

J 2・数と式②

「一次方程式の導入」

テーマ：文字を使うことのよさを知る

平成 20 年 2 月 29 日（金）

班員：井田 有美

植木 誉守

東郷 秀信

松田 京子

山下 裕介

- 目次 -

1	単元設定理由	
1.1	単元設定理由	(3)
2	教材研究	
2.1	方程式の歴史について	
2.1.1	方程式の重要性	(4)
2.1.2	方程式の起源	
2.1.3	「九章算術」について	
2.1.4	「方程」について	
2.1.5	「算木（さんぎ）」について	(7)
2.2	記号法の歴史	
2.2.1	記号法の歴史	
2.2.2	未知数が x となった理由	
2.3	方程式の歴史についての考察	(8)
2.4	数学学習指導要領の歴史	
2.4.1	学習指導要領における「方程式」の目標・内容	(9)
2.4.2	学習指導要領の考察（数学科について、「方程式」について）	(13)
2.5	テーマ設定の理由	(16)
2.6	教科書比較	
2.6.1	平成9年度と平成18年度の教科書比較と考察	(17)
2.6.2	現行の教科書の比較と考察	(19)
2.6.3	「方程式」の導入となる問題の比較と考察	(20)
3	授業設計	
3.1	単元について	(22)
3.2	指導計画	(23)
3.3	本時の学習	(24)
3.3.1	指導にあたって（教材観、指導観、生徒観）	
3.3.2	本時のねらい	
3.3.3	学習過程	
4	振り返り・問題点	(29)

1 単元設定理由

1.1 単元設定理由

今回の数学学習指導設計Ⅱの講義で、中学数学の領域「数と式」において、方程式の単元を行おうとした理由は、

- ・教育実習での研究授業を見ていて、方程式には多様な考え方があるということに気づき、1つ1つの解法を詳しく調べてみることで方程式についての知識が少しでも深まると思ったから。
- ・連立方程式という案も出たのだが、方程式というのは中学2年や3年で学ぶ連立方程式や二次方程式の基礎となる単元であるので、まずはしっかりと基礎づくりをしておこうと思ったから。
- ・ただ解くだけでなく、文章題を使うことで身近な出来事からも問題を作ることができるから。

である。今回はその中でも導入部分となる1限目を中心に考えた。

2 教材研究

2.1 方程式の歴史について

2.1.1 方程式の重要性

方程式が数学の歴史上でどのように重要になってきたのかという点について、方程式を紙にかく方法が推論を一步一步記録するという意味で、演算に節目につけるという働きがある。また、計算過程を振り返ることができることから議論することができるので、「式を書く」→「変形」→「解く」という一連の流れにおいて、1番大切である式の変形のプロセスを見ることができる。したがって、算木やそろばんでは目に付かなくても、式に書き留めることで見えてくることありうる。

2.1.2 「方程式」の起源

九章算術の「方程」の章では、加減法によって連立一次方程式を解くことが論ぜられている。方程は、現在われわれが使っている「方程式」という用語の起源であるが、それは言葉のもとの意味から転じた意味であり、もともとは連立一次方程式を解くという意味であった。

2.1.3 「九章算術」について

九章算術は、その名のとおり数学について九章から成り立っている本である。

第1章『方田』、第2章『粟田』、第3章『衰分』 第4章『少広』、第5章『商功』、第6章『均輸』 第7章『盈不足』、第8章『方程』、第9章『句股』
--

現存している中では最古となる中国の数学書であり、制作年代ははっきりとはわかっていないのだが紀元前の1世紀から紀元後の2世紀といわれている。著者は不明であるが、263年に劉徽(りゅうき)が注釈本を出していた。数学の問題が中心となっている本であるので、全部で問題が246問掲載されている。日本にやってきた経緯は、平安時代に遣唐使によって紹介された。大宝律令では、算博士という官吏には九章算術をはじめとした中国の算書の知識が要求された。

2.1.4 「方程」について

「方程」は九章算術の第8章の内容で、現在の「方程式」という言葉のもとになっているもので連立一次方程式について述べられている。 x, y といった未知数を表示することなく、その係数や乗数項を、算木を用いて二桁に表示することが方程である。また、「程」という漢字にはわりあてる(課程)という意味があることから、この計算を「方程術」(しかくにわりあてる)と名づけられている。この計算方法は方程類型問題の創術である。

九章算術卷八

晉 劉 徽 注

唐 李 淳 風 注 釋

方程以御錯糝正負

今有上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九斗上禾
 二秉中禾三秉下禾一秉實三十四斗上禾一秉中禾
 二秉下禾三秉實二十六斗問上中下禾實一秉各幾
 何答曰上禾一秉九斗四分斗之一中禾一秉四斗四
 分斗之一下禾一秉二斗四分斗之三

案三原本訛
 一作一今改正



九章算術

卷八

(資料1) 「九章算術」(例題) 原本

⑨ 中行の上の項で下の項を割る。	0	180	0	765	中行
	0	0	3		⑩ 上
	0	180	2		中
	36	0	1		下
	99	765	39		実
	左行	中行	右行		

⑥ 左行の上の項で下の項を割る。
 その答が、下禾一たばの実の量二斗四分の三である。

0	0	⑦ 上
0	180	中
36	36	下
99	874	実
左行	中行	

⑤ 上 中 下 実
 0 0 3
 0 5 2
 36 1 1
 99 24 39
 左行 中行 右行

左行の下禾の項で、実の項を割って、下禾一たばの実が得られる。

0	0	3	③ 上
4	5	2	中
8	1	1	下
39	24	39	実
左行	中行	右行	
0	0	3	④ 上
20	5	2	中
40	1	1	下
195	24	39	実
左行	中行	右行	

1	2	3	① 上
2	3	2	中
3	1	1	下
26	34	39	実
左行	中行	右行	
3	6	3	② 上
6	9	2	中
9	3	1	下
78	102	39	実
左行	中行	右行	

⑮ 右行の下の項を、上の項で割る。	0	540	⑬ 上
	360	360	中
	0	0	下
	1530	6525	実
	中行	右行	
⑰ 右行の下の項を、上の項で割る。	540	⑭ 上	
	0	中	
	0	下	
	4995	実	
	右行		
	0	108	⑯ 上
	180	72	中
	0	0	下
	765	1305	実
	中行	右行	

(図表1) 例題の解法

[例題]

