

2008（平成 20）年度数学学習指導設計

E 班

「微分法とその応用」

テーマ：漸近線に着目したグラフの分析

岡本 壮平

寺田 雄一

松尾 啓吾

正井 宏明

1. 単元設定の理由	1
2. 微分法の歴史.....	2
2.1 微分の起源	2
2.2 歴史上の数学者の研究.....	3
2.3. 現代数学と高校数学の比較	5
3. 教材研究.....	6
3.1 学習指導要領について.....	6
3.2. 教科書比較	8
3.3. 漸近線の教科書での取り扱い.....	9
3.4 漸近線の種類.....	10
4. 授業設計	12
4.1. テーマとねらい	12
4.2 授業構成	13
4.3 授業の問題場面の試行錯誤	13
5. 本時の学習計画	15
5.1 本時のねらい.....	15
5.2 本時の期待される数学的活動の様相	15
5.3 本時の問題場面	15
5.4 本時の展開	16
6. 振り返り	21
6.1 班全体の評価.....	21
6.2 各班員の評価.....	21

参考文献

1. 単元設定の理由

E 班は、高等学校数学 の範囲を担当することとなった。今回私達が単元設定を行う際に、まず自分達が高校生の時にどのような場面で苦労したか、というところであった。その中で、導関数の応用の分野について引っかけた班員がいたので、本指導案では数学 の単元の「微分法の応用」について取り扱うこととした。

また、「微分法の応用」について調べるにあたりひとつの疑問を抱いた。それは、微分法の応用の分野の中で、関数のグラフの概形の単元において、今現在、私達が当然のように考えている漸近線についての取り扱いが不十分であるのではないかということである。

それは、漸近線については深く教えられていなかった事実を知る結果となり、班員で話し合った中でも問題点として挙げられた。

そこで、私達は漸近線について「漸近線はなぜ重要なのか?」という視点から考えた。その結果「漸近線を知ることで、よりグラフの概形に関して吟味・分析することが出来る。」という考えに行き着き、この「微分法の応用」の関数のグラフの概形の単元について指導案を考えていくこととした。

2. 微分法の歴史

2.1 微分の起源

微積分の歴史を遡り見ていくと、ギリシャ数学においてエウドクソス、アルキメデスに始まる。しかし、この時代においては「無限の概念」が使われておらず、また「幾何学」的な数学であった。

その後、ルネサンスの時代になると、ギリシャで生まれた数学が北ヨーロッパに渡り、無限小解析の研究が行われるようになる。この研究は、極限の思想は明確には現れていないが、本質的に無限小の解析を行うというものであり、ケプラーは天体力学におけるケプラーの法則の面積速度一定の証明、また酒樽の体積測定にこの無限小解析を用いている。

17世紀後半になればニュートン、ライプニッツによる無限小解析の最盛期になる。ニュートンはガリレオ、ケプラーの後を受けて、天体力学の問題（地球がなぜ、太陽のまわりの安定軌道をもちうるか）の解決を目指し「万有引力」の発見という物理学史上最高の業績をあげるのに絶対必要な微積分の計算法を「流率」の形で捉えている。また、ライプニッツもニュートンと同様にデカルト、パスカルの影響を受けて、幾何学的色彩の強い「微積分の発見」を行っている。ライプニッツは従来の無限小解析の計算法に記号（例えば dx , dy , $\int u \cdot du$ など）を導入し、計算力を大幅に増進させた。これにより「微積分」という学問が、一般の人々に近づきやすく、使い勝手のよいものとした。ニュートンは運動 $(x(t), y(t))$ に対し、流率 \dot{x} , \dot{y} を考え、 y の x に関する微分 \dot{y}/\dot{x} として得たことに対し、ライプニッツは、無限小の量としての微分 dx , dy を使って研究を行っているため二人は全く別の道から微分法の概念に到達したと言うことになる。

ニュートンの方がライプニッツより数年早く微積分の理論に到達したが、発表は逆にライプニッツの方が数年早かったので、どちらが先ということで長年に渡った論争が続いた。そのため、ニュートンのいたイギリスの数学会は、ヨーロッパ大陸から孤立してしまい、また、ライプニッツ学派はベルヌーイ兄弟のヤコブとヨハンなど優秀な人材に恵まれていたこと、そしてライプニッツが非常に気をつけて、使い良い記号を選んだことと相俟って、ヨーロッパでは、ライプニッツ学派が大きな影響力をもった。

しかし、ニュートンもライプニッツも極限の思想は明確ではなく微積分の根底となるものではあるが、現在でいう差分の考え方に近いものであった。

19世紀になるとそれまでの幾何学的解析から、図形にとらわれない微積分を建設しようとしてコーシーが無限小の概念を明確化し、さらに連続の概念も定義した上で、この関数に導関数と名を与え、さらにはっきりと極限（または極限值）を導入し、厳密に微積分の再構築を行った。

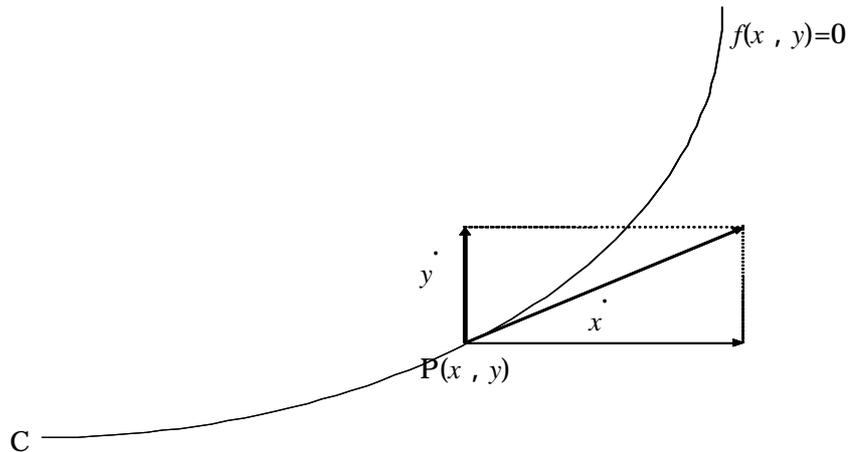
2.2 歴史上の数学者の研究

歴史上の数学者達は様々な方向から微分概念を取り入れ、研究を行ってきた。体系的な数学としての微積分は無限小解析の概念より起こり、ニュートンとライプニッツに始め、テイラーやベルヌーイ兄弟、ヤコブ、ヨハンなどに続く。その後コーシーの手によって無限小の概念が明確化されるまで多くの研究が行われている。その中からニュートン、コーシーの研究について以下に述べる。

