

平成 20 年 2 月 29 日 数学学習指導設計Ⅱ

題材 因数分解

図へのイメージ化と一意性

工学部 応用数理工学科

三島 圭一郎

川辺 圭亮

目次

1、テーマ設定の理由	J 1 (3)
2、因数分解について	J 1 (4)～(5)
3、因数分解の歴史	J 1 (6)～(8)
4、学習指導要領	J 1 (9)～(16)
5、教科書の吟味	J 1 (17)～(18)
6、学習計画	J 1 (19)
7、問題	J 1 (20)～(22)
8、まとめ	J 1 (23)

1、テーマ設定の理由

中学校の分野で何の単元にするかを考えたときに、まず因数分解が出てきた。その理由としては僕たちが中学のとき初めてやりがいを感じ、因数分解を解くおもしろさに気づき、数学が好きになるきっかけになった単元だからである。また、因数分解は公式の説明だけで、機械的に解くことはできるが数学的意味を理解できないような教えられかたをされていたので、私たちは自分たちが数学的意味を理解させ、根本から因数分解を理解できるような授業をつくることができれば、よりやりがいを感じさせることができ、因数分解を解くおもしろさもわからせることができると思ったからである。

他にも連立方程式の単元も候補として出てきたが、やはり因数分解は高校・大学と進学していくにつれていろいろな数と式だけでなく数学分野に幅広く活用されているし、土台となるので重要であると考え、因数分解について深く調べたいと思った。

2、因数分解について

因数…整数がいくつかの整数の積で表されているとき、その一つ一つの数のこと

因数分解…多項式をいくつかの積であらわすもの

○素因数分解との比較

素数…2, 3, 5, 7のようなそれより小さい自然数の積であらわせない自然数

素因数…因数である素数

素因数分解…自然数を素数の積として表すこと

任意の正の整数に対して、素因数分解はただ一通りに決定する(ただし順序は問わない)。



素因数分解の一意性

$$18 = 2 \times 3 \times 3 \quad \text{正}$$

$$18 = 2 \times 3 \times 2 \quad \text{誤}$$

○因数分解を素因数分解の知識を利用し数学的に考える

因数分解の一意性の証明

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

もし素因数分解と同じ数学的要素があるならば、多項式は X にどの値を代入しても共通した約数をもつ

$x = 0$ 6	$(1 , 6)$ $x + 1 \quad x + 6$	$(2 , 3)$ $x + 2 \quad x + 3$	
$x = 1$ 1 2	$(1 , 1 2)$ $x \quad x + 1 1$	$(2 , 6)$ $x + 1 \quad x + 5$	$(3 , 4)$ $x + 2 \quad x + 3$
$x = 2$ 2 0	$(2 , 1 0)$ $x \quad x + 8$	$(4 , 5)$ $x + 2 \quad x + 3$	
$x = 3$ 3 0	$(5 , 6)$ $x + 2 \quad x + 3$	$(1 , 3 0)$ $x - 2 \quad x + 2 7$	$(2 , 1 5)$ $x - 1 \quad x + 1 2$

表1 因数分解の一意性

考察・まとめ

因数分解の一意性は存在する



素因数分解と共通の性質をもつ



因数分解は一意性をもつ約数の式を積のかたちであらわしたものであり、素因数分解は一意性をもつ数を積のかたちであらわしたものである

ということがわかった。

また、なぜ一意性の表を用いたかという点、因数分解とは式を簡単にすることとして私たちは習ってきたので、因数分解とは図を用いて説明すると、例えば、「 $x^2 + 5x + 6$ を因数分解しなさい。」という問題では、 $x \times x$ の正方形が1枚、 $1 \times x$ の長方形が5枚、 1×1 の正方形が6枚を1つの四角形に敷き詰めたものの縦の辺と横の辺の積が因数分解であると最初は考えていた。しかし、生徒には敷き詰めることは困難であると考え、因数分解の説明として、具体的数値の代入からの一意性に気づかせるという方針に決まった。

3、因数分解の歴史

ユークリッド原論からのアプローチ

原論 第二巻

ユークリッド原論の第二巻は、外見は面積の変形の理論にすぎないものである。しかし、この内容こそは、実は当時の算数術から発展した演算そのものの学、すなわち一種の代数的なものであることに着眼した。