いま上禾（注1）三たばと中禾二たばと下禾一たばでは、実は三十九斗あり、上禾二たばと中禾三たばと下禾一たばでは、実は三十四斗であり、上禾一たばと中禾二たばと下禾三たばでは、実は二十六斗である。問う、上中下禾の実は、一たばそれぞれいくらか。

答、上禾一たば、九斗と四分の一斗。

中禾一たば、四斗と四分の一斗。

下禾一たば、二斗と四分の三斗。

（注1）禾…穀物を指す。当時は梁（おおあわ）を指していた。

2.1.5 「算木（さんぎ）」について

算木とは、和算で用いる計算道具であり、中国で紀元前から用いられ、日本でも奈良時代から室町時代まで使用されていた。竹を材料としたマッチ棒のようなもので、あらかじめ区割りされた布や板の上において計算を進める道具のことである。そろばんとは異なり高次の代数方程式を解くことができる。

- 参考文献 -

- ・科学の名著2 中国天文学・数学集（朝日出版社）
- ・世界の名著続1 中国の科学 九章算術（中央公論社）

2.2 記号法の歴史

2.2.1 記号法の歴史

- ・記号化が最初に行われたのは、方程式の未知数である。ギリシアのディオファントス（約246～330）が、現代の未知数 x の代わりとなる言葉 (*arithmos*) の最後の文字 ς を用いた。同様に x^2 は平方 (*dynamis*) の頭文字の Δ 、 x^3 は立法 (*kubos*) の頭文字の \mathbf{K} を用いていた。
- ・フランスのヴィエタ（1540～1603、フランス）が初めて未知数だけでなく、既知数にも文字を用いた。そのときに既知数は子音字 $B, C, D \dots$ を用い、未知数には母音字 $A, E \dots$ を用いた。
- ・デカルト（1596～1640、フランス）は、アルファベットの最初のほう ($a, b, c \dots$) を既知数とし、最後のほう ($z, y, x \dots$) を未知数とした。係数を左に、べき数を右に書くという現在の表記法を始めた。
- ・日本で方程式の記述化を行ったのは関孝和（1642?～1708?・出身地は不明）である。彼はそろばんや算木から抜け出し、独自の和算の世界を創始した。

2.2.2 未知数が x となった理由

- ・未知数が x となった理由の1つとして、ドイツの代数学者は未知数を表すのに $2e$ という記号を用いているが、これは *radix* (根) の r と x を縮約したものである。この $2e$ が x に似ているところから x を未知数の記号として多く採用したのだらうというのがひとつの説となっている。

- 参考文献 -

- ・日本の数学 西洋の数学 - 比較数学史の試み - 村田全 著 (中公新書)
- ・数学史 - 形成の立場から - 中村幸四郎 著 (共立出版)
- ・数字と数学記号の歴史 大矢真一 片野善一郎 著 (裳華房)

2.3 方程式の歴史についての考察

- ・方程式と似たようなものが、かなり以前からいろいろな国で使われていたことがわかった。
- ・式に書き留めることで、算木やそろばんでは目に付かなかったものが見えてくると考える。
- ・「式を書く」→「変形」→「解く」という一連の流れにおいて、1番大切である式の変形のプロセスを見ることができ、計算過程を振り返ることができるので、このような点から方程式が数学の歴史上で重要になってきたと考える。
- ・日本が未知数を文字 x で表すようになったのは、ドイツの学問をもとに日本の学問を研究・発展させてきたからであると考えられる。
- ・現在、使用している方程式は中国の九章算術の内容と、ヨーロッパで行われた記号化の内容が合わさったものであると考えられる。

2.4 数学学習指導要領の歴史

2.4.1 学習指導要領における「方程式」の目標・内容

学習指導要領とは、文部科学省（以前は文部省）が告示する教育課程の基準であり、中学校数学科における学習指導要領は昭和 22 年（試案）、昭和 23 年、昭和 26 年（試案）、昭和 33 年、昭和 44 年、昭和 52 年、平成元年、平成 10 年に告示されていて、現在までに 7 回改訂されている。また、一元一次方程式の領域は昭和 26 年以降から存在していて、昭和 26 年は「代数的表現」、昭和 33 年は「式」、昭和 44 年は「数・式」、昭和 52 年以降は「数と式」となっている。

	目標	内容
昭和 22 年度 (試案)	文章を読んで関係ある量を見出だし、その関係を式に書き表し、それをを用いて計算すること。	<ul style="list-style-type: none">・指導方法（生徒の活動）として、簡単な関係を文字によって書き表すことを習う。方程式の意味について話しあう。移項や連立方程式、一次不等式の意味を習う。方程式や連立方程式、簡単な不等式の解法を習う。不等式についての基本的な性質を考える。といったようなものがあつた。等式の性質についてはその前の段階で学習しておき、方程式ではそれをふまえた学習を行っていた。・指導の考察として、観察から方程式の変形や移項の意味がはっきりとわかっているかどうか。日常生活で方程式の考えを用いているかどうか。根の意味がわかっているかどうか。について考え、テストから移項の能力、方程式や不等式を解く能力、日常生活での事柄を方程式や不等式にまとめる能力をみていた。
昭和 23 年度		<ul style="list-style-type: none">・この学習指導要領は日常生活の出来事と数学のつながりを重点に述べてあり、すべての内容について例が述べられてある。

		<ul style="list-style-type: none"> ・目標は「日常生活に起こる問題を、方程式を用いて解く。」としていて、未知の量を文字で表すことや、量の中から相等関係を見いだして未知の量を含む等式を作ること、方程式を解き検算をすることを技能としていた。 ・方程式と日常生活の関係の例として、『株の利まわりを見積もるため、買値、配当金、利まわりについての方程式をつくり、利まわりを求める』というものがあげられた。
昭和26年度 (試案)		<ul style="list-style-type: none"> ・「代数的表現」という領域に方程式は含まれていて、式による表現の長所や代数的表現の理解、代数的表現の指導、指導上の注意が書かれてある。 ・式による表現の長所として、1つは法則に関係する量が何と何であるか、その量がどのように関係をしているのかを示すことができるという点で、もう1つは機械的に計算できるように法則や関係がまとめているので、必要な結論を得るまでの思考を示しつつ能率よく運ぶことができるという点であった。 ・代数的表現の理解として、文字は普通の数と同じように計算の対象にすることができる等の文字の表す意味、等号は用いる場合によって意味の違いがあるという等号についての理解、公式はある数量が他の数量からどのような計算で求められるのかを計算式で一般的に示すことによって、数量の関係をあらわすことができるという数量の間の関係を表す式、方程式は特定の場合だけに成り立つ相当関係を等式で示すことによって、式中の文字のとり値を条件付けたものであるという方程式の意味を理解することを目標にしていた。

