Ｈ３　微分(数III)

テーマ　極限を用いた微分法

延岡　大剛
片山　和彦
宮原　義和
中山　昭

目次

1. 単元について・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
　1. 1　コーシーによる極限・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2
　1. 2　微分法の歴史・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3

2. 学習指導要領のまとめ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5

3. テーマ設定理由・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7
　3. 1　テーマを達成するために課題に求められること・・・・・・・・・・・・・ 7
　3. 2　課題設定理由・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7

4. 指導計画・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8

5. 本時の学習・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9

6. 考察・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・12

参考文献・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・12

１．単元について

１．１　コーシーによる極限

① 「次々に異なる値をとる量を変数といい、（中略）

１つの変数の次々にとる値が１つの定まった値に近づいてゆき、その差が任意の与えられた量よりも小さくなっていくようであれば、その定まった値は、初めの変数の極限である。」[1)]

②　ｔの関数 $x = f(t)$ において、ｔが値 a に限りなく近づくとき $f(t)$ の値が一定値 A に限りなく近づくならば、$f(t)$ の極限は A であるといい $\lim_{t \to a} f(t) = A$、またはｔ→a のとき、$f(t) \to$A とある。

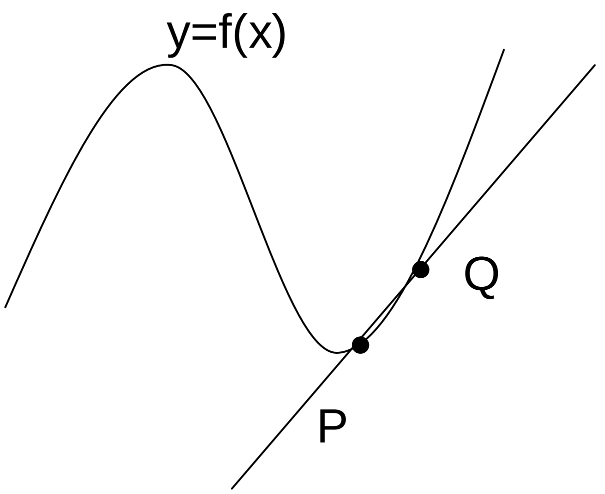
数学Ⅲでは【微分】、【積分】、【極限】は３つの単元で構成されているが
どの出版社の教科書を見ても学習する順序は極限→微分→積分という順序に
なっていて極限という単元が微分や積分とは切り離されて、別の独立した
単元として扱っているように見えた。

微分、積分において極限の概念を用いていることは周知の事実であるが
具体的にどのように関係づけられているか、ということに対して
明確な答えがわからなかったので、極限の考え方を用いた微分の考え方を
考えてみることにした。[1)]

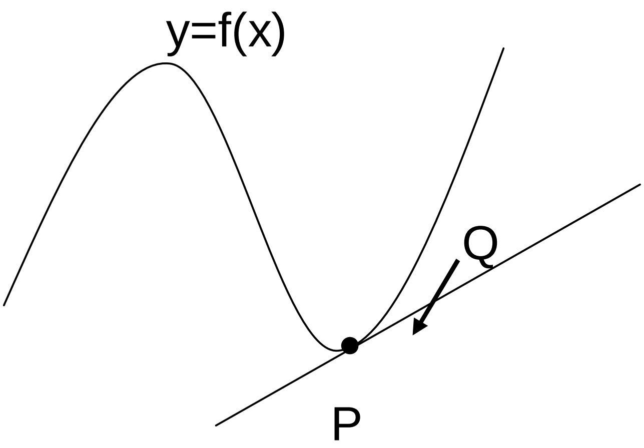
１．2　微分法の歴史

ライプニッツの接線

１、点 P から少し離れたところに点 Q をとる。そこから P と Q を結ぶ直線を直線 PQ をひく



２、点 Q を点 P に近づけると点 P における接線となる。



P の座標を（x, y）、Q の座標を（x', y'）とする。
P と Q の x, y 座標の差を $\Delta x = x' - x$ 、$\Delta y = y' - y$ とすれば

PQ の傾きは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ となる。P を固定したまま Q を P に近づけるのだから

Δx が０に近づくことになり、極限の記号を使って表すと PQ の傾きは

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ となる。しかしこの考えだと傾きは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{0}$ となるので

