

高等学校数学 数 C ・ 行列とその応用

行列の積

C 班

工学部応用数理工学科	植木裕太
工学部応用数理工学科	采女育子
工学部応用数理工学科	三島優志
地域学部地域環境学科	米原幸子

目次

1. 単元設定の理由

2. 教材研究

- 2.1 高等学校学習指導要領における扱い
- 2.2 教科書の問題例
- 2.3 行列と実数の比較
- 2.4 数学史における行列

3. 授業設計

4. 振り返り

1. 単元設定の理由

我々の班は、高校数学の数学 C「行列」を取り上げ、行列の積をテーマに選んだ。行列の演算において、和・差・実数倍は要素ごとの演算であるが、積はそうではなく、独特の定義を有する。積の定義は行列を大きく特徴づけており、実数の演算とは異なった概念を持つものである。単元の流れとして、和・差・実数倍の後に積、逆行列を扱うと、生徒には加減法や定数倍と違って特殊な演算をしているように見えるだろう。教科書ではそれを回避するため、行列を「表」として捉え、複数の表の要素同士のかけ算として日常化を図るか、天下り式に積の定義を教授し、使いこなすことに重点を置く場合が多かった。そのため、本来非常に有用であり、実用的であるはずの「行列」が「何のためにやるのかわからない」「日常世界とかけ離れていて実感がわからない」といった評価にされがちで、生徒にとって単元の理解をより難しくしているのではないだろうか。

そこで我々は、行列の積の歴史的経緯を考えると共に、なぜそのように定義しなければならぬのか、目的と理由を含めた理解できるような授業を考察することにした。

2.教材研究

2.1 高等学校学習指導要領における扱い

高等学校学習指導要領(平成 11 年 3 月告示、14,15 年一部改正)における記載は次の通りである。

数 C

(1) 行列とその応用

ア 行列

(ア) 行列とその演算

和, 差, 実数倍

(イ) 行列の積と逆行列

イ 行列の応用

(ア) 連立一次方程式

(イ) 点の移動

[用語・記号] A^{-1}

高等学校学習指導要領(平成 11 年 3 月告示、14,15 年一部改正)

「行列とその応用

行列の概念とその基本的な性質について理解し、数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに、連立 1 次方程式を解くことや点の移動の考察などに活用できるようにする。」

2.2 教科書の問題例

教科書(実教出版)の章立てもほぼ指導要領に沿っている。

第一節 1.「行列」では、表のように複数の数値をまとめて取り扱うときの方法として行列を考えている。行列を、複数の項目を持つ表の数値を抜き出したものとして扱っている。

「行列の意味

次の表は、あるクラスの運動着を男女別、サイズ別に調べたものである。この表から数値だけを同じ配列のまま

A 組	S	M	L
男	2	6	12
女	3	10	7

抜き出してかくと、右のようになる。このように、数を長方形の形に並べたものを行列といい、並べられた各々の数を行列の成分という。」

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

「行列の加法・減法・実数倍」では、複数の表の項目ごとの足し算・引き算として加減法を扱い、実数倍では各成分の実数倍と考えている。

「行列の加法

右の2つの表は、あるクラスA組、B組について、男女別に運動着のサイズを調べたものである。この2つの組を集計したものが、右の3つ目の表である。

上の例における2つの表の集計から、次のような行列の計算が考えられる。」

A組	S	M	L
男	2	6	12
女	3	10	7

B組	S	M	L
男	1	5	14
女	2	8	10

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 14 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 26 \\ 5 & 18 & 17 \end{pmatrix}$$

合計	S	M	L
男	3	11	26
女	5	18	17

実数倍についての表は割愛する。同じようなクロス表で「1人2着ずつ運動着を用意すると～」各要素の数字が2倍になることから定義されている。

ここまでは、「行列=表の各項目の数値」、という認識で進んでいる。

しかし、次項の「行列の乗法」では、積の定義を表同士のかけ算で表そうとしている。

「行列の乗法

下の表1は、ある高校のバスケット部で購入する運動着の単価を表し、表2は男女別、サイズ別の人数を表している。このとき、Mサイズのシャツの購入費用は $6 \times 2 + 5 \times 1 = 17$ より、1万7千円である。」

表1 運動着の単価(千円)

	男	女
シャツ	6	5
パンツ	4	3

表2 人数(人)

	M	L
男	2	3
女	1	4

「上の表から数値を抜き出して、シャツの単価を行ベクトル、M サイズの人数を、列ベクトルとすると、単価×人数＝購入費用であるから、購入費用は次のように表すことができる。」

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \times 2 + 5 \times 1 = 17$$

ここから行ベクトルと列ベクトルの積を定義し、定義を拡張して 2×2 正方行列と 2×1 の列ベクトルの積、 2×2 正方行列同士の積が定義されている。この後は乗法の交換法則が成り立たないことなど、行列の積の性質についての展開になっている。

加法・減法・実数倍に比べ、積ではそのように定義する理由付けが弱いように感じられる。2つのクロス表に共通する「性別」の項が一方で行、一方で列になっている理由も説明されていない。表という日常的なモデルでは、行列の積を理解するのは難しいのではないだろうか。