		<ul style="list-style-type: none"> ・方程式については、方程式についての指導、たて方の指導、とき方の理解について述べられている。 ・方程式についての指導については、未知数の数量についての条件を等式に書くこと、等式を数式の計算の関係を示すものとして機械的に解けるようにすることの2つに重点を置いていた。 ・方程式の立て方の指導については、方程式は文字が特別な値をとったときにだけ成り立つ等式で、等式が文字のとり値に条件を与えていることと、どのように方程式をたてていくかという方法についての理解を大切にしていた。 ・方程式の解き方の理解については、逆算による解き方、等式の性質を利用した解き方、移項による解き方と指導していくことについて、計算が楽になるということ大切にしていた。
昭和33年度	文字を用いて数量についての関係や法則を一般的にしかも簡潔に表現して、ものごとを考察し、処理する能力を養う。	<ul style="list-style-type: none"> ・方程式については、「等式の性質を理解させて、これを用いて方程式を解くことができるようになる」ことを目標としていた。その内容として、一元一次方程式の解法や解法を利用して問題を解くこと、係数の簡単な二元一次方程式の解法や解法を利用して簡単な問題を解くことができるということを行っていた。
昭和44年度	文字を用いることによって、数量などの間の関係や法則が、一般的に、かつ簡潔に式に表現でき、形式的に処理できることを理解させる。また、方程式や不等式について、その中の文字や解を集合の考えをもとにしてみるができるようにし、それらを用いる能力を伸ばす。	<ul style="list-style-type: none"> ・方程式は「数・式」という領域に含まれて、文字を用いることで、数量などの間の関係や法則が一般的で、かつ簡潔に表現でき形式的に処理できることを理解させる。また、方程式や不等式についてその中の文字や解を集合の考えをもとにしてみるができるようにし、それらを用いる能力を伸ばすということを目指していた。そして、式中の文字や解の意味を理解させ、等式の性質を理解して用いることで、

		一元一次方程式を解くことができるようになることを内容としていた。
昭和52年度	文字を用いることによって、数量などの関係や法則が一般的にかつ簡潔に式に表現でき、形式的に処理できるようにするとともに、方程式の意味を理解させ、それを用いる能力を養う。	・方程式は「数と式」という領域に含まれて、「文字を用いることによって、数量などの関係や法則を一般的にかつ簡潔に式に表現でき、形式的に処理できるようにするとともに、方程式の意味を理解させ、それを用いる能力を養う」ことを中学1年为目标として、方程式の中の文字や解の意味を理解する、等式の性質を用いて一元一次方程式を解くことを内容とした。
平成元年度	文字を用いることの意義及び方程式の意味を理解するとともに、数量などの関係や法則を一般的にかつ簡潔に表現し、処理できるようにする。	・方程式は「数と式」という領域に含まれて、方程式の意味を理解し、1元1次方程式を用いることができるようにする。具体的には、方程式の中の文字や解の意味、等式の性質、1元1次方程式を解くことを内容とした。
平成10年度	平成元年度と変更なし。	平成元年度と変更なし。

昭和23年度には目標は明記されていないが、“技能”として「量の中に相等関係を見いだして、未知量を含む等式を作る。」「一段階の方程式を解く。」と記されており、これは昭和22年度の目標と類似した表現となっている。

- 参考文献 -

- ・文部省 学習指導要領 7・8 算数・数学 (日本図書)
- ・‘89告示 中学校学習指導要領 数学科の解説と実践 (小学館)
- ・<http://www.nicer.go.jp/guideline/old/> 過去の学習指導要領
- ・中学校学習指導要領解説 数学編 平成10年度改訂 (文部科学省)

2.4.2 学習指導要領の考察

- 数学科の目標について -

- ・昭和22年 「小学校における算数科，中学校における数学科の目的は，日常の色々な現象に即して，数・量・形の観念を明らかにし，現象を考察処理する能力と，科学的な生活態度を養うことである。」とある。科学的な生活態度を養うこととは何？と思った。
- ・昭和26年は文章の内容が全体的に分かりにくい。しかし、「中学校・高等学校をとおして，数学科として常にねらうべき方向を示したものである。」という意味では，分からなくもない。
- ・昭和33年の改訂では，昭和26年の内容が「社会で有為な人間となるための資質として，数学についてのいろいろな能力が重要なものであることを知り，数学を生かして社会に貢献していく習慣と能力とを養う。」 「職業生活をしていくための資質として，数学についてのいろいろな能力が重要なものであることを知り，いろいろな職業の分野で，数学を生かして用いていく習慣と能力を養う」から，「数学が生活に役だつことや，数学と科学・技術との関係などを知らせ，数学を積極的に活用する態度を養う。」と、「職業生活や社会に貢献」から，「生活」に変わっていることから，日常生活に関する内容が簡略されている。
- ・昭和44年の改訂では，「生活」から「事象」に変わっている。このことから数学を身近なものごとからより発展させたものごとに活用させていこうとしているように思われる。
- ・昭和52年の改訂では，「事象」や「生活」などの単語がはずされて，「文字を用いることによって，数量などの関係や法則が一般的にかつ簡潔に式に表現でき，形式的に処理できるようにするとともに，方程式の意味を理解させ，それをを用いる能力を養う。」と書かれており，形式的に処理できるようにするなど，数学に対する能力の向上に絞られている気がする。生活や事象などと結びつきが少なく何のために数学をしているのか分かりにくい。
- ・平成元年の改訂では，「事象」という単語が復活している。事象があり，数学を用いて考えることによって日常生活に数学がいかに役立つか分かりやすくなる。
- ・平成10年の改訂では，「数学活動の楽しさ」が追加されている。生徒たちが数学に興味をもってくれるように楽しい要素が授業にもとめられている。

- 方程式について -

- ・昭和22年の学習指導要領では、最終的に日常生活に結び付けている。
- ・指導活動のなかに「意味を習う」「意味を話し合う」などある。「意味を話し合う」という記述は、この年のみだった。

- ・昭和23年の改訂では、「未知の量を x などの文字を用いて表わす。」という記述がある。 x のように具体的な文字が記されているのはこの年だけである。
- ・中3で一次方程式を学習している。中3でやるので、方程式や連立方程式の意味についてグラフを書いて理解するとしている。
- ・日常生活でいかに活用させるか重要視されている気がする。
- ・方程式を用いることが生徒にとっていかに効果的であることを説明する、ということが述べられている。

