

平成19年度

数学学習指導設計Ⅱ

「三角形の相似」

～相似の中心の発見と重要性～

J 3 班

三喜 伸二

大川 潤

下田 良樹

村山 達宣

目次

- ① テーマの設定 —J3 (3)
- ② 相似の歴史 —J3 (4)・(5)
- ③ 現在と過去の数学学習指導要領の比較・考察 —J3 (6)
～(8)
- ④ 指導計画 —J3(9)
- ⑤ 本時の指導案 —J3(10)～(15)
- ⑥ 振り返り —J3(16)・(17)
- ⑦ 参考文献 —J3(18)

1 テーマの設定

1. 1 テーマ

相似の中心の発見と重要性について

1. 2 テーマ設定の理由

拡大や縮小は普段身の回りに多く存在しており、実生活で相似の考えを用いられている場面は、地図、設計図など拡大図や縮図を用いて高さや距離、方向などを求めることができる。また、写真などのように大きいものを小さくしたり、小さいものを大きくしたりして扱うことなど、身の周りからいろいろと「相似な図形」を見つけ出すことができる。「相似な図形」とは、「拡大・縮小」をしても形が同じ図形であるということを言い直したものである。「相似な図形」には全て「相似の中心」が存在しており、その相似の中心を見つけ「拡大・縮小」していくと、さらに相似な図形を書き足していけるし、逆に、どこが相似の中心か分からなければそれらの図形が相似であるかも分からないと思う。一見相似であるか分からない図形でも「相似の中心」を見つけることによって容易に相似な図形だということが分かる。

つまり、「相似」という単元は相似の考え方が日常の生活に深い結びつきがあるので、三角形の相似の概念をもとに図形の相似について学び平面図形の性質を学習させたいと考えた。それらの中から、より生徒の感覚に近いものを取り上げることにより、相似の考え方のよさを感じさせたい。

しかし、過去の学習指導要領で学習している子ども達が小学校で習っていた「拡大・縮小」の範囲も、現在の学習指導要領で学習している子ども達は中学3年生で学習する「相似」という単元に含まれたので、「拡大・縮小」の概念から学習し、「相似の中心」というものを理解させる必要がある。

そこで、このテーマは図形を「拡大・縮小」するときや「相似」を考えるときに中心となる考えの「相似の中心」はどこなのか、そして「相似の中心」とはどういう意味があるのかを考えることが重要だと思いこのテーマにした。

2 相似の歴史

2. 1 調べたこと

相似の歴史を調べるために「ユークリッド原論」を調べることにした。

「ユークリッド原論」に書かれていたことは、～原論の成立に関わるギリシャ数学史の主な情報源は5世紀のプロクロスによる原論の注釈である。原論自身に何も書かれていないことと、原論以外の資料がほとんど失われている中で、この注釈は大変貴重な資料である。それによると、原論はプラトンの創設したアカデミーにおける研究成果を集大成したものとされている、さらに、原論に先行する「原」原論を編集したというヒポクラテス、レオン、テウディオスのことが言及されている。なお、ユークリッドが原論を執筆したのはアレクサンドリアであると考えられているが、はっきりした根拠はないようである(J3(18)に参考文献を載せた)～

また、ユークリッド原論は5つの公理と、5つの公準(仮定)が提示されていて、この公理・公準を示すためのたくさんの命題が書かれていた。命題は一部を取り上げた。今回は紹介だけにしておく。

5つの公理

- 1 同じものと等しいものは互いに等しい
- 2 同じものに同じものを加えた場合、その合計は等しい
- 3 同じものから同じものを引いた場合、残りは等しい
- 4 お互いに一致するものは、お互いに等しい
- 5 全体は、部分より大きい

5つの公準

- 1 任意の一点から他の一点に対して直線を引くこと
- 2 有限の直線を連続的にまっすぐ延長すること
- 3 任意の中心と半径で円を描くこと
- 4 すべての直角は互いに等しいこと
- 5 直線が2直線と交わるとき、同じ側の内角の和が180度未満である場合、その2直線が限りなく延長されたとき、内角の和が180度より小さい側で交わる。