2.2.1 ニュートンの研究

流率法

一般に $f(x, y)=0$ で表される曲線上の点 $P(x, y)$ を動点と考え、その動点 P の運動として曲線が生まれてくると考えた。デカルト幾何学の影響で、水平方向に動く運動 $x=x(t)$ 、垂直方向に動く運動 $y=y(t)$ の合成運動として捉えている。接線ベクトルは図に示すように、水平方向の運動を表す速度ベクトルを \dot{x} と垂直方向の運動を表す速度ベクトル \dot{y} との合成として捉えている。現代的に書けば x, y を流量 (fluens) および \dot{x}, \dot{y} を流率 (fluxion) と呼んでいる。



そして接線の勾配としては、

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$$

として、求めている。そして任意に与えられた曲線 $f(x, y)=0$ について、勾配 \dot{y}/\dot{x} を求めるときは陰関数の微分、

$$\dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \text{ すなわち, } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

に相当する計算を行っている。

2.2.2. コーシーの研究

コーシーはライプニッツ以来、「 dx は極めて小さい固定された量」と表されていたものを、「 dx は変数を表し、0 にかほどにでも近づく変量である」と定義し、無限小の概念を明確にした。また連続の概念を次のように定義した。

『いま、 $f(x)$ が与えられ、 $f(x)$ は x と共に変化するものとする。次に x とは別に無限に小さい、変化する量 α があたえられ、次の 2 つの量の差

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

が、 α が無限に 0 に近づくとき、いかほどでも小さくなるならば、「 $f(x)$ は連続である」という。』

次に導関数の定義であるが、 $y=f(x)$ があたえられたとき、 $f(x)$ は無限小 dx 、 dy の変化の比として、すなわち $dy=f'(x)dx$ として従来定義されているが、コーシーは「無限小の比の極限」として次のように定義している。

『 $f(x)$ が連続であるとする。 x が無限小の増分 i だけ変化して $x+i$ となったとき、 $f(x)$ の増分 $f(x+i)-f(x)$ もまた無限に小さい（無限小）。この増分を $\Delta y (=f(x+i)-f(x))$ と記し、 $x=i$ と記すとき、増分 Δx 、 Δy の比、すなわち

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

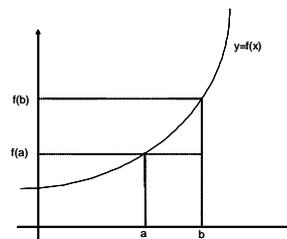
について考える。 Δx 、 Δy が 0 に近づくとき、この比は一般には 0 ではない他の極限值に近づく。その極限值は正のこともあれば、負のこともある。 x が変化するとき、この極限值も x と共に変化し、新たな x の関数が生まれてくる。この関数に導関数と名前をあたえることとし、記号 y' または $f'(x)$ を用いて表すこととする。』

これまでは極限の概念を使わずに、代数的に無限小解析を建設しようとしたが、コーシーは、はっきりと極限（あるいは極限值）を「変数がかほどにでも近づく量」として導入している。

2.3. 現代数学と高校数学の比較

現代の数学（大学で学習している数学）と高校数学の違いについて比較する．以下にそれぞれの数学で用いている導関数の定義について述べる．

<p>高校数学</p>	<ul style="list-style-type: none"> 図に示すように a, b を定め平均変化率を $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ とする．ここで $b = a + h$ と置くと $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ となり，h を 0 に近づけると以下の式になる． $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ このとき，$f'(a)$ は微分係数という． ここで a を x と置き換えたものを導関数という． 但し，関数は連続であるものとして扱う．
<p>現代数学</p>	<ul style="list-style-type: none"> D を定義域にもつ関数 $f(x)$ を考える．D 内の点 ξ において極限 $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = A$ が存在するとき，$f(x)$ は $x = \xi$ において微分可能であるという． また A を $f(x)$ の ξ における微分係数といい，$f'(\xi) = A$ と表す． 極限をとるとき右もしくは左極限のみを考えた場合には，それぞれ右微分係数 $f'_+(\xi)$，左微分係数 $f'_-(\xi)$ という． $f'_+(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi+0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \quad f'_-(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi-0} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ 定義域の境界点における関数の極限は，その関数の定義域の内側から近づくから，特に $D = [a, b]$ の場合の $x = a$ における微分係数は実際は右微分係数であり，$x = b$ における微分係数は左微分係数である． もし $f(x)$ が定義域 D のすべての点で微分可能ならば，$f(x)$ は (D 上) 微分可能な関数であるという． 現代数学では，関数の連続性より調べる必要がある．



3. 教材研究

3.1 学習指導要領について

平成元年度改訂版，平成 11 年度改訂版の 2 つの数学学習指導要領について，数学科目標，数学 目標，微分法の内容について以下に示す．

3.1.1. 平成元年改訂版

・数学科目標

数学における基本的な観念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを認識，それらを積極的に活用する態度を育てる．

・数学 目標

関数と極限，微分法及び積分法について理解を深め，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばす．

・微分法の内容

ア 導関数

(ア) 関数の和・差・積・商の導関数

(イ) 合成関数の導関数

(ウ) 三角関数・指数関数・対数関数の導関数

イ 導関数の応用

接線，関数値の増減，速度，加速度

[用語・記号] 弧度法，自然対数， e ，第二次導関数，変曲点

3.1.2. 平成 11 年改訂版

・数学科目標

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる．

・数学 目標

極限，微分法及び積分法についての理解を深め，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，それらを積極的に活用する態度を育てる．