- ・昭和26年の改訂では、日常生活でいかに活用させるかを重要視している。
- ・方程式の立て方・解き方について、細かく説明してあり、また、生徒への指導の仕方や指導上の注意などが書かれてある。

- ・昭和33年の改訂では、「文字で表わされた式を一つの数とみること。」とあるが意味が分かりづらい。
- ・日常問題から離れている。
- ・数量的な関係について述べられている。
- ・方程式の単元の中に、等式の性質についての学習が明確に取り入れ始めた。

- ・昭和44年の改訂では、「方程式や不等式について、その中の文字や解を集合の考えをもとにしてみるができるように、それらを用いる能力を伸ばす。」と追加されている。
- ・計算する能力を伸ばすと書いてある。
- ・日常的な問題から離れている。

- ・昭和52年の改訂では、「文字を用いることによって、数量などの関係や法則が一般的にかつ簡潔に式に表現でき、形式的に処理できるようにするとともに、方程式の意味を理解させ、それを用いる能力を養う。」とある。この改訂で「方程式の意味を理解」が記されている。
- ・「事象の中に数量関係を見だし、それを文字を用いて式に表現し活用する能力を一層伸ばす。」とある。
- ・「事象」の復活。

- 平成元年、中2で「事象の中に数量の関係を見だし、それを文字を用いて式に表現し活用する能力を伸ばす。」とある。
 - 「数を正の数と負の数まで拡張し、数の概念についての理解を深める。また、文字を用いることの意義及び方程式の意味を理解するとともに、数量などの関係や法則を一般的にかつ簡潔に表現し、処理できるようにする。」「数を正の数と負の数まで拡張し、数の概念についての理解を深める」という文章が追加されている。
 - 方程式の目標が簡潔にまとめられている。
-
- 平成10年の改訂では、「文字を用いることの意義を理解すること」とある。
 - 方程式についての目標には全く変更がない。

2.5 テーマ設定理由

テーマ：「文字を使うことのよさを知る」

単元設定を行う際に、話し合いの中で「方程式というのは中学2年や3年で学ぶ連立方程式や二次方程式の基礎となる単元であるので、まずはしっかりと基礎づくりをしておこうと思ったから。」という点がある。そのような点も考慮して、今回は基礎となる1元1次方程式の中でも、導入部分となる1限目を選んだ。1限目で大切となる内容は、「文字のよさに気づくことができる」ことであると考えた。

既習の内容では、逆思考の求め方でも解を求めることは可能である。ただし、学年が進むことで内容が「1次方程式」から「連立方程式」に進んだときに、未知数が2つになるので、逆思考の考え方では解を導くことに困難が生じる。さらに2年生で学習する「1次関数」では、文字を未知数とするのではなく変数とする。文字にも使い分けがでてくることから、1年生での「方程式」の導入部分で方程式の文字のよさについて学ぶ必要性が出てくると考えた。

したがって、「文字を使うことのよさを知る」というテーマから「未知数を既知数と見ることで文字を計算対象と見ることができ、計算が可能になる」「文字を用いた順思考での式のたて方を学習することにより方程式の計算が容易になる」ことについて学習することができる。

2.6 教科書比較

2.6.1 平成9年度と平成18年度の教科書比較と考察

	比較・考察
全体	<ul style="list-style-type: none"> 教科書の大きさについて、平成9年度の教科書と平成18年度の教科書を比較したときに、平成18年度の教科書の大きさのほうが大きくなっていて全ページにわたってカラーになっていた。 全体として、「問題を作ってみよう」などの内容が平成9年には含まれていない。 文章問題の増加や「解の意味を考える」といった問いかけなどから、平成18年度の教科書では「方程式の利用」に重点を置いている。 平成18年度では図や穴埋めなどを多く取り入れていて、丁寧な説明がされている。 平成9年度の方が、方程式の歴史について多く述べられている。
東京書籍	<ul style="list-style-type: none"> 「等式」を学ぶのに、平成9年度は、言葉で書いてあるのみだが、平成18年度は例題を設定し、図を用いて説明している。 平成9年度では、問題を作ってみようという内容はなかった。 平成9年度では、ディオファントスについての説明が書かれていた。 →方程式について興味を持たせるための内容であると思われる。 方程式を解く手順についてまとめられているのだが、平成9年度は「1次方程式の利用」の最後にあり、問題を解いてから確認するという形になっている。平成18年度は最初に書かれていて、それをふまえて問題を解くという形になっている。 →平成18年度では問題の解く手順を最初に教えることで、それを利用して解くことを狙っていると思うが、教師の立場としては平成9年度のような最後に解く手順をまとめてあるほうがよいのではないかと思われる。
大阪書籍	<ul style="list-style-type: none"> 導入の問題は同じだった。しかし、解答に入る問いかけでは同じことを生徒にさせようとしているが、文章が分かりやすくなっている。 平成9年度：文章の値によって、成り立ったり、成り立たなかったりする等式について考えよう。 平成18年度：等しい数量関係を表す式について考えよう。 平成18年度の教科書では「計算問題」というものがある。 平成9年度と平成18年度の教科書の内容にはほとんど変化が見られなかった。

<p>学校図書</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・平成 18 年度では□を使った穴埋めの式で生徒に解答させている。 →より分かりやすくしてあり、ヒントを与えることで解く手順がわかるようにしている。 ・分数などの解答では文章で詳細に説明している。 →より分かりやすくだと思うが、説明しすぎで、理解はできても自力で考えるということができないと思われる。 ・練習問題のページで、平成 9 年度では計算問題のみを掲載しているが、平成 18 年度では文章問題を取り入れている。 →平成 18 年度の指導要領の中の「方程式を解くことができ、それを利用できる」という点を重視していると思われる。 ・平成 9 年度では、単元の最後に「ディオファントスの生涯」や「アームス・パピルスの話」といった、方程式の歴史についての文章やその問題が載せてある。 →方程式を学習する上で、方程式の歴史や昔の問題を載せることで、方程式により興味を持ってもらえるよう促せるのではないかな。
<p>教育出版</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・平成 9 年度の導入では「リンド・パピルス」について書かれている。 「ある数にその $\frac{1}{7}$ を加えると 19 になる。ある数はいくつかな」 →昔から方程式があったということを紹介するためであると思われる。 ・平成 9 年度の章の問題は計算と文章題だったが、平成 18 年度では計算と文章題の他に、式の意味や答えについて考えさせる問題が多く含まれている。 (例) 「$3x + 2 = x$ と同じ解の方程式があるかどうかを調べます。 (ア) $x + 1 = -1$、(イ) $3x = x - 2$、(ウ) $2x = 3x + 3$、(エ) $3x + 4 = 7x + 8$ 全部解く他にどんな方法で調べることができるか、考えなさい。」 →ただ計算をして解を得るだけではないということを考えさせている。 ・平成 9 年度の章の問題 B に「$80x + 130 = 770$ となるような問題を作りなさい」という問題づくりがある。 →方程式の解の意味や方程式そのものの意味などを理解できる問題であると思われる。 ・平成 9 年度の方程式の利用で、例題の中に親子の年齢についての問題があったが、平成 18 年度では例題ではなく、章の問題の中にある。 →授業数が減ったことも原因ではないかと考える。