命題VI-20

相似な多角形は全体に比例する等しい数の相似な三角形に分割

され、一方の多角形は他の多角形に対して、対応する辺の比の二乗比をもつ。

2. 2 考察

相似の歴史に関わらず数学史について調べようと思ったら、紀元前の大昔から調べなくてはならなくなりたくさんの労力と知識が必要であることがわかった。今、私たちが当然のように使っている公式や定理は大昔の偉人たちが積み重ねてきたものだということを痛感させられた。

今回、相似の歴史を調べて、「ユークリッド原論」というものに出会った。「ユークリッド原論」は、相似の単元だけでもとても広くて、テーマをしぼることができなかったので、私たちの大事にしたいことにはこの「ユークリッド原論」は難しく・奥深くて生かすことができなかった。

3 数学学習指導要領

3. 1 現在（平成10年度版）の数学学習指導要領と過去の数学学習指導要領との比較

- ・現在の中学学習指導要領(平成10年度版)

図形の性質を三角形の相似条件を基にして確かめ、論理的に考察し表現する能力を伸ばす。

- (ア) 図形の相似の意味を理解し、三角形の相似条件を用いて図形の性質を論理的に確かめることができること。
- (イ) 平行線と線分の比についての性質を見だし、それらを確認することができる。
- (ウ) 相似の考え方を活用できること。

