

数学学習指導設計

高校数学B

「ベクトル」

テーマ：ベクトル方程式

H2

安藤 大師
馬場 一輝
山崎祥太朗

目次

1. 単元設定と理由
2. 数学指導要領解説
3. 教科書の違い
4. 指導計画
5. 数学指導案
6. 個人の感想

1. 単元設定と理由

単元設定：ベクトル方程式

設定理由：算数、数学の世界においては分析、類推する能力が必要である。ベクトルを学ぶことによって、さまざまな図形の性質理解や具体的な事象を考察することができる。例えば、二つのベクトルの内積を学ぶことによってその二つのベクトルの及ぼす作用について考察できる。このことはベクトル学習を通して事象を分析、類推する能力を育むこととなる。さらにベクトル分野は数学学習だけにとどまらず物理学へ利用することができ、発展した学習への期待ができる。

2. 数学指導要領解説

- 数学学習指導要領の比較

昭和35、45、53年、平成元年、11年の学習指導要領を調べどのような相違点があるのか比較した結果表1のようになった。

	昭和35年	昭和45年	昭和53年	平成元年	平成11年
ベクトル	ⅡB、応用	I、一般	Ⅱ、代数	B	B
平面上のベクトル	ⅡB、応用	I、一般	Ⅱ、代数	B	B
ベクトルとその演算	ⅡB、応用	I、一般	Ⅱ、代数	B	B
ベクトルの内積	ⅡB、応用	ⅡB、応用	Ⅱ、代数	B	B
ベクトルの応用		ⅡB、応用	Ⅱ、代数	B	B
ベクトルと平面図形		ⅡB、応用	Ⅱ、代数	B	B
空間座標とベクトル	応用	ⅡB	代数	B	B
直線、平面、球面の方程式	応用	ⅡB	代数		

表1 内容比較

- 年度別比較結果

昭和35年からベクトルという単元が数学に加わってきた。この頃は、ベクトルの意味、ベクトルの加法と減法、実数による乗法、内積が数学ⅡB、応用という科目で勉強されていて、数学応用では空間座標とベクトル、平面、球面のベクトル方程式が含まれていた。この頃は、まだ、今に比べてみると内容がかなり少なかった。ベクトルは、数学ⅡBと応用に分けられていた。

昭和45年の学習指導要領の改定で行列とベクトルの単元から統一した単元目標を立てた。この統一した単元目標とは、いくつかの量の組を一つの数学的な対象として考察するということである。この年は、昭和35年に比べ、ベクトルの内容が増えた。昭和35年の内容に加えベクトルの成分表示やベクトルの有効直線表示への射影を学び、用語及び記号においても、単位ベクトル、零ベクトル、有効線分、成分、などが増えた。数学Ⅰ、一般で平面上のベクトル、ベクトルとその演算が学ばれ、内積からは、

数学ⅡBで勉強された。この年のベクトルの単元目標は、平面上でのベクトルの意味とベクトルの演算を学ぶことである。

昭和53年は、数学Ⅱと代数幾何に分けてベクトルを学習した。数学Ⅱ、代数幾何では、ベクトルの意味からベクトルと平面図形までが勉強された。空間座標とベクトルからは代数の科目のみで勉強されている。代数幾何では、数学Ⅱの内容をさらに発展させた内容に入っていく。

目標は、平面図形をベクトルを用いて理解し、活用する能力を養い、空間図形の理解を深めるというこれまでに比べより発展的な目標が示されている。

平成元年には、数学A,B,Cという科目ができて、ベクトルは数学Bの単元として加えられた。学習内容は、平面図形と空間図形におけるベクトルの利用の仕方を学んだ。具体的には、ベクトルの演算、内積、座標を学んだ。この年からベクトル方程式の内容は昭和53年に比べ簡単な内容になった。

平成10年の学習指導要領は、平成1年の学習内容と変化はない。ただ、平成10年での目標は、ベクトルの基礎的な概念を学び、図形の性質や関係をベクトルを用いて表現し考察するというものに変更された。

3. 教科書の違い

前章で調べた数学学習指導要領を年度別に比較したものをさらに掘り下げた。年代ごとの教科書について主に東京書籍、啓林館、数研出版の三社を見比べて相違点、類似点についてまとめた。

● 比較結果

昭和 41 年 東京書籍

- 「ベクトルの座標」という範囲の中で平面ベクトル、空間ベクトルが含まれている
- 発展の内容では空間ベクトルについての内容が含まれている

昭和 44 年 数研出版

- 「位置ベクトル」の範囲がベクトルの成分表示形式を学ぶ前に導入されている
- ベクトルの計算時に座標を使っていない
- 内積の表記が一つ多い $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$

昭和 48 年 啓林館

- 1つの章の中でベクトルと行列が含まれていたがこの年の啓林館ではベクトルだけの章があった
- 行列の中でベクトルの内容が少しあった（列ベクトル）
- 空間ベクトルが内積を学ぶ前に導入されている
- 球面のベクトル方程式がこの年では導入されている