大 日 本 図 書	<ul style="list-style-type: none"> ・平成 9 年度では問題作りはなかったが、平成 18 年度では 2 回もある。 →自分で考えることの大切さを教えるためであり、方程式を本当に理解しているかを見るためであると思われる。 ・平成 18 年度では、最後に不等式が紹介されている。 ・平成 9 年度では、方程式の歴史について書かれている。
啓 林 館	<ul style="list-style-type: none"> ・全体として例題を説明するにあたって、平成 18 年度では平成 9 年度より絵や図を多く用いている。 ・平成 18 年度では「方程式の解き方」で、解き方について丁寧に説明されている。 ・平成 18 年度では「問題をつくってみよう」という学習がある。

- 参考文献 -

・教科用図書 中学 1 年 数学（啓林館・東京書籍・大阪書籍・数研出版・大日本図書・教育出版） 平成 18 年度・平成 9 年度

2.6.2 現行の教科書の比較と考察

- ・「等式」について、東京書籍・大日本図書・学校図書は「方程式」の単元のはじめに説明が書かれているが、教育出版・啓林館・大阪書籍は「文字式」の単元の最後に書かれている。
- ・方程式の解き方では $8x + 3 = 5x + 18$ のような普通の問題に加えて、かっこのある問題、小数・分数の問題を学習するようになっている。
- ・方程式の利用となる文章題では、金額の問題、道のり・速さ・時間の関係を使った問題はどの教科書でも学習するようになっている。
- ・東京書籍には、方程式の利用でカレンダーを用いた問題を例題に使っている。
- ・すべての教科書に 1 次方程式を解く手順、方程式を使って問題を解く手順がまとめられてある。
- ・大日本図書だけ計算練習のページがあり、文章問題より計算問題に重点を置いている。他の 5 社は計算問題より文章題のほうに重点を置いている。

2.6.3 「方程式」の導入となる問題の比較と考察

・啓林館

貯金箱に 500 円硬貨が何枚か入っています。重さをはかると全体は 154 g、500 円硬貨 1 枚は 7 g、貯金箱だけでは 70 g でした。
この貯金箱に入っている硬貨は何枚でしょうか？はいつている硬貨の枚数を x 枚として、重さの関係を等式に表してみましょう。

・学校図書

つり合っている天びんがあります。左側の皿の上には、クリップが 3 個と 1 円が 2 枚、右側の皿の上にはクリップが 1 個と 1 円玉が 10 枚のせてあります。
1 円玉 1 枚の重さを 1g とすると、クリップ 1 個の重さは何 g でしょうか？

・教育出版

ともやさんの学校では、1 年生 123 人が資源ゴミを集める 6 つの班と、はきそうじをする 3 つの班に分かれて、ボランティア活動をするようになりました。
1 つの班の人数は、資源ゴミを集める班がそれぞれ同じ人数で、はきそうじをする班がそれより 2 人ずつ多くなりました。資源ゴミを集める班の人数を求めてみましょう。

・大日本図書

9 枚の金貨があります。そのうち 1 枚だけがほかより軽いニセ金貨です。天びんを何回使うと、もっとも早くニセ金貨を見つけることができるでしょうか。

・東京書籍

1 g、3 g、9 g の 3 種類のおもりが 1 つずつあります。この 3 つのおもりと天びんを使って、1 g から 13 g まで、1 g きざみで重さをはかることができるでしょうか？

・大阪書籍

A：1 けたの正の整数を 1 つ決めて、その数を紙にかいてごらん。その数をあててみせるよ。
A：まず、その数を 5 倍してください。それに 1 を加えてください。全体を 2 倍してください。いくつになりますか？
B：62 になったよ。
A：はじめに決めた数は 6 ですね。
B：えっ、どうしてわかったのかな。

- 考察 -

- ・大日本図書や、東京書籍の内容は導入としては難しいと感じた。大日本図書においてはなにを意図しているのか分かりづらい。
- ・大阪書籍の導入は生徒の興味を引くような題材を使っていると思う。
- ・大日本図書と東京書籍に関しては、天びんを用いた問題にしている。ここで使う内容は等式である点を生かして、2つの皿を左辺・右辺とみなすことで、生徒の活動での立式を容易にする工夫であると考えられる。
- ・教育出版に関しては、資源ゴミを集める班とはきそうじをする班に分かれていて、それぞれの班内の人数がわからない。したがって、未知数が2つ存在するのだが、一方の人数を基準にすることでもう一方の人数を表すことができることを考えさせたいのではないかと思う。そこから順思考での立式ができることを目指した問題設定になっているのではないかと考える。
- ・教育出版の問題は文字を使うことのよさを考えた問題ではないか、と思う。
- ・啓林館は、前の単元内で学習した等式の復習を兼ねた、重さの関係を等式で表すことから解を導いていく順思考での立式を重点に置いた問題であると思う。
- ・大阪書籍の問題に関しては、1桁の正の整数から指定の操作を行うことで規則性が生まれることに気づくことができるような問題設定なのではないかと思う。また、その規則性から順思考での立式ができることを目指していると考えられる。
- ・6社の教科書を比較して、導入部分では順思考での立式ができることを目的としているのではないかと思う。また、加えて文字を使うことのよさを考える内容になっていると思う。

