の大きさを $2m$ として、 $f=100$ のときのレンズの厚みを求めよ。

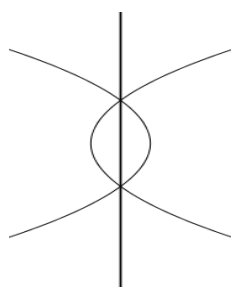


図1 2本の放物線からなるレンズ

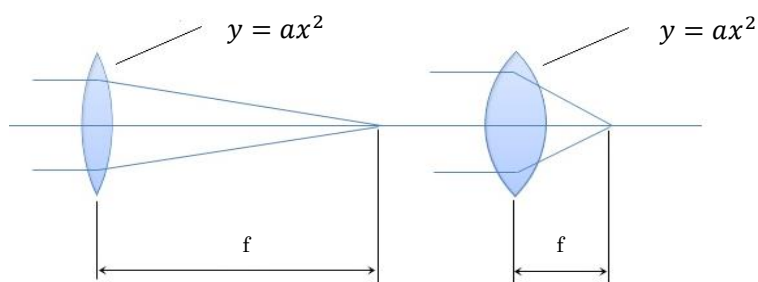


図2 レンズの厚みによる焦点距離の違い

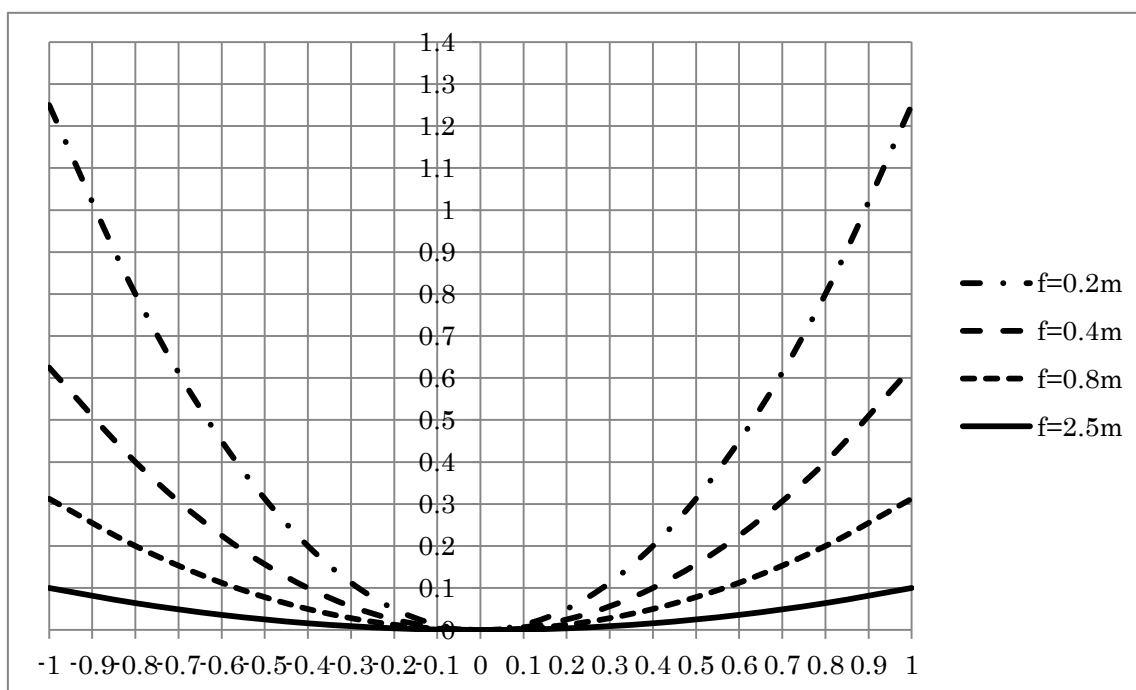


図3 $y = ax^2$ と f の関係

5 指導案

5.1 指導案作成の過程

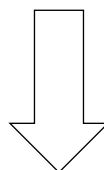
今回の指導案作成の過程は以下のとおりである。

5.1.1 第1回

<問題設定>

レンズの形は図1のように放物線からできており、図2のようにレンズの焦点距離 f はレンズの形によって異なる。また、図3は $y = ax^2$ と f の関係を表したグラフである。