・微分法の内容

いろいろな関数についての微分法を理解し，それを用いて関数値の増減やグラフの凹凸などを考察し，微分法の有用性を認識するとともに，具体的な事象の考察に活用できるようにする．

ア 導関数

(ア) 関数の和・差・積・商の導関数

(イ) 合成関数の導関数

(ウ) 三角関数・指数関数・対数関数の導関数

イ 導関数の応用

接線，関数値の増減，速度，加速度

[用語・記号] 自然対数， e ，第二次導関数，変曲点

(変更に伴う変化)

平成元年から平成 11 年へ改正されたこととしては，数学 3 の内容は，「用語・記号」で弧度法が数学 2 に変わったぐらいで大まかな内容は変わっていないが，数学 3 の目標の内容が，「それら(事象を数学的に考察し処理する能力)を積極的に活用する態度を育てる」という文章が付け加えられている．これは，今までは数学的に考察し処理する能力を伸ばすだけで良かったのだが，伸ばすだけでなくその能力を積極的に活用できるようになることが求められているから付け加えられたのだと考える．

3.2. 教科書比較

今回，東京書籍，啓林館，数研出版，第一学習社，文英堂，実教出版の 6 社の教科書を対象として微分法の単元についての教科書比較を行った．その結果を表 1 に示す．

表 1 教科書比較

	東京書籍	啓林館	数研出版	第一学習社	文英堂	実教出版
微分係数						
導関数						
三角，指数，						
対数関数の導関数						
接線の方程式						
平均値の定理						
関数の増減						
極大・極小						
グラフの凹凸						
速度・加速度						
近似式						
媒介変数表示						
漸近線						

：取り扱われている

：例題の一部で取り扱われている

この結果，漸近線以外の項目については全ての教科書で確認することができた．しかし，漸近線については，例題の一部で取り上げられるだけのものが多く，第一学習社のみでその求め方などについても言及されていた．ここから，現在の学習指導要領では微分法の範囲では漸近線について，そこまで注目されていないことがわかる．

ここで，漸近線について最初に学習するところは関数の分数関数の単元であり，微分法の分野では多く取り上げないのではないかと考えた．

3.3. 漸近線の教科書での取り扱い

分数関数の単元において漸近線という言葉がどのように掲載されているか調べた結果、6社ある教科書会社によって2通りの記述がしてあることがわかった。その内訳としては、文英堂、第一学習社（写真 1 参照）と啓林館、東京書籍、数研出版、実教出版（写真 2 参照）に分けられる。

以下にそれぞれの記載例を示しておく。

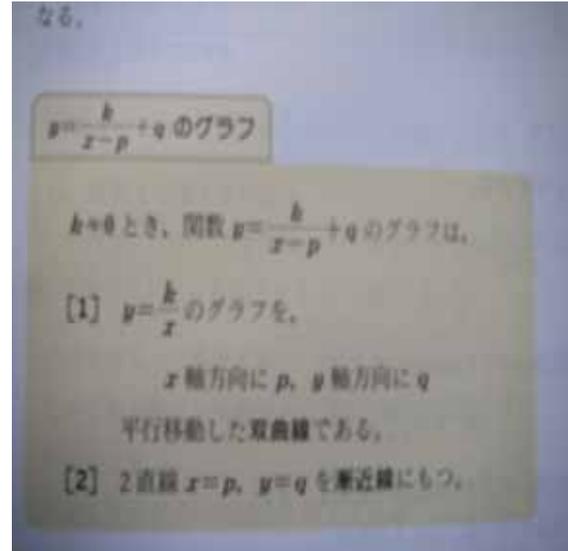
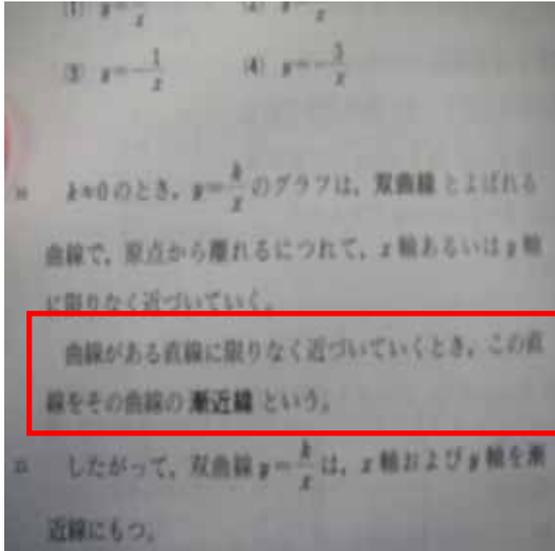