- ・昭和44年度版の学習指導要領

第2学年

- (1) 変換の考えを用いて、図形の性質を考察することができるようにする。

- ア 図形についての相似の意味

- イ 合同変換，相似変換などの意味。

- (2) 三角形の相似条件を明らかにし，合同条件や相似条件を用いて，図形の性質の理解を深める。

- ア 三角形の相似条件。

- イ 平行線および平行平面に関する線分の比についての性質。

- ウ 三角形および平行四辺形の性質。

- (3) 縮図や立体図形の相似を通して，相似についての理解を深める。

- ア 簡単な立体図形の相似，および相似形の相似比と面積比・体積比との関係。

- イ 高さ，距離および方向を測量や縮図によって求めること。

- (4) 次の用語および記号を用いることができるようにする。

- 相似， ∞ ，内分，外分，相似比，相似の位置，相似の中心，中線，外心，内心，重心

・昭和52年度版の学習指導要領

第2学年

図形の相似の概念を明らかにするとともに、三角形の合同条件や相似条件をもとにして、図形の性質を考察する能力を伸ばす。

ア 相似の意味と三角形の相似条件

イ 平行線の線分の比についての性質

ウ 三角形や平行四辺形の性質

第3学年

図形の計量に関する性質を理解させ、それをを用いることができるようにする。

ア 三平方の定理とその利用

イ 相似の応用としての高さや距離の測定

ウ 簡単な立体図形の相似並びに相似形の相似比と面積比及び体積比との関係

・平成元年度版の学習指導要領

第2学年

図形の相似の概念を明らかにするとともに、三角形の合同条件や相似条件を基にして、図形の性質を見だし、それを確かめる能力を伸ばす。

ア 相似の意味と三角形の相似条件

イ 平行線と線分の比についての性質

ウ 相似の応用

第3学年

簡単な立体図形の相似並びに相似形の相似比と面積比及び体積比との関係

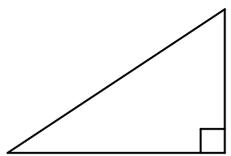
3. 2 学習指導要領の変化と考察

- ・昭和44年度版の学習指導要領は相似条件の理解だけでなく、合同変換や相似変換の考え方をを用いて図形の性質の理解を深めるというような現在より具体的な方法が書かれていた。
- ・昭和52年度版は三角形の相似条件が重視で、相似変換や拡大、縮小の範囲が少なくなっていた。
- ・平成元年版は相似条件を習って問題を解くだけでなく、自分で応用して相似を用いようという考えになっていた。
- ・今まで小学校でやってきた「拡大・縮小」の範囲は、私たちは小学校の算数の授業で習っていたが、現在の学習指導要領では中学校3年生の数学の「相似」の授業の前に授業をするということで、「相似」の単元に含まれてしまい、この「拡大・縮小」の範囲は小学校では教えなくなっている。このことによって小学生が図形に対して触れる機会が少なくなるので、中学生になったときに図形に対する見方や考え方の能力が低下してしまうことになってしまうと思った。このことより、私達は現在（平成10年度版）の学習指導要領はあまり好ましくないと思う。
- ・どの年度にも書かれているように、相似の考えを用いることによってこれまで習ってきた図形たちの性質をより理解することができ、より関心が高まることと思う。
- ・現在の学習指導要領は、学習指導要領と学習指導計画の二つに分けて書かれており、この学習指導要領に書かれている内容は少なくなった。そして今回はその学習指導計画の方を調べることは都合が合わずに出来なかった。

4 指導計画

ここでは、相似の範囲が多すぎるため導入の部分の拡大・縮小の2時間分(2コマ)について考えた。

特に、私たちに「拡大・縮小」と「相似」の見方・考え方のつながりを意識した問題を設定することにより、たくさんの生徒に「拡大・縮小」や「相似」の意味や性質を理解してもらえるように工夫した。

時	学習内容	本時の目標	中心となる考え	問題	主たる 数学的活動
1	拡大・縮小 (本時の授業)	拡大・縮小の意味を理解させる	相似の中心を利用して拡大図、縮小図を描く	直角三角形の3辺に内接する最大の正方形を描け 	内接する点に対角線上にあるということがわかる。
2	相似比や比の性質	相似な図形の対応する辺の長さや角の大きさを求めることができる	相似の中心を見つけ、辺の比を利用する	任意の三角形に内接する最大の正方形を描け 	相似の中心を探し、相似の中心の場所がわかる。

はじめに、問題を考えやすくするために特殊な三角形を設定することによって、自力解決しやすくする。
そのあと一般化し、任意の三角形で同じ考えの問題を自力解決することにより「拡大・縮小」や「相似」の意味や性質を理解しやすくした。

5 本時の授業（導入）

本時の目標：図形の拡大・縮小を利用して作図させ、拡大・縮小の意味を理解させる。

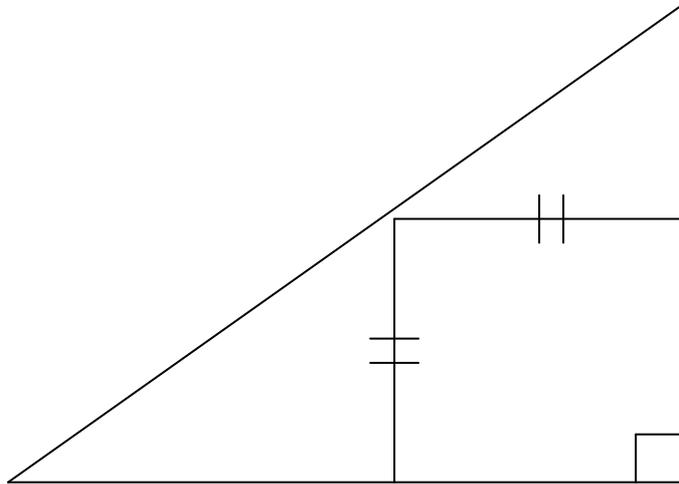
生徒の数学的活動

直角三角形の3辺に内接する最大の正方形を描け、という問題を解いていく中で相似の中心を見つけるために行う公理・定義を含んだ数学的活動。

- 1 自分が思う最大の正方形をたくさん描いてみる。
→正方形をたくさん描くことによりキレイに並べられないか、組織化できないかを考える。
- 2 任意の正方形の頂点を繋げた直線を引く。
→引いた直線と直角三角形の斜辺とが交わった点が正方形の残りの1頂点となり、3辺に内接する最大の正方形はただ1つに決まるということがわかる。
- 3 正方形の頂点を繋げた直線はどういう意味をなしているのかを考える。
→引いた直線が直角三角形の頂点まで伸ばせることがわかり、テーマである相似の中心を見つけることができる。