現代式の代数学記号で書き換えると次の命題になる

命題

- 1 $a(b+c+d\cdots)=ab+ac+ad+\cdots$
- 2 $(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$
- 3 $(a+b)=a^2+ab$
- 4 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
- 5 $ab+\{1/2(a+b)\cdot b\}^2=\{1/2(a+b)\}^2$
- 6 $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$
- 7 $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$
- 8 $4(a+b)a+b^2=\{(a+b)+a\}^2$
- 9 $a^2+b^2=2[\{1/2(a+b)\}^2+\{1/2(a+b)\cdot b\}^2]$
- 10 $(2a+b)^2+b^2=2\{a^2+(a+b)^2\}$

証明

命題 5

線分を等しく、および等しくなくそれぞれ2つに分けると、不等な線分の2つの線分の包む長方形と、両分点の定める線分上の正方形の和は、前線分の半分を一辺とする正方形に等しい。

命題 6

一つの与えられた線分を二分するとともに、線分を延長するとき、全線分と延長線分の包む長方形と、二分した線分上の正方形との和は、二分した線分と延長線分の和を一辺とする正方形に等しい。

図1 命題5

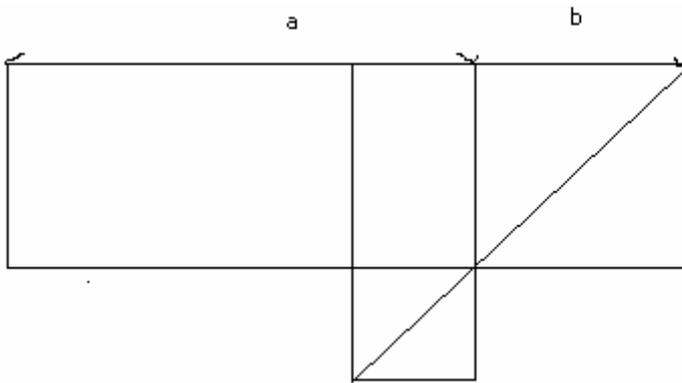


図2 命題6

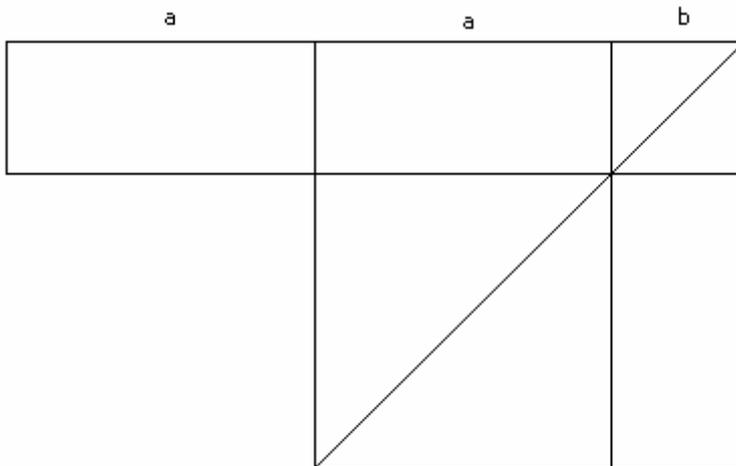


図1から

$$ab + (a - b/2)^2 = (a + b/2)^2$$

図2から

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$$

この2つの式から

$$(x + y/2)^2 = xy + (x - y/2)^2 \quad \dots (a)$$

$$(x + y/2)^2 - (x - y/2)^2 = xy \quad \dots (b)$$

が得られる

二つの量 x , y の和と積が与えられたとき、これを求める問題は

$$X + Y = 2a \qquad XY = F$$

とおくとき、(a) から $X - Y$ がもとめられ、したがって X , Y が定まる。

また差と積が与えられた場合には

$$X - Y = 2a \qquad XY = F$$

とおくとき、(b) から $X + Y$ が求められ、したがって X , Y が定まる。

ユークリッド原論からの考察

因数分解を図形の面積から導き証明も図形をすべてつかい表している。

一意性の観点からは因数分解を導いていない。

素数、因数などが明らかにならなくても因数分解は実行することができる。

それらをもとに考えたこと

図形の面積から因数分解をもとめることができるのではないか？

いろいろな図形を単にくっつけたりバラバラにするのが因数分解だ！！

そう子供がとらえ、因数分解の数学的意味（一意性など）を理解しないのでは、本当に

因数分解を学んだと言えるのだろうか。また、数学を学んだといえるのであろうか。

また図形から因数分解から図をもとに解を導きだすのはあまりに子供にとっては難しいのではないか。

因数分解を教える上で図を用いるのはとても理解しやすい方法なのではないか。

図を用いることで、今後の数学学習の想像力がつくのではないか。

自ら公式導きだすのがもっとも大事なこと。

4, 学習指導要領

過去の学習指導要領の比較

昭和33年 数学学習指導要領

全体 目 標

- 1 数量や図形に関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力を伸ばす。
- 2 数量や図形に関して、基礎的な知識の習得と、基礎的な技能の習熟を図り、それらを的確かつ能率的に活用できるようにする。
- 3 数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め、それらによって、数量や図形についての性質や関係を簡潔、明確に表現したり、思考を進めたりする能力を伸ばす。
- 4 ものごとを数学的にとらえ、その解決の見通しをつける能力を伸ばすとともに、確かな根拠から筋道を立てて考えていく能力や態度を養う。