2.3 行列と実数の比較

行列は、生徒が今まで扱ってきた実数とは違う体系を持っている。新しい概念を理解するとき、既習事項を基にして新しい概念との相違点を考えることは有効である。そこで、実数と行列の比較を行い、どの点が理解の妨げになるのかを考えた。

実数	行列
大小関係(順序)があり、数直線上に表せる	大小関係(順序)はない 数直線上に表せない
1	単位行列 E AE=EA=A となる行列 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2 次のとき)
0	零行列(全ての成分が 0 である行列) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2 次のとき) AO=OA=O
和、差	行列 A, B が同じ型のとき、対応する成分の和(差)を成分とする行列が A と B の和(差)
実数倍	行列 A のそれぞれの成分を実数倍したものが kA $k \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 \\ ka_3 & ka_4 \end{bmatrix}$
積	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}$ で定義する。 「 AB=O ならば、 A=O または B=O 」は成り立たない。 A≠O, B≠O であっても AB=O となることがある。
逆数 0 でない実数 a に対して、ab=1 を満たす b は a の逆数	逆行列 正方行列 A と単位行列 E に対して、 AB=BA=E となる行列 B が存在するとき、 B は A の逆行列
交換法則	加法…成り立つ A+B=B+A 乗法…通常成り立たない AB≠BA
結合法則	加法…成り立つ (A+B)+C=A+(B+C) 乗法…成り立つ (AB)C=A(BC)
分配法則	成り立つ (A+B)C=AC+BC A(B+C)=AB+AC

実数の 1、0、逆数に対応するものは存在しており、和、差、実数倍にあたる行列も、型が同じなら成分ごとの計算で求められる。実数と大きく異なる点は**積の定義**である。

不可換性は積の定義によるためである。行列の積が何故このように定義されなければならなかったのか？

2.4 .数学史における行列

行列式

ライプニッツ(1678), 関孝和(17世紀後半)

連立方程式の解の公式の表し方として行列式が登場する

クラメール(1750)

コーシー、ヤコビ

行列

ケーリー(1860年代)

- ・ 歴史的には行列式の方がはるかに早い
- ・ 行列の概念は、変換や写像の考え方が発達してから

「行列論」ケーリー (1858)

代数的不変式論における(1次)変換を2つ結合する方法から

第2の変換を第1の変換の中の \boldsymbol{x} に施す

$$y \rightarrow \frac{px + q}{rx + s} \quad x \rightarrow \frac{Pz + Q}{Rz + S}$$
$$y \rightarrow \frac{(pP + qR)z + (pQ + qS)}{(rP + sR)z + (rQ + sS)}$$

Z の係数と定数項を抜き出し、行列を次のように定義している。

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pP + qR & pQ + qS \\ rP + sR & rQ + sS \end{pmatrix}$$

参考文献

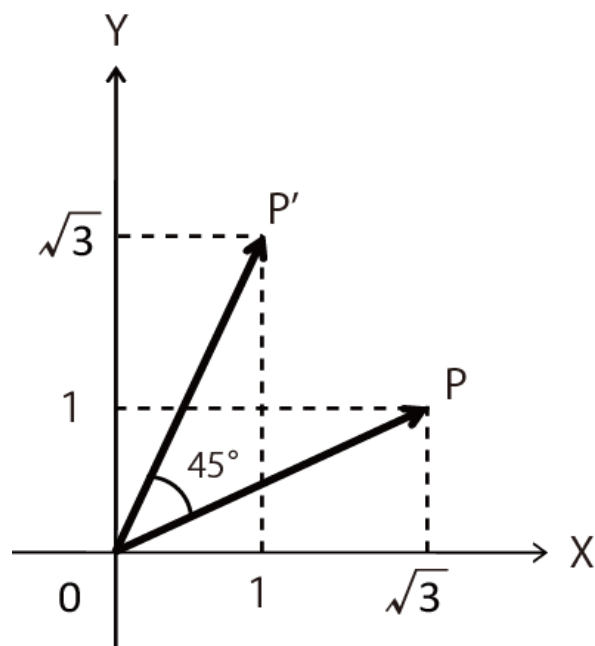
数学をつくった人びと(3), 訳者 田中勇, 銀林浩, 東京図書株式会社, 1963

3. 指導計画

- ・既習事項…行列の概念、行列の加法、減法、実数倍は既習であるとする。
- ・本時の目標…行列の積を定義する
- ・期待される数学的活動
 - C：加法定理を使って座標の変換を解くことができる
 - B：一般化できる
 - A：行列の式でベクトルの変換を表現し、積を定義する

問題設定

$\vec{OP} = (\sqrt{3}, 1)$ を 45° 回転したベクトル \vec{OP}' の座標を求めよ。



支援 1：

ベクトルの座標を 2×1 の列ベクトルで表記すると、ベクトルの演算を行列の演算として行うことができる。

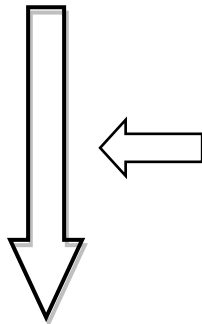
例) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

