平成１９年度　数学学習指導設計Ⅱ

高等学校数学教育

単元：ベクトル

～ベクトルの有効性を生徒に感じてもらえる授業を考える～

Ｈ２班（高等学校　数学Ｂ　ベクトル）
班員：三宅　陽平
藤井　貴大
柳　翔多

目次

１．１　テーマ：ベクトルの有効性を生徒に感じてもらえる授業を考える

１．２　設定理由

・ 現在の学習指導要領は、「ベクトルについての基本的な概念を理解し，基本的な図形の性質や関係をベクトルを用いて表現し，いろいろな事象の考察に活用できるようにする」とあるが、ベクトルの単元を学んでいる時、私たちはベクトルに関する問題を出されて「ベクトルを用いて問題を解決しましょう」としか教師に言われていないので、その問題についてはベクトルによる解法しか教わっていない。だから、その問題に類似している問題が出てきたときベクトルによる解法しか思い浮かばない生徒が多かった。

教科書に載っているベクトルの単元の問題にはベクトルの解決をしなくても解ける問題があるはずだ。生徒がベクトルを用いる事に有効性を感じられないのは、ベクトル以外の解決があるにもかかわらず、ベクトルを用いた方法以外のことに全く触れられていないことが原因ではないかと考えた。

その問題を解決するために、ベクトルを用いた解法しかない問題を授業に用いて「ベクトルしか使えないからベクトルは有効性がある」と述べるのでは、生徒はその問題のときにだけベクトルに有効性が出てくると考えてしまうのではないかと考えた。

上記の事を踏まえて、私たちはある問題においてベクトルでも解決でき、他の方法でも解決できるような問題を作ることにすることで、ベクトルの有効性を生徒に感じてもらえる授業を作っていけるのではないかと考えた。

２．１　学習指導要領

●昭和 45 年

数学Ⅰ

・１　目標

（１）　数を実数，複素数の範囲まで拡張し，数や式の基本的な概念，法則などの理解を深め，また，ベクトルの基本的な概念，法則などを理解させ，それらを的確かつ能率的に活用する能力を養う。

（２）　図形について座標を用いる方法を理解させ，基本的な図形の性質や関係を考察する能力を養う。

・２　内容

平面上のベクトルの意味ならびにベクトルについての加法，減法および実数との乗法の演算について理解させる。

ア　ベクトルの意味と相等

イ　ベクトルの加法，減法および実数との乗法

ウ　ベクトルの有向直線上への射影

エ　ベクトルの成分表示

オ　用語および記号

ベクトル，零ベクトル，単位ベクトル，有向線分，成分

数学　ⅡＢ

・１　目標

座標およびベクトルの概念を空間にまで拡張し，それらについての理解を深め，図形の性質を考察する能力を養う。

・２　内容

座標とベクトルの概念を空間へ拡張し，それらを理解させ，基本的な図形を式に表わすことができるようにする。また，ベクトルが，平面においても，空間においても，ともに同じ考えに基づいていることを理解させる。

ア　空間座標

点の座標，二点間の距離，線分の分点

イ　空間におけるベクトル

ウ　空間におけるベクトルの加法，減法および実数との乗法

エ　ベクトルの内積

オ　直線，平面および球の方程式

カ　用語および記号

内積

●平成元年

数学Ｂ

・１　目標

「数学 I」及び「数学 II」より進んだ内容として、ベクトル、複素数と複素数平面、確率分布またはコンピュータにおける算法について理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばす。

・２　内容

（１）　ベクトル
ア　平面上のベクトル
（ア）　ベクトルとその演算
（イ）　ベクトルの内積
イ　空間におけるベクトル
（ア）　空間座標
（イ）　空間におけるベクトル

・３　内容の取扱い

(２)　内容の(１)のイの(イ)については、空間におけるベクトルが、平面上のベクトルと同様に取り扱えることの理解に重点を置き、空間図形の方程式の取扱いには深入りしないものとする。

●平成１３年

数学Ｂ

・1　目標

数列，ベクトル，統計又は数値計算について理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，それらを活用する態度を育てる。

「 ベクトルについて」

ベクトルについての基本的な概念を理解し，基本的な図形の性質や関係をベクトルを用いて表現し，いろいろな事象の考察に活用できるようにする。

・2　内容

ア　平面上のベクトル

（ア）　ベクトルとその演算

（イ）　ベクトルの内積

イ　空間座標とベクトル

空間座標，空間におけるベクトル

２．２　各学習指導要領から読み取れる事

●昭和４５年

「数学Ｉ」「数学ⅡB」「応用数学」という分野でベクトルが扱われていたので、今日よりも長期間にわたって学んでいた。

「数学Ｉ」では平面上のベクトルの意味やベクトルどうしの演算を中心に、「数学ⅡB」では空間へと発展し、空間的な意味を理解し、図形の性質を学ぶことを中心にしている。

この年に発表された学習指導要領は、非常に幅広く、かつ丁寧に書かれていたので、教育に熱が入っていた時代だと考えられる。

●平成元年

この年からベクトルが「数学B」に分けられている。空間のベクトルが平面上のベクトルと同様に扱えることを理解させて、空間座標を考える図形などに苦手意識を出させないように指導していくことを目標にしていると私たちは考えた。