定義することはできなかった。

そこで、曲線を $y = x^2$、P の座標を（x, y）、Q の座標を（$x + \Delta x, y + \Delta y$）。

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2$ と書けるので

傾き $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ となり、Δx を０に近づけると

$\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$ になると結論できた。

（また１９世紀後半になり、極限の厳密な定義として、$\varepsilon - \delta$ 論法が定義された。）3)

2．学習指導要領のまとめ

● 平成 19 年 3 月改正版

・数学科の目標

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる．

・数学Ⅲの目標

極限, 微分法及び積分法についての理解を深め、知識の習得と技能の習熟を図り, 事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに, それらを積極的に活用する態度を育てる．

・数学Ⅲの目標（微分法）

整関数のほかに分数関数，無理関数，三角関数，指数関数及び対数関数などについて,「数学Ⅱ」の「微分・積分の考え」を発展，拡充させて扱う．

これらの内容について,「理解を深め，知識の習得と技能の習熟を図り」と示されている．知識が基となって技能に習熟するとともに，技能に習熟することにより知識がより確かなものになることから, 知識の習得と技能の習熟とは一体のものとして表現されている．「微分法」の「導関数の応用」では，グラフの凹凸が第二次導関数を用いて調べられることを理解し，関数の値の増減との関係をとらえ，それをいろいろな関数のグラフの分析や速度・加速度などの考察に積極的に活用する態度を育てる．

・微分法

いろいろな関数についての微分法を理解し，それを用いて関数値の増減やグラフの凹凸などを考慮し，微分法の有用性を認識するとともに，具体的な事象の考察に活用できるようにする．

ア　導関数

(ア)　関数の和・差・積・商の導関数

(イ)　合成関数の導関数

(ウ)　三角関数・指数関数・対数関数の導関数

イ　導関数の応用

接線・関数値の増減，速度，加速度

[用語・記号]　自然対数，e，第二次導関数，変曲点

● 平成元年度改定版

微分法に関して、平均値の定理の触れることは、差し支えないが、直感的に理解させる程度にとどめるものとする。

（１） 関数の和差積商の導関数

（２） 合成関数の導関数

（３） 三角、指数、対数関数の導関数

（４） 応用・・・接線、関数値の増減、速度、加速度

● 平成１０年度改訂版（１１年３月告示、１４年５月、１５年４月、１５年２月改正）

目標・・・いろいろな関数についての微分法を理解し、それを用いて

関数値の増減やグラフの凹凸などを考察し、微分方の有用性を認識するとともに

具体的な事象の考察に活用できるようにする。

導関数：（1）：関数の和差積商の導関数

（2）：合成関数の導関数

（3）：三角、指数、対数関数の導関数

（4）：応用・・・接線、関数値の増減、速度、加速度

{用語、記号} 自然対数、e、第２次導関数、変曲点

□ 数学Ⅲの目標は元年度、１０年度版とも同じ

→関数と極限、微分法及び積分法について理解を深め、知識の習得と

技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばす。

３．テーマ設定理由

テーマとして

【 生徒が微分を極限の考え方を用いて理解できるような授業 】

として考えた。微分の計算をするにあたって、たとえば微分係数を求める際に

よく$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$などの不定形がでてくる。

しかし実際には極限値としてある値は存在するのでこれでは不都合が生じる。

これを解決するのが極限の考え方であると思う。

しかし、上にも書いたように、今の教科書では極限という単元が微分や積分とは切り離されて、別の独立した単元として扱っているように見えた。

なので、微分と極限を結びつけて考えるためにこのようなテーマを設定した。

３．１　テーマを達成するために課題に求められること

（ｉ）既習のこと、つまり極限の考え方を用いないと解けない課題

（ii）$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$などの不定形がでてくるような問題。

（iii）平均変化率から微分係数を導出する

３．２　課題設定理由

課題として

$y=\sqrt{x}$における、$x=a$のときの接線の傾きを求めよ。

という課題を考える。

このような課題を考えた理由として微分係数というのは

微分を学習する際に最初にすることであり

視覚的にも理解しやすいと思うからである。

またここから$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}$は x=a における$f(x)$の接線の傾き、極値に