(問題)

直角三角形の3辺に内接する最大の正方形を描け。

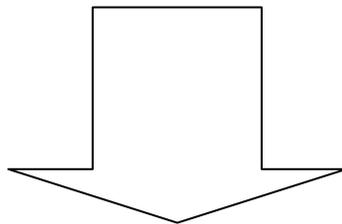


全体への問題の提示にあたって

自分が思う最大の正方形を描いてみよう。

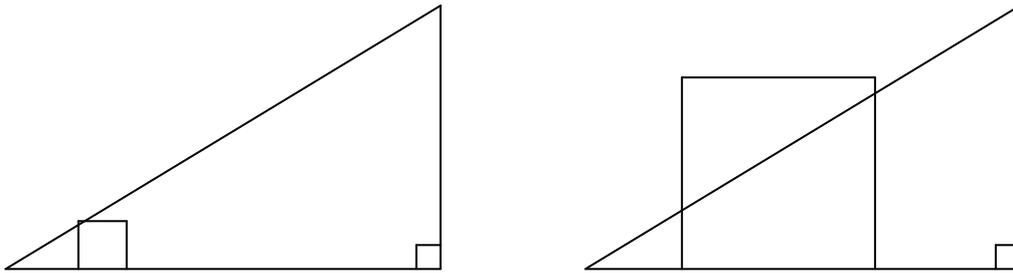
教師の意図

生徒はいろんな正方形を描いていくので、考え方（パターン）に分けて支援をする。



自力解決A

任意の正方形を描いている。

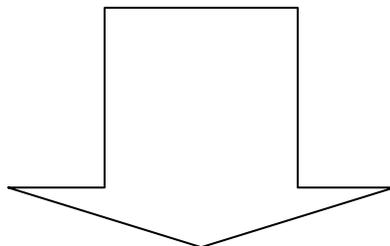


個人への支援：A→B

正方形をきれいにそろえることはできないかな？

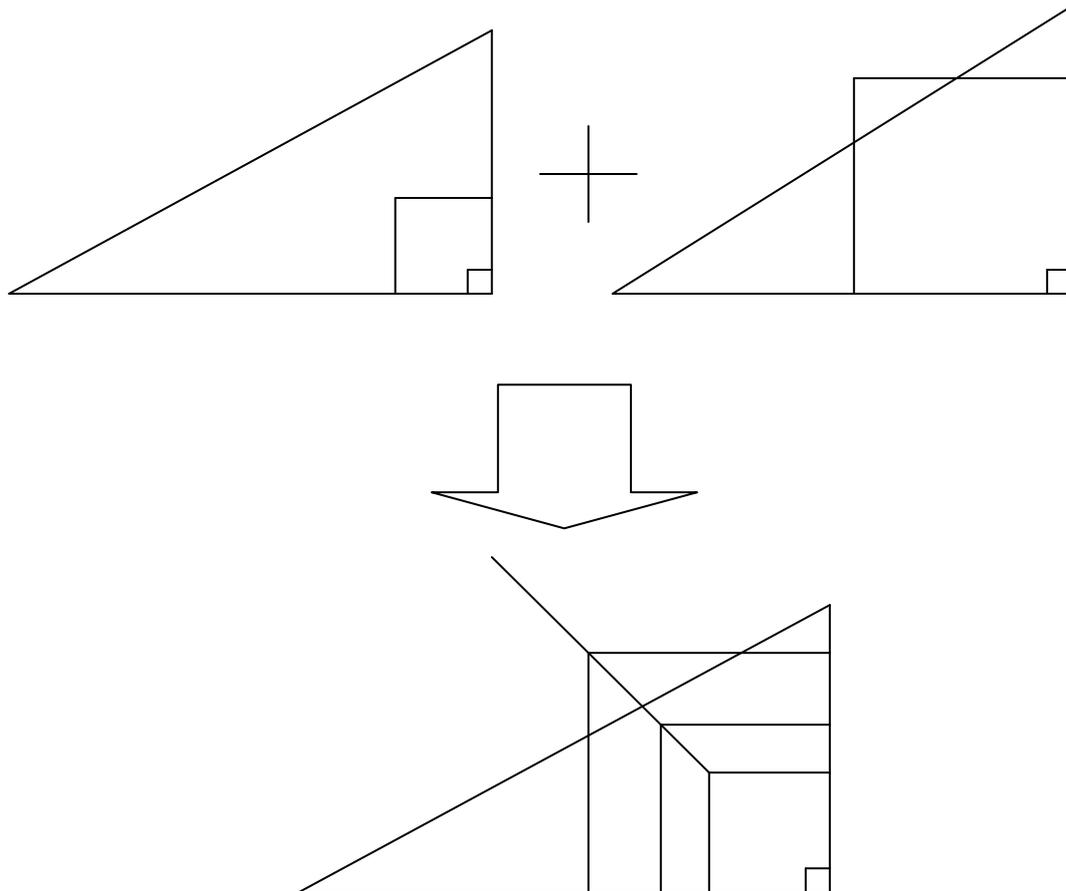
教師の意図