●平成１３年

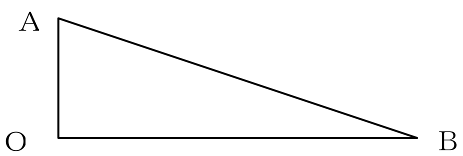
この年もベクトルが「数学B」に分けられている。ベクトルについての基本的な概念や、基本的な図形の性質を理解すること、つまり平面上のベクトルを中心的に理解させるようになっている。

3，授業計画

時間	指導内容	本時の目標	中心となる考え
1	・ベクトルとその意味 ・単位ベクトル ・ベクトルの演算（加法）	・ベクトルは大きさと方向をもつ量であることを理解させる ・ベクトルの加法ができるようにさせる	・ 向きと大きさを持ったものをベクトルという ・ 大きさが１のものを単位ベクトルという ・ $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ 交換法則、結合法則が成り立つ
2	・ 逆ベクトル ・零ベクトル ・ベクトルの演算（減法）	零ベクトルと逆ベクトルを理解させて減法ができるようにさせる	$\vec{a}$ と大きさが同じで向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の逆ベクトルという ・始点と終点が一致したベクトルを $\vec{0}$ という
3	・ベクトルの実数倍	ベクトルの実数倍を理解し用いる事ができるようにさせる	・ $\vec{a}$ と実数 m に対して (1) $m > 0$ ならば $m\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが $m\lvert\vec{a}\rvert$ のベクトル (2) $m < 0$ ならば $m\vec{a}$ は $\vec{a}$ と逆の向きで大きさが $\lvert m\rvert\lvert\vec{a}\rvert$ のベクトル (3) $m = 0$ ならば $m\vec{a}$ は零ベクトル
4	・ベクトルの平行	２つの平行なベクトルがある場合一方は他方の実数倍で表すことができることを理解させる	$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が同じ向き、または逆向きのとき $\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k がある

問題	主たる数学的活動
・　図で等しいベクトルと、大きさの等しいベクトルを選べ。 ・　２つのベクトルの和を求め、図示せよ	・　あるベクトルと等しいベクトルを選べる。 ・　ベクトルの和を求め、図示する事ができる
・　図で逆ベクトルを選べ ・　２つのベクトルの差を求め、図示せよ	・あるベクトルと向きが反対の逆ベクトルを選べる。 ・　ベクトルの差を求め、図示する事ができる
・　図で $\vec{a}, \vec{b}$ が与えられたとき、次のベクトルを図示せよ （１）$\frac{3}{2}\vec{a}$　（２）$\vec{a} + 2\vec{b}$ （３）$-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$	・　ベクトルの実数倍が表示でき、それを図示する事ができる
・　$\vec{x} - \vec{y} = -2\vec{a}$ 、$2\vec{x} + \vec{y} = 5\vec{a}$ のとき、 $\vec{x} \mathbin{/\!/} \vec{y}$ であることを示せ。ただし、$\vec{a} \neq 0$ とする。	・　$\vec{y} = k\vec{x}$ となるとき、 $\vec{x} \mathbin{/\!/} \vec{y}$ であることを利用する

5	・ベクトルの成分表示	・ 成分表示の演算ができるようになる	・ $\vec{a} = (a_1 a_2)$ のとき $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$ $A = (a_1 a_2),\ B = (b_1, b_2)$ のとき $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ $\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a} = (a_1 a_2)$ 、$\vec{b} = (b_1 b_2)$ が $\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$ ならば $(b_{1,} b_2) = m(a_{1,} a_2)$ となる m がある
6	・演習	・１～５時の復習	
7	・ベクトルの内積	内積の定義を理解する	・ $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\ \theta$ で求められる ・ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ならば $\theta = 90$ となるので $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\ \theta = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\ 90°$ よって $\cos\ 90 = 0$ より $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ となる ・ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、$\vec{b} = (b_1, b_2)$ の 内積は同じ成分同士をかけたものを足し合わせることで求められる （ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ となる）