なることがわかり、これは微分において非常に重要な部分であると考えたからである。

４．指導計画

時	指導内容	指導目標	中心となる考え	問題
1 本時	微分導入	導関数の意味の理解	極限を用いて、平均変化率から微分係数を導く	$y=\sqrt{x}$ の接線 を求めなさい。
2	積の微分法	積の導関数の理解	1 時の考えを用いて 積の導関数の公式を導く	$y=(2x-1)(x^2+x+3)$ を微分せよ。
3	商の微分法	商の導関数の理解	1 時の考えを用いて 積の導関数の公式を導く	$y=\dfrac{1}{x-1}, y=\dfrac{x+2}{2x+1}$ を微分せよ。
4	合成関数 の微分法	合成関数の微分法の理解	合成関数の理解 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\bullet\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$	$y=(3x+2)^4$ を微分せよ。
5	逆関数 の微分法	逆関数の微分法の理解	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ の理解	$y=\sqrt[3]{x}$ を微分せよ。
6	三角関数 の微分法	$sinx, \cos x, tanx$ の導関数を求める	グラフから考える 角速度から考える 和積公式から考える	$y=sinx, y=\cos x, y=tanx$ を微分せよ。
7	三角関数 の微分演習	三角関数を含んだ関数の導関数を求める		$y=sin3x, y=\cos(1-2x)$ など
8	対数関数 の微分法	自然対数を導入し、$y=\log_a x$ の導関数を求める	平均変化率から求める	$y=\log_a x$ を微分せよ。
9	指数関数 の微分法	$y=e^x, y=a^x$ の導関数を求める	e の理解 平均変化率から求める	$y=e^x, y=3^x$ を微分せよ。
10	高次導関数	高次導関数の概念と記号を学び、第 2 次導関数、第 3 次導関数が求められるようにする。	第 1 次導関数、第 2 次導関数の有用性	$y=x^3$ の 2 次導関数を求めなさい。
11	微分可能 と連続	関数の微分可能性の概念を理解し、連続性との関係を理解する	連続な関数のもつ性質を考える	$y=[x], y=\lvert x\rvert$ のグラフを書きなさい。
12	演習			

５．本時の学習

（１）本時の目標

極限を使って、平均変化率から微分係数を求め、微分がどういう意味を持つかを理解させる。

（２）本時の学習過程

「問題提示場面」

$y=\sqrt{x}$ における、$x=a$ のときの接線の傾きを求めよ。

学習内容	活動への支援、	
１：問題場面を把握して、本時の学習課題をつかむ		

$y=\sqrt{x}$ における、$x=a$ のときの接線の傾きを求めよ。

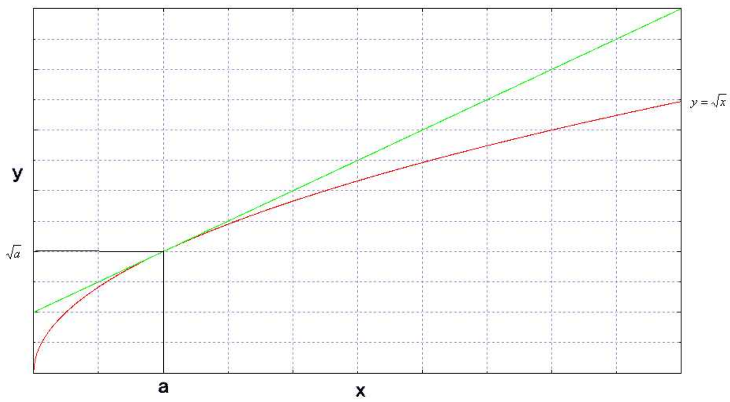


図１　接線の具体的な図

２：活動Ａ	接線方程式から接線を求める。	

【活動ａ１】：接線を求めるために、接線を $y=\alpha x+\beta$ とおいて、これと $y=\sqrt{x}$ の交点が $(x,y)=(a,\sqrt{a})$ という条件を用いてα、βを求めようとする。

支援 a_1：接線を $y=ax+b$ として、$y=\sqrt{x}$ との関係から直線の式を求めてみよう。

支援 a_3：未知数が２つであるのに対し、式が１つしかないためα、βを求めることができないんだよね。

学習内容	活動の支援	
活動 B	平均変化率から傾きを求める。	

●活動Ｂ１

「支援 b_2」もうひとつ点を増やしてみたら？

【活動 Ｂ１】：図 2 のように $(a, \sqrt{a})$ に加え、$(b, \sqrt{b})$ を考える。

「活動 b_{11}」平均変化率を求めるために、**図 2** のように $(a, \sqrt{a})$ に加え、$(b, \sqrt{b})$ を考える。

a から b の 2 点間での傾きは $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$ となる。

●活動Ｂ２

「支援 b_2」もうひとつ点を増やしてみたら？

【活動Ｂ２】：図 3 のように a からの距離を h とおいて考える。

「活動 b_{21}」活動 B1 と同じように平均変化率を用いて接線の傾きを考えると、

$\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{(a+h)-a} = \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ となる。