正方形をきれいにそろえデータをいっぱいとることにより組織化させたい。



自力解決B

直角と任意の正方形の1つの頂点を合わせたとき、対角線上の頂点が1直線上にならぶことに気づく。



個人への支援：B→C

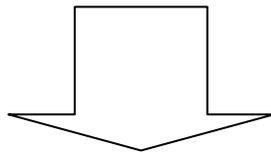
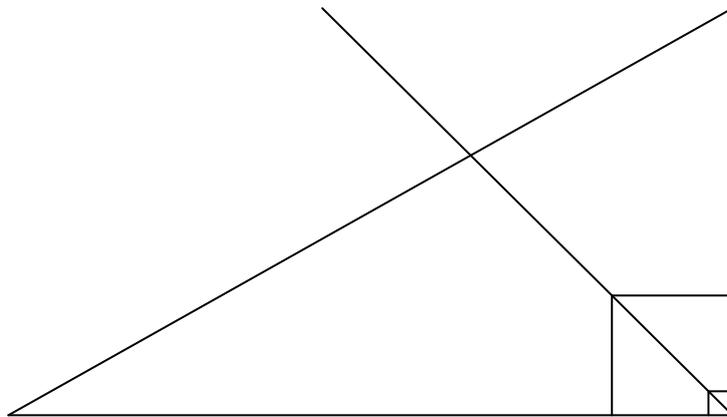
正方形が一つしかないとき、直線はどうすれば書けるかな？

教師の意図

この直線が正方形の対角線となっていることに気づかせ、直線は直角の部分つまり、相似の中心まで伸びるということを感じさせたい。

自力解決C

直線は直角三角形の角の二等分線になっており、角の二等分線と直角三角形の斜辺とが交わった点が正方形の残りの1頂点となり、三角形の3辺に内接する最大の正方形を求めることができる。