. $\vec{a} = (1,-1)$, $\vec{b} = (-3,4)$ のとき、 $5\vec{a} + 2\vec{b}$ を成分表示せよ。 また大きさを求めよ。	・ 成分によるベクトルの演算ができるようになる
. $\lvert\overrightarrow{OA}\rvert = \sqrt{3}$, $\lvert\overrightarrow{OB}\rvert = 1$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 2$,  ３０°、６０°、９０°の直角三角形がある 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$, をそれぞれ求めよ . $\vec{a} = (-2,3)$、$\vec{b} = (3,2)$ のとき 内積をもとめよ	・ 内積の定義を用いて ２つのベクトルの内積を求める ・ 成分表示での内積を求める

８	・ベクトルの内積	余弦定理を使えるようになる	$\vec{a}\cdot\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$ 、$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ ０でない２つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、$\vec{b} = (b_1, b_2)$ の なす角を θ とすると $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ より $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$ $= \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ となる
９	・内分点の位置ベクトル	・　内分、外分を比を用いて表せる	・　２点 $A(\vec{a}),\ B(\vec{b})$ について線分ＡＢを $m : n$ に内分する点Ｐの位置ベクトルは $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$
１０	・１直線上にある３点	・実数倍のベクトルを考える事で一直線上にある条件を考える事ができる	・　点 P が直線ＡＢ上にあるならば $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。 このことから、点Ａ、Ｂ、Ｐは一直線上にある
１１	・本時		
１２	・　ベクトルの応用２	・内積を用いた証明	・$\vec{a} \perp \vec{b}$ ならば $\cos 90 = 0$ となることより $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ を用いる

. $\left\|\vec{a}\right\| = 3, \left\|\vec{b}\right\| = 2, \vec{a}\cdot\vec{b} = -3\sqrt{3}$ のとき $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ	・　２つのベクトルのなす角を余弦を用いて求める
・２点に $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ ついて線分ＡＢを２：１に内分する点Ｐの位置ベクトル $\vec{p}$ と、線分ＡＢを３：２に外分する点Ｑの位置ベクトル $\vec{q}$ を $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ を用いて表せ。	・　２点 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ を用いて内分点 $\vec{p}$ と外分点 $\vec{q}$ を表す
・　平行四辺形ＡＢＣＤにおいて辺ＢＣを１：２に内分する点をＥ、対角線ＢＤを１：３に内分する点をＰとする。 このとき３点Ａ，Ｐ，Ｅは同一直線上にあることを証明	・$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AP}$ を求める事で３点Ａ、Ｐ、Ｅが同一直線上にあることを証明しようとする
・　三角形ＡＢＣの頂点Ｂ、Ｃから、それぞれの対辺ＣＡ、ＡＢまたは延長に引いた垂線の交点をＨとするとき、ＨＡ⊥ＢＣであることを証明せよ。ただし、三角形ＡＢＣは直角三角形ではない。	・$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ を求める事でＨＡ⊥ＢＣであることを証明しようとする

１３	・ベクトル方程式（媒介変数）	・　媒介変数表示を理解させる
１４	・３点を通る直線	・　媒介変数表示を用いて、３点の位置を考える
１５	演習	

・ 点Ａ（－２、５）を通り、方向ベクトルが $\vec{u} = (4,3)$ である直線の媒介変数表示を求めよ	・ $\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \end{cases}$ で表示する事ができ $y - y_1 = \dfrac{n}{m}(x - x_1)$ と書き換えて考える事ができる
・ 同一直線上にない３点Ｏ、Ａ、Ｂに対して $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 、$s + t = 1$ とするとき、点Ｐはどのような図形上にあるか図示せよ。	・ $s + t = 1$ のとき $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ について点Ｐは直線ＡＢ上にあるという関係を見つける

４　研究の経緯

問題作成の段階で考えていた案

●第１案

問題 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤを１：２に内分するをＥ、辺ＢＣの中点をＦとするとき、３点Ａ、Ｅ、Ｆは一直線上にあることを証明せよ。

[指摘]

・ スカラー倍を扱うものが望ましい
・ 授業設計したい箇所は、元のベクトルとスカラー倍されるベクトルが同一直線上にあることはまだ知らない段階であるように思われる
・ ２つの数量を与えるのは望ましくない
・ ベクトルのもつ図形的計算の意味が狙いたいものでは

[改善点]

・ ３点が一直線上にあることを求めるのではなく、２つの平行なベクトルがある場合一方は他方の実数倍で表すことができることを結論とした

●第２案

問題 平行四辺形ＡＢＣＤがある。、辺ＢＣの中点をＦとし、辺ＡＦと辺ＤＢの交点をＥとする。このときＢＥ：ＥＤ＝１：２である。 辺ＡＥと辺ＡＦの比はいくらになるか。

[指摘]

・問題において２つ条件を与える部分を変更するべき
・ 今後において、この問題から「中点でない場合」を考えさせることが可能か
・ 相似で解決した子にどんな支援をすれば、ベクトルの考えにつなげられるか、ベクトルで解決した子にどんな支援をすれば、相似の考えにつなげられるかを考えられるような問題に工夫してみる