自力解決 C

期待される数学的活動（以下「活動」）：x,y を極座標で表し、加法定理で解く

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(30^\circ + 45^\circ) \\ \sin(30^\circ + 45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$



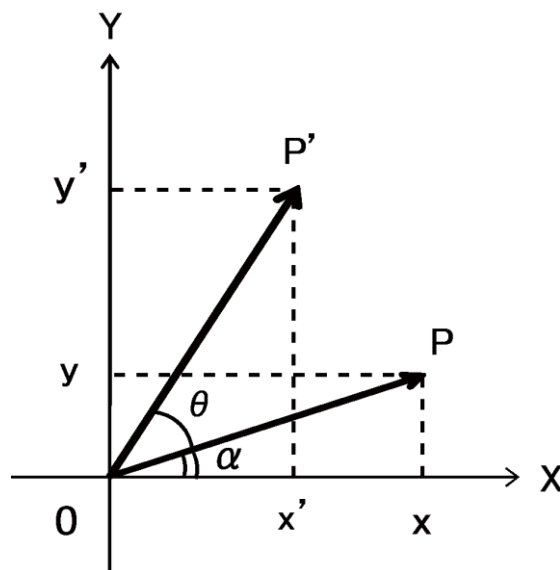
支援 2 :

一般化して、 $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を θ 回転させたときの

ベクトル $\vec{OP}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を求めよう

自力解決 B

活動：文字を用いて回転を一般化できる



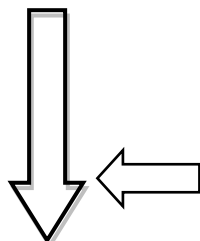
B-1 数字を文字に置き換える

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \end{pmatrix}$$

B-2 x, y, θ のみを用いて表せる

$$\vec{OP}' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ y \cos \theta + x \sin \theta \end{pmatrix}$$



支援 3 :

ベクトルの変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を使って

うまく表現できないだろうか。式を工夫してみよう。

自力解決 A

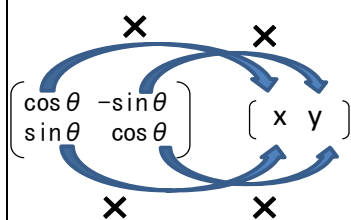
活動 : 式で座標の変換を表現する

試行 実数倍を使った式変形で x, y をくくり出す

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ y \cos \theta + x \sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

支援 4 :



x, y の係数を 2×2 行列で表すと、 x, y との関係は左の図のようになっている。今までの加減法や実数倍でうまく表せないのなら、行列同士の「かけ算」を新しく定義してみよう。

もしも 2×2 行列と列ベクトルの積を下のように定義すれば、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

ベクトルの回転は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{のように、行列の積で表すことができる。}$$

4. 振り返り

行列という単元は、同時期に学習する数Ⅲの微積分の演算にくらべ、演算が拍子抜けするほど単純だが、グラフ等と合わせて視覚的に理解しやすい微積分より「それがいったい何であるのか？何の役に立つのか？」理解しづらく、学習が進むにつれ理解が難しくなる単元である印象を受ける。自分自身も、行列の有用性は大学での数学で初めて理解した部分があり、高校の頃は計算方法を厳守することに心を砕いていたように思う。学習において必要なのは教科に対する興味であり、歴史上こんな問題を解決するために作られてきたのだ、現実世界においてこのように役に立つのだ、ということが興味をかき立てる原動力となると考えている。しかし、高校の数学は複素数のように新しい概念を持つ世界が広がる場面も多く、その世界へはいるための手続きの段階で、現状では天下り式にならざるを得ないことがある。複素数や行列は特にその限界を感じることが多い。今回の学習では、天下り式に暗記せよとなることの多い行列の積に関して、感覚的に理解できるような方法を模索した。まず行列の歴史を調べ、どのような問題解決の場面があったのかを探した結果、行列式の方がずっと歴史が古いということ、行列は一次変換や連立方程式を解く手段として整備されてきたことがわかった。また、行列の積は必要に応じて定義されたものであることもわかった。そこで、授業設計において、指導要領ではもっと後に学習するベクトルの一次変換を利用して行列の積を定義する必要性を生み出し、定義に必然性を持たせることを意図した。行列の式を工夫してベクトルの回転を表現することはできたように思うが、行列の積を定義することの有用性、実用性について掘り下げることができなかった。

今回の授業では、単元の理解についても授業設計についても自分の力不足を痛感した。当初の意図は達成できていないと感じるが、難しいテーマに挑戦することで自分自身が成長することができたように思う。この経験を生かして次につなげていきたい。(米原)

参考文献

新版数学 C,岡本和夫他,実教出版,2005

教えてほしい数学の疑問 1,数学セミナー編集部,日本評論社,1996

対話でまなぶ数学教室 2 数式の登場,志賀浩二,岩波書店,1997

数学をつくった人びと(3),訳者 田中勇,銀林浩,東京図書株式会社,1963

なっとくする行列・ベクトル,川久保勝夫,講談社,1999