昭和 51 年 東京書籍

- ベクトル方程式を学ぶ際の導入として位置ベクトルを学ぶようになっていた

昭和 53 年 啓林館

- 内積を学ぶ順番が空間ベクトルをまなぶより先になった
- 内分・外分の内容が基本的なものではなくなっていた（今までは内分・外分の内容が基本的な部分から学んでいた）

それ以降

学ぶ順番はベクトルの性質→成分→位置ベクトル→内積→ベクトル方程式という風に学び、平面について一通り学んだあとに空間ベクトルとして三次元に拡張して性質から学ぶという形になっていた

4. 指導計画

● 指導計画

第一次 平面ベクトル・・・・・・・・・・ (六時間)

- 第一時 ベクトルの意味
- 第二時 ベクトルの演算①
- 第三時 ベクトルの演算②
- 第四時 ベクトルの成分表示
- 第五時 ベクトルの内積①
- 第六時 ベクトルの内積②

第二次 ベクトル応用・・・・・・・・・・ (七時間)

- 第一時 位置ベクトル①
- 第二時 位置ベクトル②
- 第三時 ベクトルの直線表示①
- 第四時 ベクトルの直線表示②
- 第五時 ベクトル方程式①
- 第六時 ベクトル方程式②・・・・・・・・ (本時)
- 第七時 ベクトル方程式③

4. 数学指導案

● 本時の目標

- 与えられた、問題の条件からベクトル方程式を導く
- ベクトル方程式を関数化して、問題の軌跡を理解する。

● 生徒に期待する活動

- A 与えられた条件を図に描いてみる。
- B 自分の作ったベクトル方程式から軌跡の関数が表せるか吟味する。
- C ベクトル方程式から関数を導き、どのような軌跡になるかを確認する。

● 本時の学習過程

(問題提示)

点 F (0, 1) と $y=-1$ がある。任意の点 P(x, y) から $y=-1$ に引いた垂線を PH とし、PH と FP は常に成り立つとする。この時、原点から点 P のベクトルを \vec{P} 、原点から点 F までのベクトルを \vec{F} とし、ベクトル方程式を導け。また、そのベクトル方程式を関数化し、点 P の軌跡を示せ。

期待する活動 A

条件に合う、ように点 P、点 F、直線 $y=1$ を図に書いていく。 $|PH|=|PF|$ を \vec{p} と \vec{f} を用いるとどのように表せるかを考える。

支援 (特殊)

$|PF|$ を \vec{p} と \vec{f} を用いて表せない子供たちに、 $|\vec{PF}|$ を \vec{p} と \vec{f} を用いてどのように表せるかを考えてもらい、 $|PF|$ と $|\vec{PF}|$ の関係を考えてもらう。

支援 (一般)

$|PH|$ を \vec{p} と \vec{f} を用いてどのように表すかを考えてみましょう。

支援 (特殊)

$y=1$ から x 軸までの距離は、1 なので点 P から x 軸までの長さを \vec{p} または \vec{f} 、もしくは、 \vec{p} と \vec{f} を用いてどのようにすれば表せるか考えてみよう。

期待する活動 B

ベクトル方程式をどのようにすれば組み立てられるかを考える。そのベクトル

方程式から求めたい軌跡の関数が導き出せるかどうか吟味する。

支援（特殊）

y 軸と \vec{p} のなす角を θ とすると点 P から x 軸までの長さは、どのようにすれば表せるだろうか。

支援（一般）

ベクトルの大きさと $\cos \theta$ の関係にどのような工夫を加えると \vec{p} と \vec{f} の式で表せるだろうか？

支援（特殊）

では、p 点と x 軸を結ぶ垂線の式 ($|\vec{p}| \cos \theta$) に $|\vec{f}|$ をかけて、 $|\vec{p}| \cos \theta = |\vec{f}| |\vec{p}| \cos \theta$ になるかどうか考えてみよう。

期待する活動 C

$|\vec{f}| |\vec{p}| \cos \theta$ から $\vec{p} \cdot \vec{f}$ を導き、ベクトル方程式を組み立て、求めたい軌跡の関数を導く。

支援（特殊）

$\vec{p} \cdot \vec{f}$ が、導き出せない子には $|\vec{f}| |\vec{p}| \cos \theta$ がベクトルのどこの単元で出てきた公式か、考えてもらう。

支援（特殊 2）

関数が導き出せない子には、 \vec{p} 、 \vec{f} の成分を考え計算してもらう。

● 練り上げ

(活動 A) (5 分)

T:このような問題があります。まず、与えられた問題の中に含まれる条件を羅列し図に起こしてみよう

S:(与えられた問題の条件を図に起こしていく。)

T:与えられた条件は何でしょう？

S:(条件を黒板に書く)(5分)