レンズの縦の大きさを $2m$ として、 $f=100$ のときのレンズの厚みを求めよ。



期待する活動の設定

●期待する活動 A

- ・ a と f の表をうめて、 a と f の関係を知る。

図2のグラフよりそれぞれの a の値を求めさせ下記の表1のようにまとめる。

f	0.2	0.4	0.6
a			

表1 a と f の関係

●期待する活動 B

- ・ a と f の関係を求める。

表1より、 $a = \frac{c}{f}$ (c は定数)

●期待する活動 C

- ・ レンズの厚みを求める。

縦の長さは 2cm と与えられているので、図2がレンズの片方の部分をあらわしていることが分かる。

そこから、期待する活動 B で求めた $y = \frac{c}{f}x$ より、 $f=100, x=-1$ 又は $x=1$ を代入して、レンズの片方の厚みを求める。

5.1.2 第2回

期待する各活動に進むための支援をセリフの形式にして設定を行った。

[期待する活動 A への支援]

- ・グラフから読み取れる f ごとの a の値を求めてみよう。

[期待する活動 B への支援]

- ・今まで習った関係式にあてはめて式で表せないか考えてみよう。

[期待する活動 C への支援]

- ・活動 B で求めた a を $y = ax^2$ に代入して図 3 のような高さ 2 のグラフを描いてみよう。
- ・図 3 から厚みを求めるためにはどうしたらよいのだろうか？

5.1.3 第3回

練り上げのシナリオの作成をした。

表であたえる a の値を増やしかつ、グラフに表すときに格子点で交わるような a を設定することで反比例になることの予想を立てやすくした。



f	0.2	0.4	0.8	2.5
a	1.25	0.625	0.3125	0.1

5.2 作成した指導案

1. 単元名

「関数、資料の活用」

2. 単元の目標

- ・具体的な事象や場面の数量関係に関心を持ち、その考察に関数 $y = ax^2$ を用いて、問題解決しようとする。(数学に対する関心・意欲・態度)
- ・具体的な事象の中から二つの数量関係をとらえ、変化や対応について数理的にとらえ、見通しを持ち論理的に考察できる。(数学に対する見方や考え方)
- ・関数 $y = ax^2$ の表、式、グラフを用いて、具体的な事象を表現することができる。(数学の技能)
- ・具体的な事象の中で、関数 $y = ax^2$ の使い方を理解している。(数学に対する知識・理解)

3. 指導計画

- (1) 関数 $y = ax^2$ とグラフ[7 時間]
 - ・関数 $y = ax^2$ 3 時間
 - ・関数 $y = ax^2$ のグラフ 4 時間
- (2) 関数 $y = ax^2$ の値の変化[2 時間]
 - ・関数 $y = ax^2$ の値の増減と変域 1 時間
 - ・関数 $y = ax^2$ の変化の割合 2 時間
- (3) 関数 $y = ax^2$ の利用[2 時間]
 - ・身のまわりの関数 2 時間
- (4) 章末[2 時間]
 - ・基本の確かめ 1 時間
 - ・章末問題 1 時間

4. 本時の学習

- (1) 本時の目標
 - ・レンズの形が二次関数であることを活かし、解き方を考えることができる。(数学に対する見方や考え方)

(2) 本時の期待される数学的活動

A : 自分で表をつくる

B : 表から関係式を求める

C : 条件を整理して、正答を導く

(3) 準備

教師 : 板書用の図、座席表

生徒 : 教科書、ノート

(4) 本時の学習過程

☐ 期待される数学的活動

☐ 教師の支援

☐ 支援の意図

【問題の掲示】

みんな理科の授業で習ったレンズ覚えてる？

レンズの形をよく思い出してみよう！

(プリント配布)

図 1 のように実はレンズの形は 2 次関数なんだ！

レンズの性質はなにがあったかな？

レンズの厚みと焦点距離に特徴的な性質があったね。

図 2 を見てみよう。

レンズの厚みが変わると焦点距離も変わるね。

レンズの厚みが変わるとほかにレンズのどの部分に変化がみられるかな？

レンズの形を表す式を求めてみよう。

支 図 1~3 を順に説明しながら問題と求めることを理解させる。

図 1 を掲示してレンズが放物線の組み合わせで作られていることを説明する。

図 2 を掲示して焦点距離の大きさはレンズに用いられる放物線の形と関係することを説明し $y=ax^2$ と f に関係があることを言及する。

図 3 を掲示して「このグラフをもとに焦点距離が 100m でレンズの高さが 2 のとき厚さはどうなるだろう。」という問いを提示する。

意 図を用いて問題を説明することで、生徒が事象の関係(a と f)について考え、問題を解くために必要な情報を理解し、何をすべきか理解する。

「焦点距離とレンズの傾きにはなにか関係があるようだね。図 3 をもとに表にまとめてみよう。」

自力解決 A

図 3 から読み取れる f ごとの a の値を表 1 のようにまとめる。

(表 1)