- 5 数学が生活に役だつことや、数学と科学・技術との関係などを知らせ、数学を積極的に活用する態度を養う。

学年 目 標

- (2) 式を扱いやすい形に変形する方法や乗法公式などを理解させ、見通しをもって式を取り扱う能力を養う。
- (5) 図形の性質の理解を深め、計量的に扱う能力や与えられた条件を満たす図形を求める能力を養う。図形について、見通す力や論理的に考える力をいっそう伸ばすとともに、論理の過程を正確に表現する能力を養う。

2 内 容

※のついたものは選択教科としての数学の内容とする。

A 数

(1) 数の平方根の意味とその必要を理解させ、これを用いることができるようにする。

B 式

(1) 式の計算にいつそう習熟させるとともに、基本的な乗法公式を利用できるようにする。

ア 多項式と多項式との乗法。

イ 次の乗法公式を用いる式の展開と因数分解。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$\text{※}(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

※(2) 式を文字で置き換える方法を理解させ、これを式の計算に利用できるようにする。

※(3) 分数式は、分数と同じような計算のしかたで計算できることを理解させ、簡単な分数式の四則計算ができるようにする。

(4) 次のような数係数の二次方程式について、その必要性や解き方を知らせる。

$$ax^2 + b = 0 \text{ (} a, b \text{ は整数で、実根をもつ場合。)}$$

$$x^2 + px + q = 0 \text{ (} p, q \text{ は整数で、実根をもつ場合。)}$$

用語と記号

展開, 因数, 因数分解, 二次方程式

昭和44年

全体 目 標

事象を数理的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成する。

このため、

- 1 数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度を養う。
- 2 数量、図形などに関する基礎的な知識の習得と基礎的な技能の習熟を図り、それらを的確かつ能率的に活用する能力を伸ばす。
- 3 数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め、それらによって数量、図形などについての性質や関係を簡潔、明確に表現し、思考を進める能力と態度を養う。
- 4 事象の考察に際して、適切な見通しをもち、論理的に思考する能力を伸ばすとともに、目的に応じて結果を検討し、処理する態度を養う。

学年 目 標

- (1) 数の平方根について理解させ、有理数と合わせて、数の概念の理解をいっそう深める。また、それらの数を用いて、ものごとをいっそう広く考察し、処理することができるようにする。
- (2) 式を扱いやすい形に変える方法を理解させ、式について見通しをもって能率的に扱うことができるようにする。また、二次方程式および二元一次不等式について理解させ、式についての見方を深める。

内 容

A 数・式

(数)

- (1) 正の数の平方根の意味とその必要性を理解させ、それを用いることができるようにする。

(式)

- (3) 文字を用いた簡単な式について、式を文字で置き換えたり、公式を用いたりして、展開や因数分解ができるようにする。

ア 簡単な一次式の乗法。

イ 次の公式を用いる式の展開と因数分解。

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

- (6) 次の用語を用いることができるようにする。

展開，因数分解，二次方程式

昭和52年 学習指導要領

全体 目標

数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方についての能力を高めるとともに，それらを活用する態度を育てる。

目 標

- (1) 数の平方根について理解させ，数の概念についての理解を一層深める。
- (2) 目的に応じて式を扱いやすい形に変える方法を理解させ，式について見通しをもって能率的に扱うことができるようにするとともに，二次方程式について理解させ，それを用いる能力を養う。

内 容

A 数と式

- (1) 正の数の平方根の意味とその必要性を理解させ，それを用いることができるようにする。
- (2) 文字を用いた簡単な式について，式の展開や因数分解ができるようにする。