- 参考文献 -

- ・教科用図書 中学1年 数学（啓林館・東京書籍・大阪書籍・学校図書・大日本図書・教育出版）

3 授業設計

3.1 単元について

これまでに、小学校での学習において数式に○や□などの記号を取り入れて数量関係を表し、逆思考の考え方をを用いて答えを導いたりしてきた。中学校では「方程式」の学習までに「文字式」や「等式」など、○や□などの記号に代わる a, b, x, y などの文字を用いており、これは方程式を学習する上での基礎となるものである。また、○や□などの記号は代入するための場所として扱われてきたが、これから用いる x, y などの文字は他の数と同様、計算対象として扱われる。本単元では、中学2年で学習する「連立方程式」、中学3年で学習する「2次方程式」の基礎となる「1元1次方程式」について、上記の学習をもとにして文字を用いた数量関係を表す式のよさや、未知数を文字でおくことのよさ、計算を学習する。

方程式のよさは、自分の考えを記録する意味で、演算に節目につけるといいう働きがある。また、計算過程を振り返ることができ議論することができる。「式をたてる」→「変形」→「解く」という一連の流れにおいて、1番大切である式の変形のプロセスを見ることが出来る。

本単元では、表から読み取ることのできる数の変動に注目して解を導くことや、数直線または線分図を用いて数量の関係を視覚的に把握し、数直線や線分図内での未知数を文字でおき、式の形で表現するという構成をとっている。文字を式に組み込むことで、文字を計算対象としてみることから、未知数を既知数と同様に扱うことができる。

学習の内容として1番重要な内容は、等式の性質である。前の単元で学習した等式について左辺と右辺が等しいということをしっかりと確認することで、「 $=$ 」の意味について理解し、左辺と右辺の項が何を表しているのかを考え、式をたてることができる。導入となる1時間目では方程式をたてることができ、その式をどうすればうまく解けるかというところから、等式の性質へとつながりを持たせたい。等式の性質では、左辺と右辺に同じ操作を行っても式の関係性は変わらない。その点から一方の辺の項を、符号を変えて他方の辺に移す、移項という操作に結びつける。さらに、等式の性質や移項を用いて1元1次方程式でのかっこを含む方程式、分数・小数を含む方程式の変形や計算、文章問題、自分で問題を作成するなどの問題で方程式がどのようなものであるか理解することができる。

最終的には、解を求めるまでの見通しを立て、解いた式を見直すことで計算過程を振り返ることができるようになることを目指す。

3.2 指導計画 (12)

(第1次) 方程式 (3) (本時 1/3)

(第2次) 方程式の計算 (4)

- ・方程式の解き方
- ・かっこのついた方程式の解き方
- ・分数、小数を含む方程式の解き方

(第3次) 方程式の利用 (5)

- ・代金の問題
- ・過不足の問題
- ・道のり、速さ、時間の関係を用いた問題
- ・問題をつくる
- ・まとめ

(第1次)

時	学習内容	目標	中心となる考え	問題	主となる数学的活動
1 (本時)	方程式の導	のさ の解	問題の 式をた るこ と き る	学習過程 考	C: を用い 解を める B: 分 を用い 、 考 解 く A: 2 つの数 関係を 式
2	式の	式の の解	を ったとき、 式の関係 の なるか くこと き る	2つの の りの関係 つい	C: 1つ つ りを 解 を導く B: Cの を 式 A: 、 を と関係 ない
3	式の	の解	方の の を、 を え 、 方の こと きる	と と をいく か いま た を り3 く い、 を の 2 つ 、 51 た つ いま た か	C: 3つの数 を1つの を 用い 方程式 こと きる B: 式の を用い 解を めること きる A: を用い 解を めるこ と きる

3.3 本時の学習

3.3.1 指導にあたって

教材観：現在までに学習した「文字式」や「等式」を利用して、小学校で学習した逆思考の考え方に加えて、順思考の考え方で式をたてることができるということについて知る。教科書の導入部分の比較をして、本時の授業では導入として難易度の高い問題を扱わない。問題から解を導くまでの見通しが立てやすく、比較的容易に解を導くことのできる問題にすることで、解を求めることに対して順思考で式をたてることができることを知り、文字を使うことのよさに気づくことができる。

また、未知数を文字 x で表し、既知数であると仮定することで未知数が計算の対象になり、計算が可能になることから文字を使うことのよさについて知る。

指導観：本時の授業で扱う問題は比較的難易度が低い問題であるので、生徒は表や線分図などを用いて容易に解を導くことが考えられる。本時は解を求めることではなく、解の解き方に重点を置くことを意識させながら計算対象となるものの関係を表現するように支援することで、生徒が自ら順思考の考えをもとに等式を用いた解法に気づくことができるようにしたい。

すでに方程式を知っている生徒に対しては、解を導くことだけで終わることなく計算過程内の項の意味について考えたり、問題の一部を変えたりすることで方程式にはどのようなよさがあるのかについて考えてもらいたい。

生徒観：現在までに未知数の扱いについては文字を用いるのではなく、記号を用いてきた。また、巡視項の考え方より逆思考による計算を用いて解を導くことに慣れていると考えられる。

3.3.2 本時のねらい

- ・文字のよさを知る。
- ・文字を式に組み込むことで文字を計算対象とみることから、未知数を既知数と同等に扱うことができる。
- ・問題の順序に式を表すことができる。