f				
a				

(表 2)

f	0.2	0.4	0.8	2.5
a	1.25	0.625	0.3125	0.1

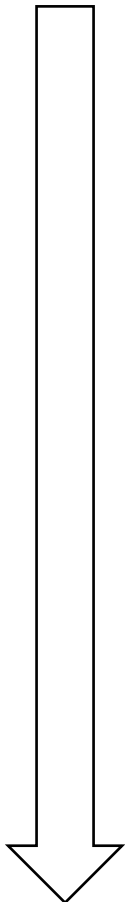
支(特殊)

今までに習った関係式に当てはめて式に表せないか考える

f	0.2	0.4	0.8	2.5
a	1.25	0.625	0.3125	0.1

支(一般)

求めた各点をグラフにまとめてみる

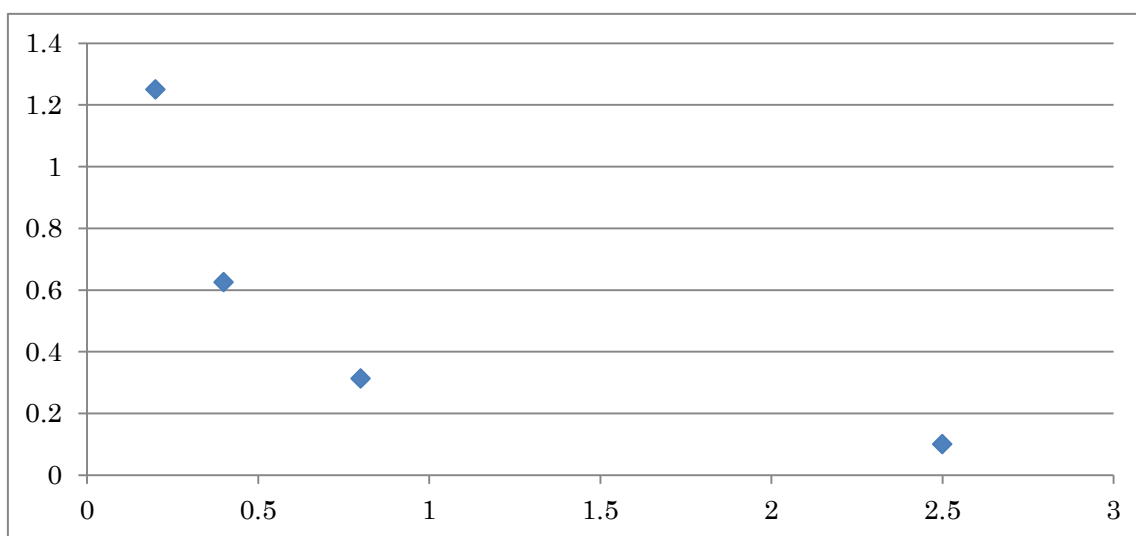


「表 1 の値から実際にグラフにしてみよう。」

自力解決 B

表 1 から $a=c/f$ という関係を求める。

表 1 をグラフにしてみる。



f	0.2	0.4	0.8	2.5
a	1.25	0.625	0.3125	0.1

「グラフの形から 1 次関数ではなさそうだ。このグラフは式でどうあらわされるかな？」

支(一般)

- これまでに習った関係を挙げてみる

比例?($a = (cf)$)

反比例?($a = c/f$)

二乗に比例?($a = cf^2$)