写真 1 文英堂の記載例

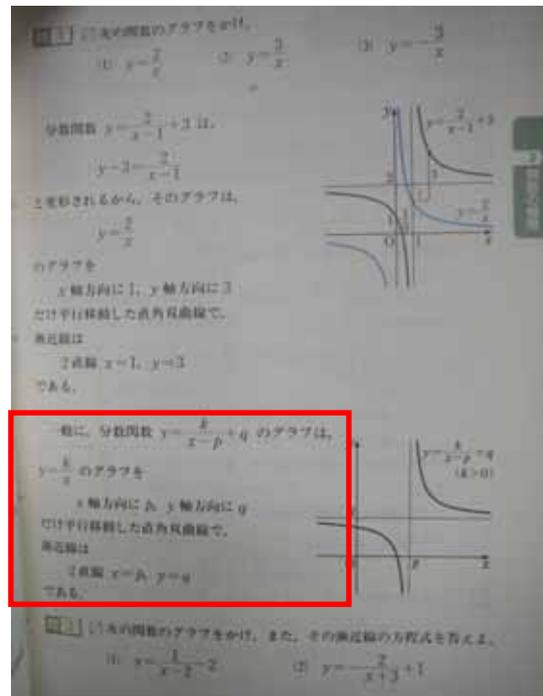
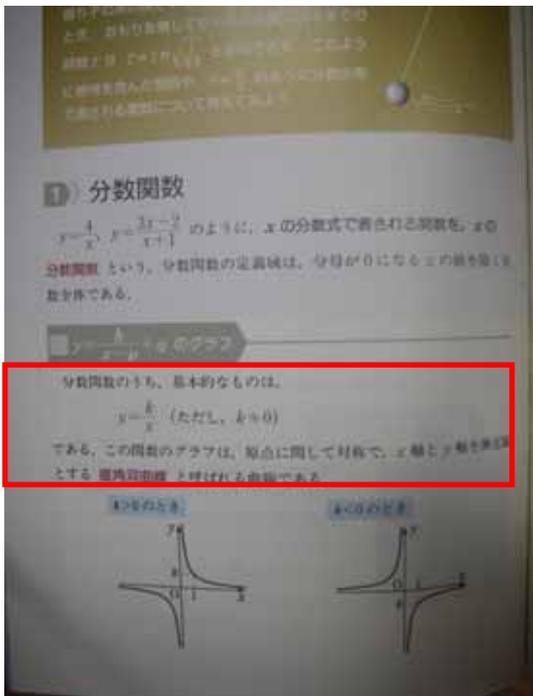


写真 2 啓林館の記載例

これらから記述の違いを見ると、文英堂、第一学習社では『曲線が限りなく近づく直線』を漸近線と呼んでいるのに対し、残りの4社では『曲線が限りなく近づく直線』という表現なしで漸近線を定義していることが分かる。

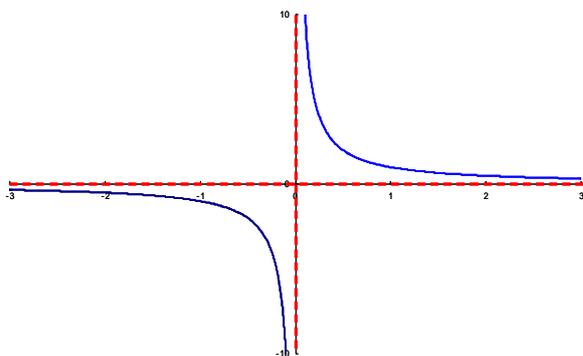
3.4 漸近線の種類

漸近線を考えるにあたり、どのようなタイプの漸近線があるのかを考える。

漸近線の種類として、軸が漸近線になる場合、軸に平行な線および垂直な線が漸近線になる場合、漸近線が傾く場合、特殊な関数のもつ漸近線の場合の4つのタイプに分類し、考えた。

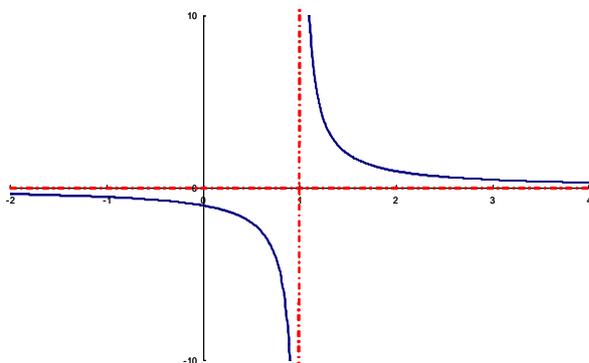
(1) 軸が漸近線になる場合

Ex) $y = \frac{1}{x}$



(2) 軸に平行な線が漸近線になる場合

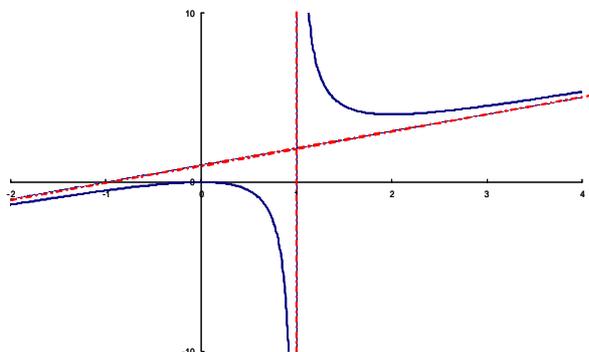
Ex) $y = \frac{1}{x-1}$



(3) 漸近線が傾く場合

軸に対して平行でなく傾きを持つ漸近線 .

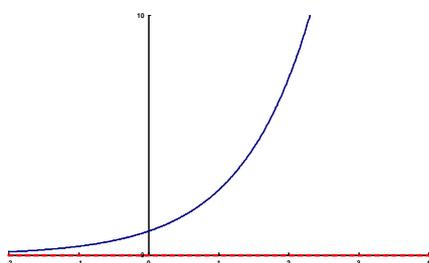
Ex) $y = \frac{x^2}{x-1}$



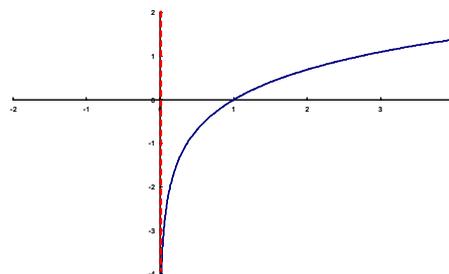
(4) 特殊な関数のもつ漸近線の場合

指数関数・対数関数などの特殊な関数を用いるさいに，考えられる漸近線 .