ア 簡単な一次式の乗法

イ 次の公式を用いる式の展開と因数分解

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

(3) 二次方程式とその解について理解させ、二次方程式を解くことができるようにする。

〔用語・記号〕

根号 有理数 無理数 $\sqrt{\quad}$

平成元年 学習指導要領

全体 目 標

数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。

学年 目 標

(1) 数の平方根について理解し、数の概念についての理解を一層深める。また、目的に応じた式の変形や二次方程式について理解し、式についての理解を一層深めるとともに、それらを能率的に活用できるようにする。

内 容

A 数と式

(1) 正の数の平方根の意味とその必要性を理解し、それを用いることができるようにする。

(2) 文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができるようにする。

ア 単項式と多項式の乗法及び多項式を単項式で割る除法

イ 簡単な一次式の乗法

ウ 次の公式を用いる式の展開と因数分解

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

- (3) 二次方程式とその解について理解し、二次方程式を用いることができるようにする。

[用語・記号]

根号 有理数 無理数 素数 因数 $\sqrt{\quad}$

平成10年 学習指導要領

全体 目 標

数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。

学年 目 標

- (1) 数の平方根について理解し、数の概念についての理解を一層深める。また、目的に応じて計算したり式を変形したりする能力を一層伸ばすとともに、二次方程式について理解し、式を能率的に活用できるようにする。

内 容

A 数と式

- (1) 正の数の平方根について理解し、それを用いることができるようにする。

(2) 文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができるようにするとともに、目的に応じて式を変形できるようにする。

ア 単項式と多項式の乗法及び多項式を単項式で割る除法の計算ができること。

イ 簡単な一次式の乗法の計算ができ、次の公式を用いる簡単な式の展開や因数分解ができること。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

(3) 二次方程式について理解し、それを用いることができるようにする。

[用語・記号]

根号 素数 因数 $\sqrt{\quad}$

考察

今までのどの学習指導要領をとりあげても、因数分解は二次方程式をとる手段ということになっており、因数分解の意味を問うものではない。

しかし、過去の学習指導要領と最近の学習指導要領の扱われる記号を比較してみると、平成元年以前と後では違いがある。平成元年以前では、展開、因数など因数分解の付属用語のような感じで掲載されているが、以降では、素数など因数分解の一意性などの因数分解とは何かというのを指導する概念が学習指導要領にでてきたのではないかと思う。

また、全体の目標として図形などの基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めることがどの年代にも共通の目標になっている。このことから、学習指導要領は生徒に指導するさい、図などを使っていくことを示唆しているのではないかと思う。そこからも因数分解とはなにかと生徒に教えるときに、図が必要であると考えた。

5、教科書の吟味

○大阪書籍

$x \times x$ の正方形と $1 \times x$ の長方形と 1×1 の正方形を使い、枚数の組み合わせにより、正方形や長方形にしきつめられるか試してみる、という例題。

↓

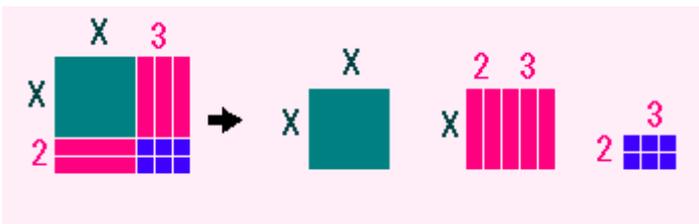
できる組み合わせ、できない組み合わせがあることを知り、それが因数分解をできるかできないか説明していると思った。また、できない図形をあとでとっておいて公式説明の後に、和と積を両方みたら数ではないから図形ができないと説明すると思った。