個人への支援

直角三角形ではなくて任意の三角形の場合はどうなるかな？

教師の意図

直角三角形の場合だけでなく、一般性も成り立つことを確認する。

練り上げ

問題の提示での場面（自力解決(A)までできていることが条件である。）

(T)→先生 (S)→生徒

自力解決 B 正方形の頂点が1直線上にならぶことを理解させる。

(T)「たくさん書いた正方形のひとつの頂点だけ直角三角形に接していないよね、この頂点について何か考えてみようか」

(S)「う～ん、あっ正方形の頂点を結ぶと一直線になる！」

自力解決 B→C 一直線と直角三角形の斜辺と交わった点が正方形の残りの1頂点になることを理解させる。

(T)「結んだ直線を使い直角三角形の3辺に内接する最大の正方形がみつけれられるかもしれないよ。」

(S)「う～ん、あっ正方形のひとつの頂点だけ直角三角形に接していないから、ひとつの頂点が正三角形に接するようにするばいいんだ」

・直線を使い直角三角形の斜辺と交わった正方形の残りの1頂点をもとめる。

(T)「正方形の点で直角三角形に接していない点はどこにくるのかな？」

(S)「一直線と直角三角形の斜辺と交わった点が正方形の残りの1頂点になるんだ！」

自力解決 C 相似の中心は直角三角形の頂点にくることを理解させる。

(T)「ところで、みんなが結んでくれた直線はどういう意味があるのかな？」

(S)「正方形の角の2等分線になっています。」

(T)「そうだね。つまり正方形の対角線になっていることがわかるね。」

(T)「じゃあこの直線はどこまで伸ばしていくことができるかな？」

(S)「直角三角形の頂点を通ります。」

(T)「その通り。では、相似の中心はもうどこかわかるよね？」

(S)「直角三角形の頂点！」

自力解決 C→

(T)「直角三角形ではなくて任意の三角形の場合はどうなるかな？」

↓
一般化

6 振り返り

はじめ、このレポートの作成にあたって相似な図形の歴史から調べて、大事なこと・重要なことを見つけようとしたが、相似な図形の歴史が始まったのが紀元前の大昔の話で「ユークリッド原論」というものだった。さらに、この「ユークリッド原論」に書かれていることが難しく、かつ、奥深いもので、ほとんど理解することができず、この先どう進めたらよいか途方に暮れることもあった。

そんな中、先生の助言もあり、数学学習指導要領やいろんな相似な図形の具体例を調べて、考えることで大事なこと・重要なことや中心となる考えが徐々に見えてくるようになった。その中で私たちの班の大事にしたいことやテーマが決まってきた、生徒がそのテーマを達成できるような問題を作成することを心がけ、数学が苦手な生徒でもこの単元は図形の性質や相似条件を理解することで興味・関心のある単元のひとつにできるような授業にしたいという思いを込めて、それを指導計画・本時の授業に盛り込んだ。

指導計画を考える中で、私たちは「拡大・縮小」を小学校で習っていたし、今でも小学校で習うと思っていたけど違っていただけに驚き、現在と過去の学習指導要領を調べるきっかけになった。今の学習指導要領では中学校の相似の授業の前に習うようになっているが、拡大縮小から相似につなげることをしっかりしないと生徒が戸惑うだろうと思った。

本時の授業は本来なら、1時間目から任意の三角形を設定する予定だったが、同学科の数名にこの問題(J3(9)の2時間目に設定している問題)を解かせたところ、ほとんどの者が完答できなかったため問題を替えることになった。しかし今思えば、そうすることによって私たちが大事にしたいことや中心となる考えがより伝わりやすいことになったと思う。同学科の問題にチャレンジしてくれた者に感謝している。

この指導計画・本時の授業を通して、「拡大・縮小」した図形の対応する点を通るように相似の中心からそれぞれ直線をひくと、図形の形は変わっていないこ

とがわかり、多角形でもこのことがいえるので、実際に生徒に線を引かせることにより「拡大・縮小」をより理解させたい。

また、「相似条件」を使って三角形の相似を証明することによって他の図形の性質も証明することができるので図形の性質を覚えるのではなく、自分で導き出せるようにするのような授業づくりをしたかったが、今回は「相似」の導入部分に力を注いだので2時間分の指導計画を考えることで精一杯になってしまい、「相似」の単元のこのあとの学習をどのように発展させていくかが私たちの課題のひとつになった。

7 参考文献

ユークリッド (中村幸四郎他訳) : ユークリッド原論. 共立出版

ユークリッド原論(命題 VI-20)

<http://math.pisan-dub.jp/euclid/index.php?itemid=167>