Ex) $y = e^x$



$y = \log x$



4. 授業設計

4.1. テーマとねらい

本指導案において、テーマとねらいを以下のように定めた。

テーマ：漸近線に着目したグラフの分析

ねらい：漸近線を理解したうえで、グラフの特徴をつかむ。

このテーマにした理由としては、指導案作成時より注目している漸近線の取り扱いについて注目しながらグラフを描くことで、より厳密にグラフの吟味・分析を行える力を付けたいからである。そのため、ねらいとして漸近線の理解と、それに伴うグラフの特徴の把握を挙げる。

ここでグラフを吟味・分析するにあたりグラフを手描きで行う必要性、漸近線を調べることの必要性について、簡単に意見を述べる。

4.1.1 グラフを手描きで行う必要性

現在ではグラフを描くことはパソコンなどを用いることで容易に行うことができる。しかし、あえて増減表を描き手描きでグラフを作成することに意味がある。

それは、複雑な関数であればパソコンを用いることで、その関数の要所や各点の持つ意味などがわからないままにグラフを描くことができってしまう。これでは、グラフを描けても、点の移動や関数のもつ意味などを知ることができない。手描きでグラフを描くことで、一つの関数に対し増減表や漸近線の有無などを調べ、各要点で十分吟味・解析を行うことでよりその関数の情報を多く得ることができる。そのため、グラフは手描きで行いたい。

4.1.2 漸近線を調べることの必要性

現在の指導要領において、漸近線はあまり注意して見られていないものと考えられるが、本指導案において漸近線を取り上げる必要性について述べる。

グラフの吟味・解析を行う際に漸近線を知ることで、どのようなことがわかるかを考えた。

(1) 関数の収束先を知ることで、 $x \pm$ における関数の挙動を知ることができる。

(2) おおまかに関数がとり得る領域を知ることができる。

などのことが考えられる。したがって、漸近線をしっかりと理解することで関数の吟味・解析をより厳密に行うことができる。

4.2 授業構成

授業構成は第1, 2時の2時間構成で設定し, その時間で「微分法の応用」の関数のグラフの概形の単元を学習するものとする. 第1時, 第2時の授業内容, 授業目標を示す.

第1時

授業内容: グラフの描き方

- ・ 2次導関数を求める.
- ・ 増減表を書く.

この時, 描くグラフは漸近線を持たない関数にする.

授業目標: 増減表を書いて漸近線を持たないグラフを描くことができる.

第2時

授業内容: 漸近線をもつグラフの描き方

- ・ 漸近線の求め方

授業目標: 漸近線を持つグラフを描くことができる.

ここで, 第1時を行う前に極限の単元において漸近線を扱っているので, 理解していることを前提に授業を進めるものとする. また, 本指導案では本時として第2時を設定し第2時の授業を設計していく.

4.3 授業の問題場面の試行錯誤

問題場面:

4.3.1 第1回目の問題場面

問題1

$y = \frac{1}{x}$ のグラフと, $y = \frac{1}{x-1}$ の

グラフを描け.

問題提示の目的

- ・ 二つのグラフを描くことで漸近線がどの様に動くかを確認する.

問題2

$y = \frac{x^2}{x-1}$ のグラフを描け.

- ・ 漸近線が傾くような形から, 漸近線について理解を深める.

問題3

$y = e^{-2x^2}$ のグラフを描け.

- ・ 他にも, 指数や対数などのように漸近線を持つ関数があることを知る.

当初は上記のような問題場面を考えた。しかし、次のような指摘があった。

- ・ 多少の混乱があっても良いから問題 1, 2 を並べて出してもよい。
- ・ 問題 3 は時間があればすると言うが、かなり難しいと思う。

4.3.2 第 2 回目の問題場面

問題 1

$$y = \frac{1}{x-1}, \quad y = \frac{x^2}{x-1} \text{ の}$$

グラフを描け。

増減表を書いて、値が存在しないところがあることがわかる。

そこが漸近線であるということを教える。

そのことから漸近がどんなものかわかる。

問題 2

$$y = e^{-2x^2} \text{ のグラフを描け。}$$

$$y = \frac{1}{x-1} \text{ を解かせる前に、例題とし}$$

$$\text{て、} y = \frac{1}{x} \text{ を説明する。}$$

問題 1 で一般的な関数を扱った後に、指数関数、対数関数のグラフを描かせ、これらにも漸近線があることを教える。

1 回目の指摘から次のような問題場面を考えた。おおむねこの問題場面で行くことになり、指導設計を行うにあたり、特に $y = \frac{x^2}{x-1}$ について問題設計および練り上げについて考えていくこととした。

5. 本時の学習計画

5.1 本時のねらい

先に述べたように本時のねらいとしては、漸近線を理解した上で、グラフの特徴を掴むこととする。

5.2 本時の期待される数学的活動の様相

A. 与式に値を代入したり、導関数を求め、増減表を書いたりして考える。

B. 与式を $y = \frac{1}{x-1}$ と $y = x^2$ の積として考え、それら式のグラフの重ね合わせとして考える。

C. 与式を $y = \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1} + (x+1)$ に変形し、 $y = \frac{1}{x-1}$ と $y = x+1$ の和として考え、それら式のグラフの重ね合わせとして考える。