○ 学校図書

- ・大阪書籍と同様の例題を用いていた。
- ・大阪書籍の説明

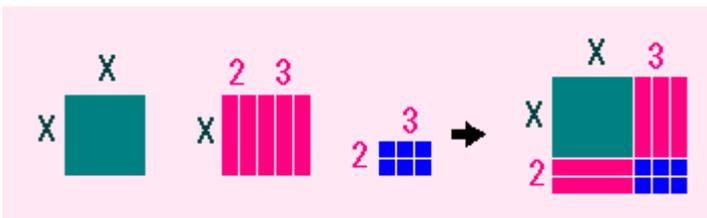
+

① 並び替える前の長方形や正方形の面積を式で表してみましょう。



$$x^2 + 5x + 6$$

② 並び替えてできた長方形や正方形の面積を式で表してみましょう。



$$(x + 2)(x + 3)$$

↓

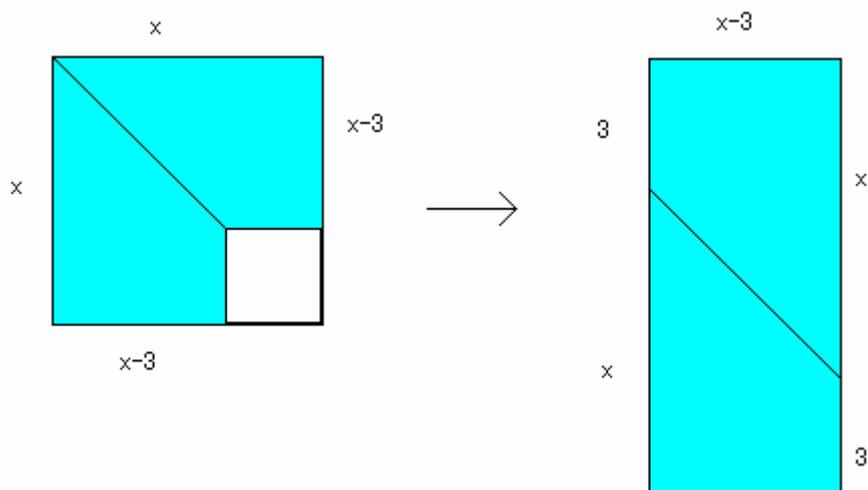
①の式は展開をあらわすもので、②は因数分解をあらわすもの

○東京書籍

図を用いて面積を出すことが展開であり、また、面積から辺の長さを予測されることが因数分解だととらえて、図で説明している。

○大日本図書と教育出版についても同様の図形、例題を用いられて説明されている。

○ 啓林館



- 上のような図形を用いて説明。同じ面積のものを違う形にして、それが「イコール」でむすばれることより $x^2 - 9$ と $(x - 3)(x + 3)$ は同じものだというイメージから、因数分解として説明している。

考察

どの教科書も図を用いて因数分解を四角形の縦と横の辺の積として図へのイメージ化をして説明している。

また、素因数分解との関連についてはほとんど書いておらず、それぞれが単体のように説明されていた。大阪書籍と教育出版は因数分解の公式説明の後に書いてあり、学校図書、東京書籍、大日本図書、啓林館については因数分解の公式説明の前に書いてあった。因数分解を素因数分解から一意性に気づかせることについては何も書いてなく、数学的価値のあるものとは思わなかった。

もし、私たちが教科書を作るのであれば、「素因数分解から一意性に気づかせること」と、公式説明のところでは抽象→具体ではなく、具体→抽象のように、具体的数値の代入→「公式を作る」ということを大切にしたいので、学校図書、東京書籍、大日本図書、啓林館のように因数分解の公式説明の前に説明し、図を用いて因数分解を四角形の縦と横の辺の積として図へのイメージ化をして説明して、具体的数値の代入から一意性に気づかせ、公式を作る。というような流れの教科書を作りたいと思った。

6、学習計画

学習内容	本時の目標	中心となる考え	問題	数学的活動
1 限目 因数分解の理解 (因数分解とは何か)	因数分解の理解	素因数分解の一意性を利用して因数分解につなげる	$x^2 + 4x + 3$	A : 具体的数値の代入から一意性を気づくことができる。 B : 図へのイメージ化
2 限目 共通因数のくくりだし、因数分解の公式を作る。	因数分解の公式を作る。	前時の内容をふまえて、因数分解を考察する	$(x^2 + x)$ $x^2 + 8x + 16$ $9x^2 - 30x + 25$ $x^2 + 8x + 16$	A : 図へのイメージ化 B : 公式作成 C : 文字を活用して一般化する
3 限目 演習	因数分解の公式利用。	因数分解の公式	教科書またはドリルなどの問題	A : 因数分解の公式利用 B : 公式の使い分け。
4 限目 式の計算の利用 展開・因数分解を活用したいろいろな計算	応用問題について、因数分解の具体的活用。	図へのイメージ化 一意性の利用 公式利用	$x^2 + nx + 32$ n は何が入るでしょう。また、なん通りできるでしょう。 L字形の図形の面積を求めなさい。	A : 図へのイメージ化 B : 文字又は具体的数値を用いた式の作成 C : 公式利用 D : 美しさ