3.3.3 学習過程

活…期待される生徒の活動

支1…教師の支援（現在の活動を実現させる支援）

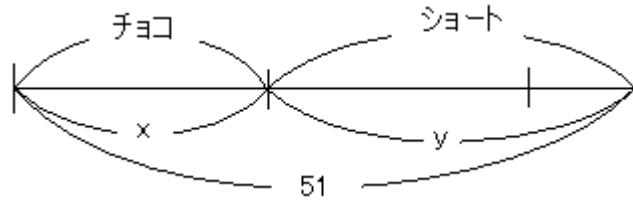
支2…教師の支援（次の活動を促す支援）

支3…教師の支援（数学的価値に気づかせる支援）

意…教師の意図

学習内容	活動への支援・工夫	教師の意図																								
1.問題場面を把握する。																										
	<p>ショートケーキとチョコレートケーキをいくつか買いました。ショートケーキをチョコレートケーキより3個多く買ったら、合わせて51個でした。それぞれ何個ずつ買いましたか？</p>																									
2.自力解決	<p>○線分図から全体の関係を把握し、等式を用いて方程式がたてていけるように支援する。</p>																									
	<p>自力解決 C_1 個数の差が3個であることに注目して解を導いている。</p> <table border="1" data-bbox="515 913 927 1061"> <tr><td>チョコ</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td></tr> <tr><td>ショート</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>合計</td><td>49</td><td>51</td><td>53</td><td>55</td></tr> </table> <p>支1 具体的にケーキの個数を与えて考えてみよう。 支2 数量の関係を図で表してみよう。</p>	チョコ	23	24	25	26	ショート	26	27	28	29	合計	49	51	53	55	2つの関係を理解することができる。									
チョコ	23	24	25	26																						
ショート	26	27	28	29																						
合計	49	51	53	55																						
	<p>自力解決 C_2 合計が51個であることを利用する。 チョコレートケーキの個数を1つずつ増やすと、2種類のケーキの個数の差は2ずつ少なくなる。 この操作を何回繰り返すと、差が3個になるのかという点を考えて解を求める。</p> <table border="1" data-bbox="411 1585 1023 1733"> <tr><td>チョコ</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>...</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>ショート</td><td>41</td><td>40</td><td>39</td><td>...</td><td>29</td><td>28</td><td>27</td></tr> <tr><td>差</td><td>31</td><td>29</td><td>27</td><td>...</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> </table> <p>支1 具体的にケーキの個数を与えて考えてみよう。 支2 数量の関係を図で表してみよう。</p>	チョコ	10	11	12	...	22	23	24	ショート	41	40	39	...	29	28	27	差	31	29	27	...	7	5	3	2つの関係を变量として見るができる。
チョコ	10	11	12	...	22	23	24																			
ショート	41	40	39	...	29	28	27																			
差	31	29	27	...	7	5	3																			

自力解決 B_1



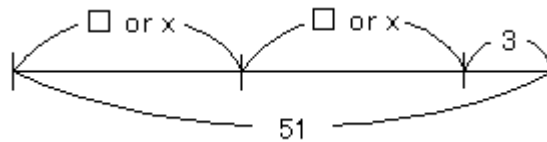
$$(51 - 3) \div 2 = 24$$

$$24 + 3 = 27$$

2つの関係を理解し線分図に表し、逆思考の考えで求める。

支2 ショートケーキをチョコレートケーキの個数を用いて表せないだろうか？

自力解決 B_2



チョコレートケーキの数を□(x)として、チョコレートケーキだけで線分図を表すことができる。

支3 ショートケーキを(チョコレートケーキ+3)とみなして考えたんだね。

支2 この関係を等式で表せないだろうか？

自力解決 A

$$\begin{cases} \square + (\square + 3) = 51 \\ \square \times 2 + 3 = 51 \end{cases} \quad \begin{cases} x + (x + 3) = 51 \\ x \times 2 + 3 = 51 \end{cases}$$

チョコレートケーキの個数を□またはxとおいて、式に表すことができる。

支3 それぞれの項が何を意味しているのかを考えてみよう。

全体の関係を理解し、逆思考で式を表すことができる。

1つのものだけで関係性を表すことができる。

わからない数を計算の対象(数値)として扱うことができる。

3.全体で検討する。

・解答の確認をする。

チョコレートケーキが 24 個

ショートケーキが 27 個

○どうやって求めたか話合おう。

○ 個数の差が 3 個であることに注目してみる。

(自力解決 C_1)

チョコ	23	24	25	26
ショート	26	27	28	29
合計	49	51	53	55

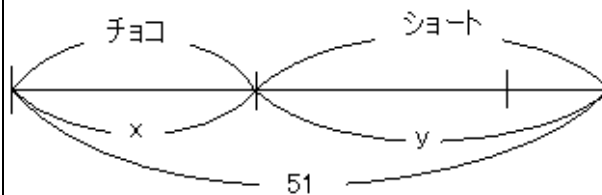
○合計が 51 個であることを利用している。

(自力解決 C_2)

チョコ	10	11	12	...	22	23	24
ショート	41	40	39	...	29	28	27
合計	31	29	27	...	7	5	3

○チョコレートケーキとショートケーキ、2つの数量の関係を図で表したらどうなるかな？

・自力解決 B_1 で全体の数量関係に着目させる。



$$x + y = 51 \quad \dots(1)$$

$$\begin{cases} x \text{ がチョコレートケーキ} \\ y \text{ がショートケーキ} \end{cases}$$

○全体の関係を線分図で表し、式（逆思考）で計算して個数をだしているね。

$$(51 - 3) \div 2 = 24$$

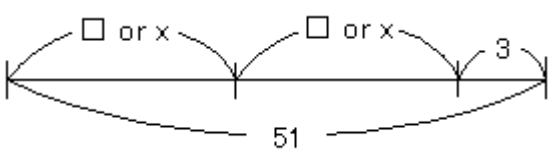
$$24 + 3 = 27$$

解を出すことではなく、導き方に重点をおきたい。

チョコレートケーキの数を 1 個増やすことで合計は 2 個ずつ減っていくという規則性があることに気づく。

(規則性に注目する)

・自力解決 B_1 で全体の数量関係に着目させる。

	<p>○ほかの表し方ができないだろうか？</p>  <p>・自力解決 B_2 でショートケーキとチョコレートケーキの関係に着目させる。</p> $y = x + 3 \quad \dots(2)$ <p>○問題の順序通りに式を書くことはできないかな？</p> <p>○1つのものだけで関係性を表すことができるね。</p> $x + (x + 3) = 51 \quad \dots(3)$ <p>○xについて解いたら答えがでるよね。</p> <p>○このような形で、xを用いて等式で表すことを「方程式」という。また、このxを求めることを、「解を求める」という。</p>	<p>(1) と (2) の関係から自力解決 A の式へとつなげる。</p> <p>語句の説明</p>
<p>(4). 確認問題をす る。</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>では、ショートケーキがチョコレートケーキより、9個多い場合について考えてみよう。</p> </div> <p>○最初から線分図を使って求めなくても、さっき出した式を利用できるのね。</p> $x + (x + \underline{3}) = 51$ \downarrow $x + (x + \underline{9}) = 51$ <p>○では、どうすればうまく解くことができるかな？ (次回の授業につなげる)</p>	<p>式の変形から容易に求めること (方程式の利点) に気づく。</p> <p>・(3)の式を利用して求められることに気づかせる。</p> <p>等式の性質へとつながりを持たせる。</p>

4 振り返り（自己評価・問題点）

今回の数学学習指導設計Ⅱで1時間の授業を作成するにあたって、半年をかけて教材研究から行い、今まで知らなかったことに対して多くの内容を知ることができた。「方程式」については、文字を使って表した等式を方程式というのだが、「なぜ文字を使うのだろうか?」「文字を使うとどんな点がよいのだろうか?」という点について考えたことがなかった。他にも、方程式の歴史を調べる中で「方程式はなぜ重要となったのか?」など、今までのように問題に対しての解を考えるのではなく、数学的背景から単元や教材を見ることで重要な点について多く考えることができ勉強となった。