5.3 本時の問題場面

問題： $y = \frac{x^2}{x-1}$ の概形を調べよう

5.4 本時の展開

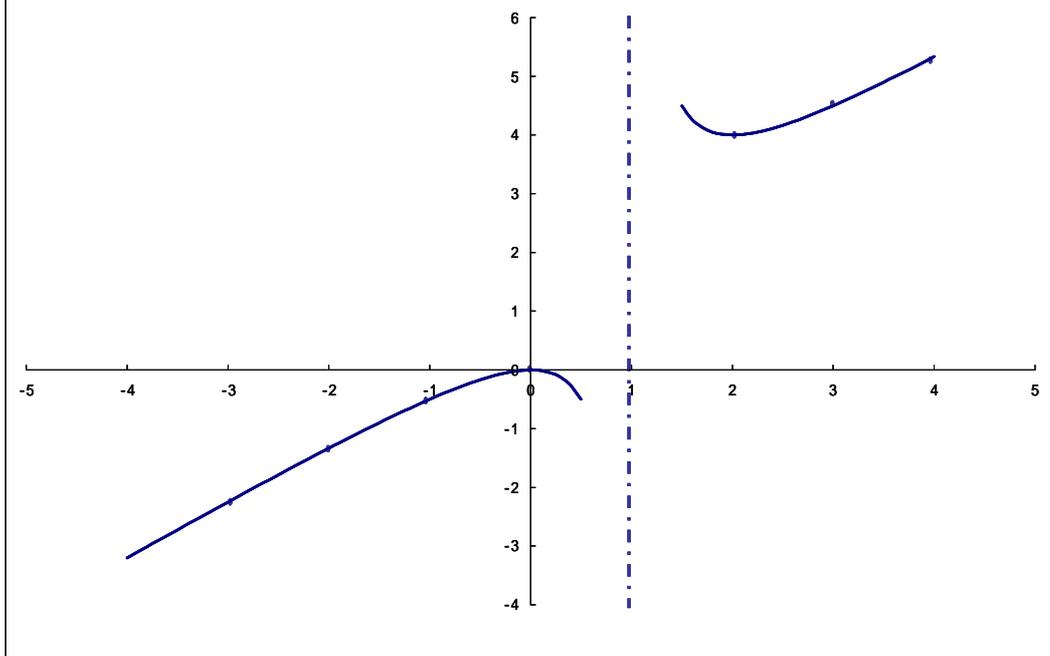
活 期待される生徒の数学的活動

支 教師の支援

自力解決A-1

活 値を代入して考える.

(活動例)



- 支 大体の線は見えるだろうけど、その線はどんな式になるのだろうか。(一般的な支援)
 $x=1$ 同様に、グラフが通らない(共有点を持たない)ような直線はないか。(一般的な支援)
増減表を書いて調べて見よう。(特殊な支援)

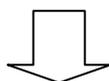
上記支援のその線は何を意味しているか?

この線が漸近線となるが、この線がどのような線であるかを考えさせる必要がある。

関数はこの線に対して、どのような挙動をするのか? 近づいていくのか? それとも交差するのか?

実際値を代入していくメリットは?

x が大きな値をとる時、 y は非常に大きくなり x 軸に漸近しないことがわかる。つまり、 $y=1/x$ や $y=1/(x-1)$ と違うことの検討がつく。



自力解決 A-2

☒ 導関数を求め、増減表を書く。

(活動例)

$$y = \frac{x^2}{x-1} \quad y=0 \text{ の時, } x=0$$

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \quad y'=0 \text{ の時, } x=0,2$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(2x-2)(x-1) + 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{4x^2 - 8x + 2}{(x-1)^3} = \frac{2(2x^2 - 4x + 1)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

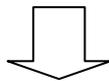
$$y''=0 \text{ の時, } x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

x	-	...	0	...	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$...	1	...	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$...	2	...
y'	/	+	0	-	-	-	/	-	-	-	0	+
y''	/	-	-	-	0	-	/	+	0	+	+	+
y	-	↗	0	↘	$\frac{2-3\sqrt{2}}{2}$	↘	-	↗	$\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$	↘	4	↗

☒ 知っている関数で何かわかることはないか。(一般的な支援)

関数どうしの組み合わせで考えられないか。(特殊な支援)

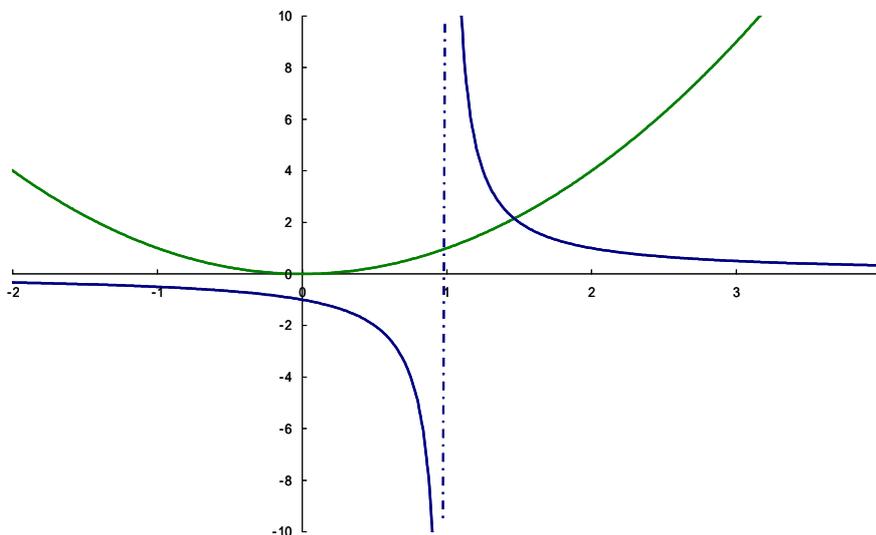
関数どうしの組み合わせで考えなければならない理由は？
増減表を描くことでおおまかなグラフの概形はわかるが、漸近線をとる正確な値はわからない。漸近線の式を知りたい。しかし、描いたグラフの概形からでは漸近線の式を知ることは困難であるので、式を変形することで漸近線の式を知ることができないか。



自力解決 B

活 $y = \frac{1}{x-1}$ と $y = x^2$ のグラフの重ね合わせとして考える .

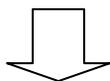
(活動例)



支 他の形では表せないだろうか . (一般的な支援)

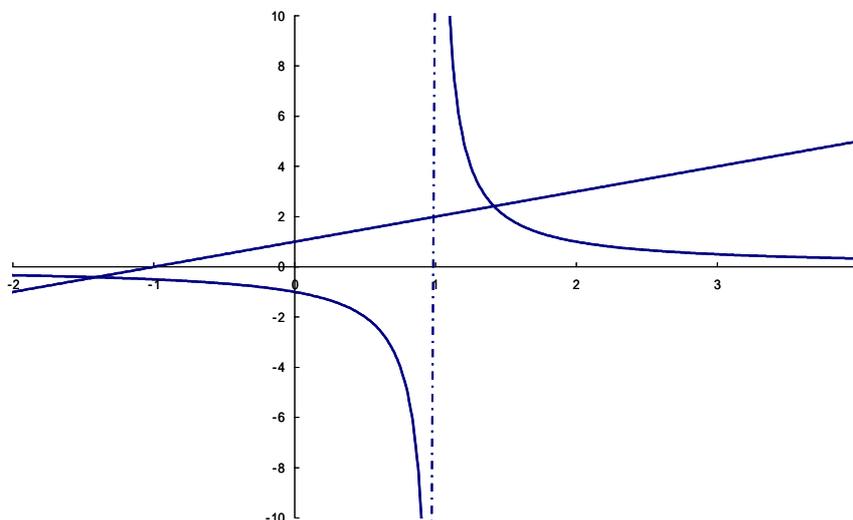
和の形で表せないだろうか . (特殊な支援)