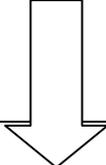
7、問題

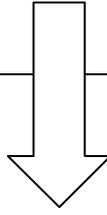
本時の目標

応用の問題を通し、自力解決を中心に公式利用のテクニックをさらに身につける。

支援1:現在の活動を実現させる支援 支援2:次の活動をうながせる支援

支援3:数学的価値を気づかせる支援

学習内容	活動の支援・指導上の工夫	時間
1 問題場面の把握	問題を黒板に書き、生徒に板書させる。	5/50
$X^2 + nX + 32 \quad n > 0$ <p>この式を因数分解できるようにすると、nにはいる自然数は何個あるか考えてみよう。 またその図や具体的数値を代入した表を用いて表してみよう。</p>		
2 自力解決をする	<p>問題文に「図や表を用いて」とすることで、面積からの問題解決または、因数分解の一意性をもとに解決していく。</p> <p>図や式にだけとられずに適切な公式利用ができるようにまず指示する。</p>	20/50
<p>自力解決 1</p> <p>因数分解の一般化された公式から、問題がどの公式にあてはまるのかを判断する。</p> $X^2 + nX + 32$ <p style="text-align: center;">↓</p> $X^2 + (a+b)X + ab = (X+a)(X+b)$		
		



支援3：問題と因数分解を一般化した公式にあてはめてみよう。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad (2)$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad (3)$$

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \quad (4)$$

支援2：適切な公式を発見できたら図か表で解を表してみよう

支援1：発見できなかったならば、32の素因数分解をしてみよう。

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

自然数の2乗ではないため式(1)(2)(3)ではない

因数分解の公式利用

自力解決2

$$X^2+nX+32$$

因数分解の一般化された公式を利用すると導かれる解は3つ

$$(X+1)(X+32) \quad (X+16)(X+2) \quad (X+4)(X+8)$$

よって $n=33 \quad 18 \quad 12$ の3つである。

支援1：3限時などにおこなった具体的数値のあたえられた問題から、もう一度因数分解の公式を確認してみよう。

	表と図の作成	3 5 / 5 0
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>自力解決 3 因数分解の一意性の表の作成</p> <p>支援 3 : 具体的数値を代入してみよう 一意性について考えてみよう</p> <p>支援 1 : 1 限目でとりあつかった表をもとに考えてみよう</p> </div>		
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>自力解決 4 図を作成し面積をそれぞれだす</p> <p>支援 3 : 具体的数値の代入</p> </div>		
3 周りの人と問題について検証する	他人との比較・意見交換により、自分の考えを深める	4 0 / 5 0
4 本時の学習を振り返る	本時の学習は因数分解の数学的性質（一意性など）をまとめとしているので、因数分解の公式も含めて総復習する。 また、因数分解とはなにかについていまいちど考える。	

8、まとめ

○自己評価

- ・因数分解の意味を考えさせるため一意性を考えさせたこと。
- ・因数分解を図へのイメージ化させることによってよりわかりやすく説明したこと。
- ・自立解決からとりいれ数学を自らの力でとこうとさせたこと。

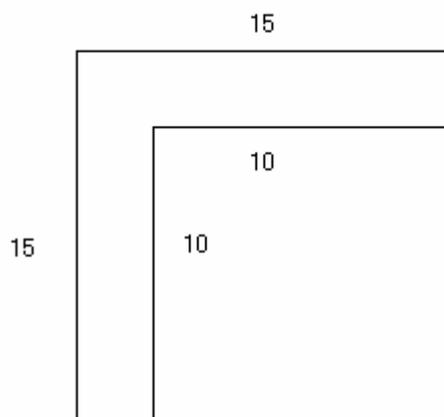
○課題

- ・作成した問題では学習指導設計に記載されているような美しさを求めるといった問題ではない。
- ・図や一意性をまとめる問題として弱い。
- ・公式利用に頼りすぎていて、生徒が自らの力でとこうとする概念がない問題になってしまった。

これらの課題を補うために新たな問題を作成してみた。

問題

L字型の面積を工夫して求めよ。



この問題は図から因数分解の公式や一意性を示した問題である。

生徒はこのL字をいろいろな形に変えて面積を求めるであろう。

しかし、一番に生徒に期待する活動は和と差の積を使い因数分解を使って求めることである。

その1番に期待するものが数学的美しさにつながるのではないかと考えた。

また、 $(15 + 10)(15 - 10)$ を $(X + 10)(X - 10)$ とおき、 X に具体的な数値を代入させることによって、因数分解の一意性も考えとして取り入れやすいと考えた。

だがまだ、この問題については授業設計を行っていない。