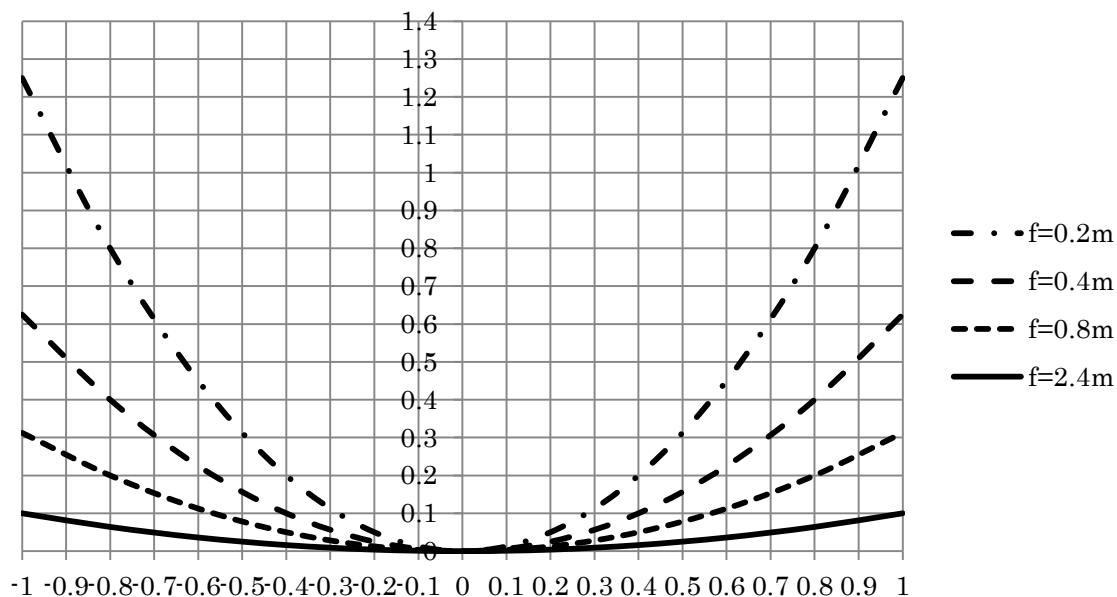
- 求めた a を使ってレンズの厚みを求めるにはどうしたらいいだろうか。

支(特殊)

- 図 3 の場合、レンズの厚みはどのように表されているだろうか。
 - 活動 B で求めた a を $y=ax^2$ に代入して、図 3 のように高さ 2 になるようにグラフをかいてみよう。
- レンズの厚みを求めるにはグラフのどこの値を求めると良いだろうか。

$f=100$ のときレンズの厚みはどのくらいになるだろうか?

自力解決 C



支 図 3 のグラフを見てどこがレンズの厚みなのか考えてみよう。

意 $x=1$ または $x=-1$ を代入して得た値を 2 倍したものがレンズの厚みであることに気づかせたい

活 かいいたグラフを横にしてみる。与えられている条件、レンズの高さ $2m$ からグラフの $x=1$ から $x=-1$ までの長さがレンズの高さ $2m$ にあたることに気づく。

どのレンズも高さ $2m$ になるところがレンズの厚みの半分になり、原点から $x=1$ または $x=-1$ のときの y の値までの長さを 2 倍したものがレンズの厚みになることに気づく。

支 ここで、 $f=100m$ のとき、レンズはどれだけの厚みが必要なのでしょう?

意 自らの力でレンズの厚みを考えさせたい。

活 支援 C で求めた $y=\frac{c}{f}x^2$ の式に条件より $f=100m$ 代入する。代入した式

に $x=1$ または $x=-1$ をさらに代入し、 $y=\frac{c}{100}$ を導く。

求めた値を 2 倍したものがレンズの厚みになるので、 $\frac{c}{100} \times 2 = \frac{c}{50}m$ 。

これがレンズの厚みである。

よって $f=100m$ のとき、レンズの厚みは $\frac{c}{50}m$ 必要であることがわかる。

集団による練り上げ

Teacher: 図 3 の $f=0.2$ のときのグラフに注目してみよう。

この関数は今までに習った関数のどれにあてははまるかな?

Student: $y=\bigcirc x^2$



活動 A

T: 図 3 から焦点距離が変わっていったときの傾き a を求めていこう。

表 1 に書いていこう。

S: 表 1 完成

活動 B $a=c/f$ を求める

T: 表 1 から a と f のグラフを書いてみよう

S: (グラフを作る)

T: これは比例のグラフではないようだね。なんのグラフだろう?

S: 反比例

T: 反比例はどんな式?

S: $y=a/x$

T: f と a を反比例の式にあてはめてみよう。

S: $a=c/f$

T: 2 次関数の傾き a 求められたね。代入してみよう。

S: $y=\frac{c}{f}x^2$

活動 C 厚みを求める

T: $f=100$ だから求めた式にいれてみるとどうなるかな?

S: $y=(c/100)x^2$

T: レンズの高さは図 3 のどこの部分だろうか?