積の形ではなく和の形で表したい理由は？
積だと (その項が) お互いに値に影響を与えてしまう .
お互い影響を与えないように関数を分解できないか . と考
えると和の形が最適であることがわかる .



自力解決 C

活 $y = \frac{1}{x-1}$ と $y = x+1$ のグラフの重ね合わせとして考える .

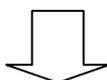


$y = (x+1) + \frac{1}{x-1}$ の式から何を読ませたいか？

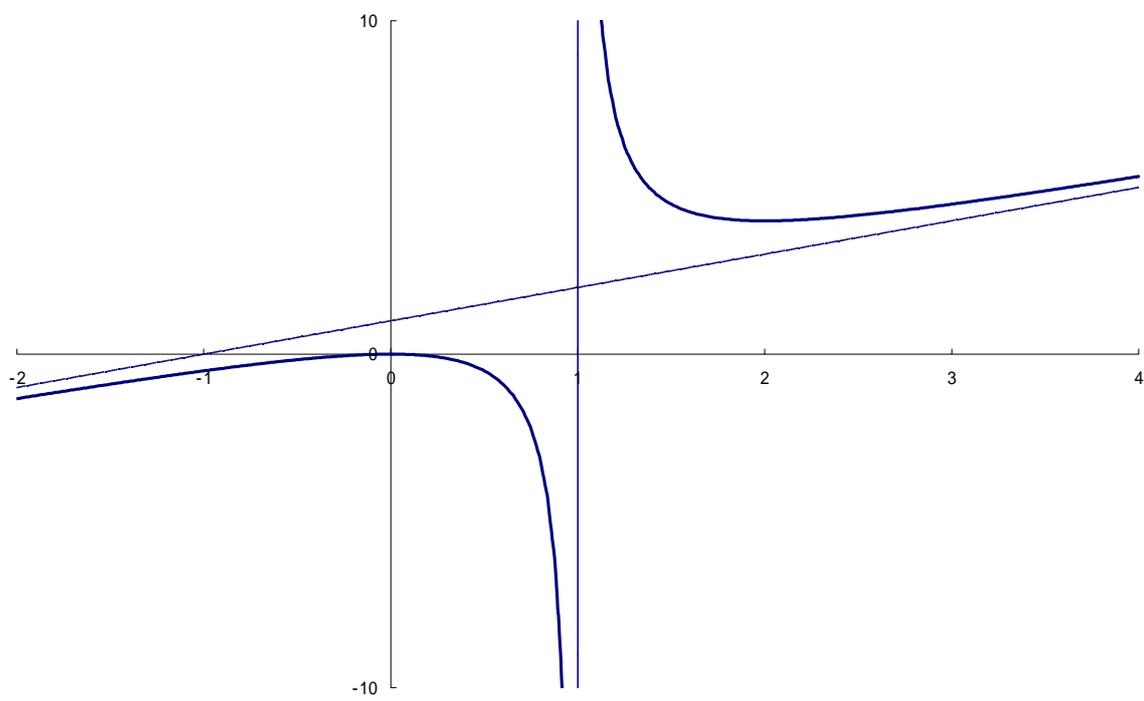
この式の値は $y=x+1$ を絶対に通らないことが見える . なぜなら , どんな x の値に対しても , 必ず $\frac{1}{x-1}$ が加わるからである ($\frac{1}{x-1}$ は 0 にはならないため) .

ここから , $x=1$, $y=x+1$ の 2 直線と問題の関数が共有点を持たないことがわかる .

このような直線が漸近線であることを教えたい .



(解答)



6. 振り返り

自己評価を行い、今回の指導案作成について振り返る。

6.1 班全体の評価

基本的に班員全員で意見交換を度々行い授業設計を進めてきた。

各個人の意見を聞き、お互いの意見が違えば納得できるまで話せたことで、全員がしっかりと現状を把握して行動していったことが良かったと思う。

6.2 各班員の評価

6.2.1 岡本 壮平

高校数学 の微分法の単元において授業設計を行うにあたり、受講前と比べ考え方に変化があった。自己評価としては次のようになる。

- ・ 授業設計を通し、ただ教えるだけでなく、どのように「生徒に対し伝えていくか」、「問題に取り組みさせていくか」などの違った視点からの授業設計に取り組めるようになった。
- ・ グラフを描くにあたり、今まで注目していなかった漸近線の取り扱いに関して調べるにあたり、漸近線の重要性を知るだけでなく、グラフの吟味・分析の重要性についても考えることにより、より広い視点から問題を見られるようになった。
- ・ 教科書の比較・検討を行うことで、各教科書においても表現法や例題の出し方など、共通点、相違点と見られ、教科書から見る教え方の違いについても考えるようになった。

以上のことから、授業を受講する前から見ると、より深く授業の作り方について考えられるようになったと思う。これほどの作業を、全範囲にて行っている現職教員の方は本当に凄いものだと感じた。

また、授業を通して設計や歴史を調べるにあたり感じたことを以下に述べる。

- ・ 歴史を調べる中で、微積分が考えられるようになった起源を知った。今では、両者は対になる考え方とされているが、その起源は全く別物であった。このような歴史を調べていると、いかに自分達が先代の考え出したものを機械的に用いているかを実感した。
- ・ 教科書を比較していると多く会社によって異なる部分が見られた。大まかな流れは同じであっても、その書き方に異なる部分があり、用いる教科書により個人差が大きく出るのではないかと考えられる。
- ・ 問題を作るにあたり、生徒に考えさせる問題設定にするため、問題に与える情報量を減らすようにした。今までは、問題に対して情報量を必要以上に与えてしまっていたことを実感した。