T: \overrightarrow{PF} を \vec{p} と \vec{f} を用いるとどのように表せるだろうか？ また、 $|PH|$ を \vec{p} と \vec{f} を用いてどのように表すかを考えてみよう。

S: $|PH|$ をどう表していけばよいかわかりません。

T:X軸から $y=-1$ までの距離が1なので、点Pからx軸までの距離を \vec{p} と \vec{f} で表せないだろうか？

(活動)B(15分程度)

S:座標を用いて計算できるかも・・・

S:新しいベクトルを使えばなんとかなる？

S:先生！座標を用いて計算すると軌跡が出せました。これでいいですか？

T:正解です、素晴らしい！ですが、題意を考えると一致しませんね。また、新しくベクトルを導入したときベクトル方程式は求まりますが、そのベクトルは問題文で定義されていません。この問題の題意として軌跡を求める前に、ベクトル方程式を導き出さないといけません。だから、点Pからx軸までの距離を \vec{p} と \vec{f} で表すにはどうすればよいでしょう？

S:ん～点Pからx軸までの距離は \vec{p} だけだと求まるのだけど・・・

S:どういうこと？

T:よいところに気が付きましたね。

T:y軸と \vec{p} のなす角を θ とすると、点Pからx軸までの距離が表せないでしょうか？

S:あ、なるほど！点Pからx軸までの距離をPQとしたとき $|\vec{p}|\cos\theta=PQ$ となりますね！

T:はい、よくできました。ですが、これでは \vec{f} を使っていないことになります。では、みんなが作ったベクトル方程式の $|\vec{p}|\cos\theta=PQ$ に注目してみましょう。これに、 $|\vec{f}|$ をかけた時、 $|\vec{f}||\vec{p}|\cos\theta=PQ$ が成り立つか考えてみましょう。

S: $|\vec{f}|$ は1だから $|\vec{p}|\cos\theta=PQ$ となるので $|\vec{f}||\vec{p}|\cos\theta=PQ$ は成り立ちます。

(活動)C(20分程度)

S: $|\vec{f}||\vec{p}|\cos\theta$ 、この形どっかでみたことあるような・・・

S:初めて見た気がするのは僕だけ？・・・

S:あ、わかった！ベクトル方程式は $|\overrightarrow{PF}|=\vec{p}\cdot\vec{f}+1$ で軌跡の関数は $y=\frac{1}{4}x^2$ だ！

T:素晴らしい！まず、 $|\vec{f}||\vec{p}|\cos\theta$ に注目して、これが当てはまる公式を考えてみましょう。

S:もしかして内積の公式ですか?

T:その通り! $\vec{p} \cdot \vec{f} = |\vec{f}| |\vec{p}| \cos \theta$ はベクトルの単元に登場する公式の1つです。

S:でも、そのベクトル方程式からどうすれば軌跡が求まるのだろう?

T:考え方は簡単!軌跡ということはある関数を意味することは分かりますね。
この場合変数は x 、 y であるので求めたい軌跡は x と y で表せます。つまり求めたベクトル方程式の成分を計算してやると軌跡が求まるのです。

S:なるほど!つまり、 $|\overline{PF}| = \vec{p} \cdot \vec{f} + 1$ は成分を用いて表すと $y = \frac{1}{4}x^2$ となる!

軌跡は $y = \frac{1}{4}x^2$ だ!

6. 個人の感想

安藤大師

今回単元は「ベクトル」であった。「ベクトル」は、高校数学において重要な分野の1つである。また「ベクトル」は、大きさの他に方向も持つということで今までにない概念を学び、今後の高等数学の基盤となるのでこの単元を選んだ。講義では、数学学習指導要領から入り、「ベクトル」が数学教育の歴史の中でどのような変遷を辿り、進化したのか知ることができた。授業設計を行う中で重要だと実感したことは生徒のその授業での進行度合いを重視することである。教師の発信した情報を芯まで生徒に染み渡らせる必要があると考える。

今回の講義で、授業設計の重要性を学ぶことができた。今後の実習にこのような経験を生かしていきたいと考える。

馬場一輝

今回の指導設計で、数学の授業を作っていく為の知識を学びました。また、実際に自分たちで授業を作る準備をする経験が出来ました。実際に指導案を考えていくには、生徒に何を考えてもらいたいのか、どんな力をつけたいのかを考え、過不足の無い支援をするのが難しく、正直期待通りの結果を得るには、まだ足りない部分が多い気がします。今回の授業で得た知識と経験が、教育実習でどのように役立つのかを実際感じたいと思います。

山崎祥太郎

学習指導設計の授業では授業の一時間の重みを感じました。今までは授業は受けるものであって、つくるものではなかったので立場が逆転したこの授業は一時間ごとが初体験で難しかったです。一番感じたことはやはり授業は生徒がつくっていくものであり教師は題材と少しの支援をしてあげることでした。生徒の意見を引き出して展開して次の段階につなげ、生徒につけたい力をつけさせるようにすることが大切だと思いました。