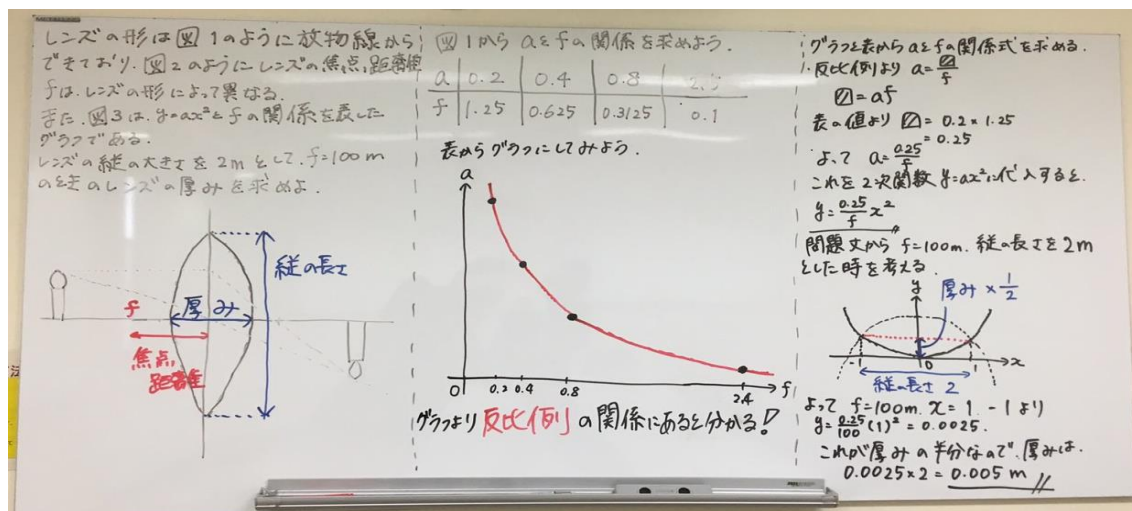
S: x 軸での長さが 2 になるところ。

T: では厚みはどこの部分にあたるだろうか?

S: $x=1$ のときの y の高さにあたるのか!

T: $f=100$ のときの厚みを求めてみよう!

板書計画



配布プリント

問題

レンズの形は図1のように放物線からできており、図2のようにレンズの焦点距離 f はレンズの形によって異なる。また、図3は $y = ax^2$ と f の関係を表したグラフである。レンズの縦の大きさを $2m$ として、 $f=100$ のときのレンズの厚みを求めよ。

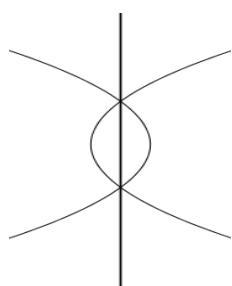


図1：2本の放物線から

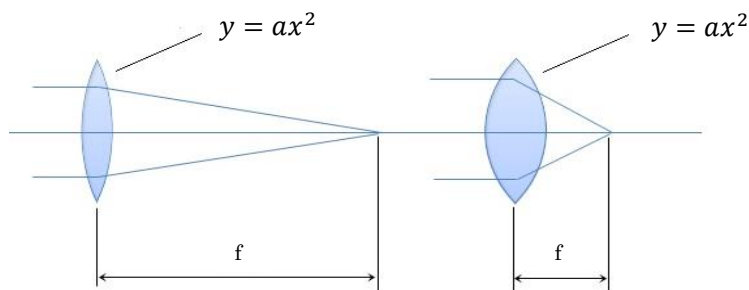
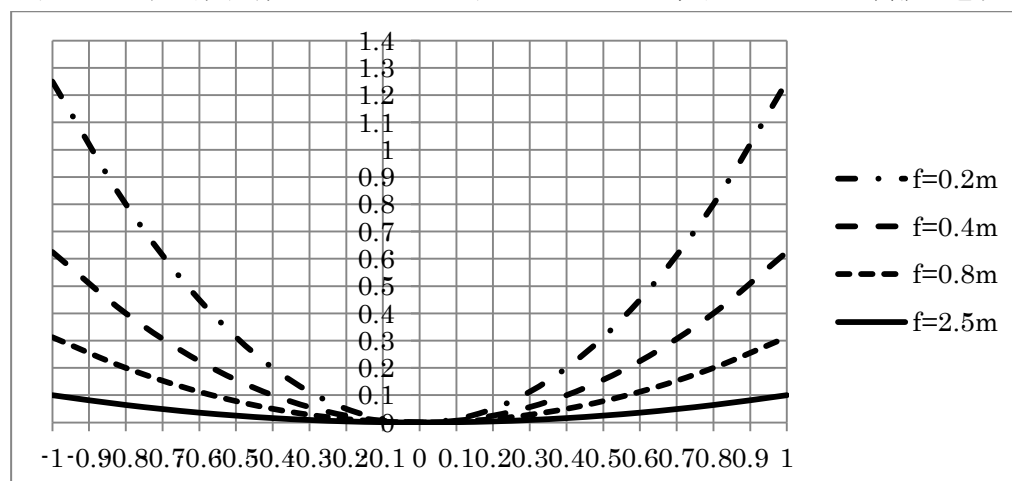