以上のように今まで深く考えていなかったようなところも、受講する中で気づき納得させられる部分が多かった。

これらの作業を通して、まだまだ良い授業は作ることができ、自分の考え方の未熟さを知ることができた。教師がここまで考えないと、生徒に対し指導することができないのは間違いないと思うので、少しずつでも努力し現状を変えていく必要はあると思った。

6.2.2 寺田 雄一

この数学学習指導設計 の講義と指導案作成を通して、授業を行うのに指導計画を立てたり、教材研究等をしたりと自分たちが今までに知らなかった裏での作業を実際に行ってみて、まず、教師の大変さを痛感した。1時間の授業を行うのにたくさんの時間を使うのだと改めて感じました。

今回、半期を使って数学 の微分法の単元についていろいろ調べてきました。微分の歴史から教科書比較といったことをしていき、今までに知らなかったことがいろいろとあり、新たな発見としてとても面白かったですし、勉強にもなりました。特に、自分たちがテーマとした漸近線については、そこまで深く漸近線について考えたことがなく、教科書で普通に書かれているものだと思っていましたが、教科書比較をしたことによって、掲載されているか否かがわかりました。だから、今後教科書比較を試みるのも必要であると思いましたし、教材研究をもっとしていかないといけないのだと実感しました。指導案作成において様々なことを調べてきて、それぞれで奥深さを感じましたし、発表での先生との討議では、数学教育の奥深さを感じたり、勉強になったりしました。今後、実際に現場に立ってやっていくのですが、この講義で学んだことも生かしながら、一つ一つのことを丁寧にしてやっていき、生徒に数学の楽しさを伝えていけたらいいと思います。

6.2.3 松尾 啓吾

今回、数学学習指導設計 の授業を受けて、自分たちで高校数学 の微分法を用いた関数のグラフの指導案を作ってみて気がついたことをあげる。

まず、指導案を作っていくに当たって、微分法についての歴史を調べた。そこでは、微分について、「無限の概念」の考え方や微分の定義や表記について学んだ。それらの歴史を自分たちで調べることで、微分の考え方や使われ方を学んだ。

さらに、教科書比較などをしたことによって、高校数学と現代数学の比較や、どの分野が重点的に扱われていて自分たちはどこに重点をおいて指導案をつくっていきたいのかなど具体的に考えることができた。

また、自分たちで授業構成を考えたときに、グラフを描く上でなぜ積で表された関数を和の形で表して考えたほうがグラフを描きやすいのかということを考えていくことが難し

くも面白かった。

今回このように、ひとつの単元に対して長い時間をかけて詳しく指導案を作ってみて、その分野を学ぶための背景や、授業構成の難しさがわかった。また、微分法を用いて関数のグラフを描くという作業で、感覚的にやっていくのではなく、一つ一つのことに対して教えていくためには、数学的な理由を考えわかった上で教えていかなければならないのでとても考えさせられた。

6.2.4 正井 宏明

今回の授業でまず苦労したのは、微分、積分の歴史という話から考えるということである。ニュートンやライプニッツが表記を考えた目的とかを勉強して、理解を深めてから授業設計を考える事であった。

単元を絞る時に自分達はグラフの書き方に注目した。そして自分達が勉強進めて複雑な関数のグラフを描く時に、増減表を描くだけでは書けないグラフが出てきて、極限や漸近線を考える必要のある関数がある事を思い出した。そしてグラフ描く事を教える上で生徒がどこまでの知識を持っている事を前提にして、数学的活動を考える事も難しかった。具体的にいうと極限の箇所を勉強している事を前提とした数学的活動を考えるか問題であった。

漸近線についての内容が教科書にほとんど載っていなかったので、教える事考えた時に既に習った事のある関数 $y = \frac{1}{x}$ を例に出して説明して、グラフを書く上で漸近線を考える必要性を分からせたかった。

グラフはコンピューターを使っても描ける。なぜ増減表を作ってグラフを描く意味を考えた時に「ある点でどんな傾きでどういう風に変化しているのかを微分を使って解析ができる」という重要な意味があった事に気がついた。コンピューターではある点毎の変化の解析が出来ないので増減表は重要だと再認識した。

数学的活動 B と C は結構すんなりいい例の案が出たが B から C へ持って行く支援を考える事が今回一番難しかった。関数を (整数) + (次数の低い分数関数) の足し算にする良さを考えた時、期待される活動で扱った関数が生徒には、絶対に積の形で見てきて、ある x の時の y をプロットして繋ぐ事を考えると思っていた。そこで積の形で考えてプロットするのは大変だと思い、足し算の形で書く方がグラフを書く事が簡単な事に気がつきはずであるという結論に至ってしまった。どう考えても掛算よりも足し算の方が簡単なのであるという考えに落ち着いてしまった。そこに数学的論理を加える事がかなり考えても思いつかなかった事が自分にとって残念な事である。

《参考文献》

- 安倍齊：「微積分の歩んだ道」：森北出版
戸田宏：「数学」：啓林館
江口正晃ら他：「基礎微分積分学」：学術図書出版
小林昭七：「微分積分読本」：裳華房
岡本和夫：「新版数学」：実教出版
竹之内脩：「新編数学」：文英堂
「高校数学数学」：啓林館
「高等学校新編数学」：第一学習社
「新編数学」：数研出版
飯高茂，松本幸夫：「数学」：東京書籍
文部科学省：高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編：平成 11 年 12 月
文部科学省：高等学校 学習指導要領：<http://www.nicer.go.jp/guideline/old/h01h/>

鳥取県東部地区教科書センターより，平成 21 年度教科書センター用の見本を参照した。