授業については導入部分を扱ったが、授業設計するにあたって、本時のねらいや問題設定、練り上げに関しては非常に苦労した。特に問題設定と練り上げに関して、問題設定は本時のねらいに沿った自力解決を生徒が限られた時間内で取り組むことができるようにするにはどのような問題がよいのか考えることが難しかった。また、練り上げに関しては最後まで悩んだ。どこまで行えばよいのか、自力解決からどのような内容を行えばよいのか、この授業の課題は何なのかについて考え、授業に組み込むことが大変だった。方程式では文字の大切さの他に、問題の可解性や問題に対して生徒が見通しを立てることができるのかという点も重要な要素になってくる。学年が進むにつれて連立方程式、2次方程式と学習内容が難しくなるにあたって、そのような点も考慮した問題について考えてみたい。

私の経験上で、方程式が理解できていないという理由の1つに、問題中でわからない値が何なのか、どの値を文字でおけばよいのかが全くわかっていないような印象を受ける。今回の問題の場合はわからない値については予想しやすく、解を求めることに対しては見通しが立てやすいということが考えられる。授業を進めていく上で、問題が難しくなるが、そのような時の練り上げ時の支援や机間支援については、さらに勉強を積み重ねる必要があると思った。また、一般化・拡張・形式化についても数学学習指導論で学んだが、そのような点もこれからしっかりと理解し、次の授業設計を行う機会に生かしていきたい。

(山下)

この授業をうけて一つの授業をつくるのがすごく大変だと思いました。今まで教育課程にそって受けていた授業がその単元の歴史を調べたりして、今回は方程式の歴史を調べたので昔の方程式の形やどのように発展し重要視されてきたのか学べたり愛着がわいたきがしました。数学学習指導要領について調べたことは、授業設計をしていくうえですごく良かったです。改訂ごとに重要視するところが微妙に違い、つくった人たちの気持ちが伝わってきた気がしました。それを踏まえたうえで自分たちが何を大切にして授業を設計していくのかにおいて大変参考になりました。指導案作成において考えてやってみましたが、先生に指摘されるところが多々あり教育の奥深さを知らされた気がします。一つ一つ丁寧にやっていくことが大切だと思いました。

(植木)

今回、この授業を通して、方程式について考えてきたが、その過程で、方程式の起源や記号法の歴史についても考える機会があり、今までは考えたことがなかった方程式の根本にあるものを考えることができた。

また学習指導要領を調べることによって、指導要領のこれまでの変遷を知ることができ、今までの数学学習ではどういうことが求められていて、今の数学学習では何が求められているのかを考えてきた。その上で、自分たちの考える授業では何が必要なのか、どこを大事とする授業をするのかというところに視点をおいての指導案を作ることができたと思う。

授業に取り組む上で、生徒への問題はすごく大事であり、実際に今回の指導案を作るにあたり、かなり苦労したところである。初めはそれなりの難度を含んだ問題ばかりを考えていたが、こちらの伝えたいことを含んだ問題を考えた結果、難度としてはかなり易しいものとなった。難度が高いからいい問題というわけではなく、こちらの伝えたいことを伝えやすい問題がいい問題なのだとすることを今回学び、これはこれからの数学学習において、大変大事になるところだということを感じた。

(東郷)

今回の資料の作成の中で、歴史について疑問に思うことや、指導要領や教科書の比較の中で問題点がいろいろ出て来て、まだまだ充分には調べ足りていないし、話し合えていなかったのではないかと感じた。特に、指導案の作成では、思ったような集団討議の内容を考えることができず、本当にこれでいいのだろうか、と指導案作成の困難さをとても感じた。また、もう少し目標やテーマの達成に近づけることができたのではないかと感じた。

しかし、この指導設計の講義の中で、メンバーと話し合うことで、自分では気づけなかったことや分からなかったことが出て来て自分の中の考えが増えいい経験になった。また、教材研究をしていく中で、九章算術や算木など、方程式の歴史を調べてわかったことがたくさんあり、今まで以上に数学に対して興味が湧いた。今回調べたことや話し合ったことを今後、授業設計や指導案を考えていく中でしっかり大切にしていきたい。

(松田)

今回この授業を振り返り、授業を組み立てていくことがいかに難しいかを知ることが出来た。児童・生徒がどのような解釈をして解法を考え出すか、そして教師はその解法にどのような支援をしていけばよいかを予想することが難しかった。特に集団討議を展開していく上で、テーマに沿った支援を構成していくことが非常に困難であった。テーマを設定しても、それが生徒に伝わらなければ授業の目的は達成されず、後の授業を進行していく上でも少なからず影響を及ぼしてくる。これをどれだけ自分の中で解決していくか、という今後の課題をこの授業で見つけることが出来た。

方程式については、自分が当然のように持っている計算の方法の一つとしか捉えていなかったため、歴史や指導要領を調べることで、方程式の必要性や効率のよさを知ることが出来た。しかし、未だ自分の中で消化できていない内容がいくつも残っている。歴史を調べても調べた分疑問が増えたり、疑問に思ったことの考えがどこを探してもみつからなかったりして解決できていないことがある。

学習指導要領は改訂されるたびに日常に結びついた内容から数学という学問を学ぶという形に移行されてきた。しかし現実離れした内容になってきたため、児童・生徒はその内容をイメージして捉えることが出来ず、数学離れが進行してきた。そこで平成10年度改訂版の中学数学科目標に「数学的活動の楽しさ」という単語が加えられたが、この「楽しさ」を子どもたちに見出させようとするのなら、初期の学習指導要領のように日常的な内容も追加すべきであろう。

また現在の教科書の方程式の部分は児童・生徒が理解しやすいように、あるいは興味を持たせるために、図を増やしたり解答欄を穴埋め形式で掲載したりしているが、その記述では児童・生徒が自らで考える能力が向上することは期待できない。教科書の理解しがたい部分は教師が指導していけばいいので、今の教科書に比べれば、必要最低限の公式や証明、問題等のみを掲載するだけの教科書を用いた方が望ましいと思った。

そしてこれまでの授業で学習した数学的活動や形式化等もまだ理解できていないため、それらを自分で復習し学び直した上で、今後の指導計画の作成につなげていきたい。

(井田)