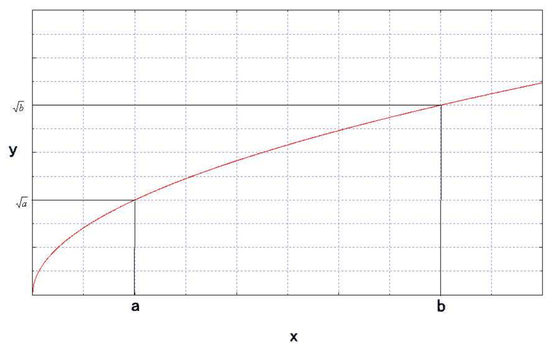


図 2　平均変化率のときに使う図

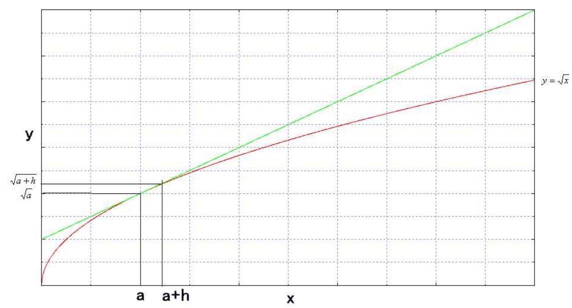


図 3　h の導入

支援○$_1$…活動を促進する支援

支援○$_2$…活動の変化を促す支援

支援○$_3$…活動を評価する支援

学習内容	活動の支援	
活動 C	極限を使って接線の傾きを求める	

●活動C 1

「支援 c_1」接線はどんな直線だったかな。

「活動 c_{11}」接線は b が a に近づいたときの直線の傾きは、lim の b→a を考えればよい。

「活動 c２」b が a に近づいていくと 0 になる。

$\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$ は不定形なので、変形して 0 にならないようにすると、分母分子に $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ をかけると、$\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ となる。

「活動 c_{12}」b が a に近づいていくと $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ は 0 になる。

b が a に近づいていくと、$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ に近づいていく。

「支援 c_3」極限を使って b→a にしたんだね。

●活動C 2

「支援 c_1」接線はどんな直線だったかな。

「「活動 c_{21}」接線は h が 0 に近づいたときの直線の傾きは、あるひとつの直線に lim の h→0 を考えればよい。

「活動 c_{22}」h が 0 に近づいていくと $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ は 0 になる。$\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ は不定形なので、変形して 0 にならないようにすると、分母分子に $\sqrt{h+a}+\sqrt{a}$ をかけると、$\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ となる。**h**が0に近づいていくと、$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ に近づいていく。

「支援 c_3」極限を使って h→0 にしたんだね。

「活動 c_3」【活動 A】で考えた接線の式に適用すると、αが $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ であるで、

$\sqrt{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\times a+\beta$ より、$\beta=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$ となる。よって、接線は、$y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

学習内容	活動の支援	
練り上げ	一般化する	

傾きは $f(x)=\sqrt{x}$ のとき、$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}$ ということがわかる。
これより、$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}$ は $f(x)$ の x=a における接線の傾きになる。

6. 考察

良い点

・微分法の歴史から問題を作れた所
・視覚的に理解しやすい問題開発
・問題のなかで改めて導関数の定義を導出することができる
・未知数・式など自分で仮定して考える事ができる。

不十分な点

・極限を気づかせる支援の仕方
・ε-δ論法を用いた指導の仕方
・自分たちで考えられる生徒の活動が少ない
・極限・微分の歴史的背景をもっと調べていれば、別の方法で授業を展開できたかもしれない。

参考文献

1）解析入門　松坂和夫-著　岩波書店　PP.59-61
2）解析入門　A.J.ハーン-著　市村宗武-監訳　狩野覚・狩野秀子-訳
シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社　PP.115-119