図2：レンズの厚みによる焦点距離の違うレンズ



6 感想

この講義を通して、実際の授業展開に何が必要なのか考えることができた。考えられる生徒の活動をいくつか考え、それに対応した支援を教師は準備し、授業を円滑に進めなければならない、また生徒がどの活動に着手し、どの程度理解しているのかということを教師が認知しなければならない。それを認知することによって教師はその授業での適切な練り上げを行うことができるのだと感じた。

また今回の授業で教材研究を行ったことにより教師、生徒の双方にとっての「よい教材」とは何かという事を考えることができた。今回2次関数の教材を研究することにより、2次関数における従来の問題は、教材開発者側からすると身近な事象であるものの、生徒の一般的な生活事象ではなく、それら(従来の問題)は「よい教材」、「よい問題」と呼べるのかという批判的な考えを持つことのできた良い機会となった。ほかの単元についても教材研究をすることにより、従来の教材が実際に生徒の理解を助長しているのか考える必要がある実感した。

東谷 新吾

この講義を通して、指導案作成には様々な広い知識が必要であることを学んだ。例えば、生徒に教えるとなった場合には、「どういった生徒に教えるのか」。それを探るには、生徒の持ちえている知識と今までどういった生徒であったのかの背景が必要になる。つまり、指導案を書くにあたっては、昔を振り返り考え、今と照らし合わせるということが必要不可欠であると感じた。また、単元だけの理解ではなく章全体で何を目的として教えるのかという理解も重要だと感じた。授業で取りあげられている問題には、何かしらの意図が必ずある。その問題はその章を理解するための過程であって、意図が全くないもの、例えば、「ただ複雑難解である問題」は必要ない。そうやって目標に応じた良い問題を作ることが必要だと感じた。そういった問題を作ること、そして章の目的を生徒に教えられるようにするため、これからもっと教科書の専門的知識と現場の理解が求められ、その準備が自分に十分でないとこの指導案作りで痛感した。

清水 祥真

今回の講義を通じて、教師、生徒の双方の立場に立って考えることの難しさと重要性を実感した。学習する内容が教師にとっては既知のものであっても、生徒にとっては当然未知のものであり、生徒にとってどこが難しい点なのか、その点を生徒にとってどう教わるのが分かりやすいのか、これらを生徒の立場に立って考えなければならない。

また、生徒が理解できるような問題文の作成や、生徒が思考したのちにどのような活動をするかを教師が掌握し、教師の期待する活動が表れるような授業の構成、多様な解き方に対応できる準備などを教師の立場に立って考えなければならない。またこの活動が授業設計や成績評価はもちろん、様々な点においてとても重要であると分かった。

最後に、今回教育実習を行う前に授業案を作成する機会を得ることができて、とても良い経験になった。

山本 隆広

今まで、指導要領や関連した資料を読む機会が今まで多くなかったため、授業についてだけでなく教育に関する歴史や傾向について知ることができ、さらに深く学ぶきっかけになったと感じている。

また、授業を設計する中で教師の発問や言葉 1 つの違いで、生徒の理解や考え方が大きく変わるということを認識し、改めて 1 時間の授業を設計する大変さを感じることができた。

山本 柊

数学学習指導設計の授業で改めて問題開発の難しさを体験しました。これまでの教科書でどういった問題が取り扱われているか、どういった意図や背景でその問題を取り上げているのか、またその問題のなかにはたくさんの思いやねらいが含まれおり、生徒が問題に直面したときにどういった反応、活動を行うであろうか、またそこから生徒にどう支援していくか、目指す数学的解決・理解までの練り上げなど、それらをふまえて自分たちの問題を作っていくことは難しくまたやりがいがありました。自分が数学の教員になるにあたりおもしろい授業をつくりたいと前々から思っていて、それは生徒が注目する興味を持つような話し方・教え方が重要になってくると思っていたが、問題開発の深みを知り、1 つの授業に向かうにあつたての問題開発こそ教師が陰で努力しなければならないと思った。

山本祥大