[改善点]

・ 中点であることを無くして、どんな場合でも適応できるように改善

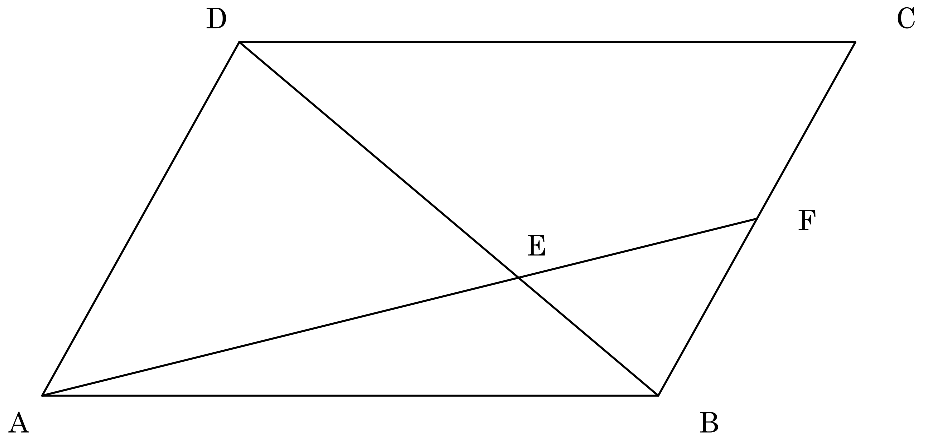
５．１ 学習過程

本時目標

いろいろな解法があることを知りそれぞれの解法の利点を研究する

問題

平行四辺形 ABCD がある。辺ＢＤを１：2 に内分する点を E、点 A をから点 E を通る直線を引く。そのとき辺 BC と交わる点を F とする。AE と AF は一直線上にあることを利用して AE : AF を求めよ。



５.２　問題に対する解決

○自力解決１「相似を用いて解く」

AD//BC より

∠DAE=∠BFE・・・①

∠EDA=∠EBF・・・②

対頂角だから

∠AED＝∠FEB・・・③

①、②、③より

△AED∽△FEB

BE : ED＝１ : ２より

AE : AF＝２ :（1＋２）

AE : AF＝２ : ３

自力解決３への支援

○AF が AE の直線上にあることを利用したい場合は？

○点 F の位置を表すには？

意図すること

○DB を内分する点 E に着目し、点 A と点 E の直線上に点 F があることを利用する

○BF : FC を文字で置き、内分の定理を用いて考える。

評価

図形の性質を理解しそれを利用し相似比を求め、AE : AF を求める。

〇　自力解決２「座標軸を用いて解く」

点Aを（０,０）点Bを（４,０）点Cを（６,４）点Dを（２,４）
と置くと

点Eは（３,4/3）

AEが表す直線は

$$y=\frac{4}{9}x$$

またBCが表す直線は

$$y=2x-8$$

二つの直線の交点Fは（9/2,２）

これを用いると

$$AE=\frac{\sqrt{97}}{3}$$

$$AF=\frac{\sqrt{97}}{2}$$

これより

AE : AF＝２ : ３

自力解決３への支援

〇直線AFと直線BCの交点を求めるという視点は変えずに別の方法で表せないか？

意図すること

〇交点を座標軸ではなくベクトルを用いて表すことを考え
連立方程式を解く

評価

座標軸を設定し数値をもって長さの比をもって比を求める。

○自力解決３「ベクトルを用いて解く」

点Ａから点Ｂに向かうベクトルを$\vec{b}$
点Ａから点Ｄに向かうベクトルを$\vec{d}$
とすると

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}$$ ・・・①

BF : FC＝ｓ ：１－ｓ
このように置くと

$$\overrightarrow{AF}=s(\vec{b}+\vec{d})+(1-s)\vec{d}$$ ・・・②

図との関係性から

$$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$$ ・・・③

①、②、③より

$$\vec{a}+s\vec{d}=k\overrightarrow{AE}$$

$$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{d}=\overrightarrow{AE}$$

$k\neq 0$から

$$k=\frac{3}{2}$$

$$s=\frac{1}{2}$$

よって
AE : AF＝２ ：３

BF : FC をｓ ：１－ｓとおけない生徒への支援

1. 実際にBF : FC をｓ ：ｔとおいてもらう。するとｔ＝１－ｓという関係が出てくる。
2. 比で表すのだから全体を１とみたら文字を減らすことができないか？

$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$ とおけない生徒への支援

○$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$と$\overrightarrow{AE}$は図形ではどういう関係であるか。その関係を表すには任意の定数を使ってどのように表せるか?

自力解決１を行っていない生徒への支援

○図形の性質から等しい箇所はないか?
　またそれによって何かいえることが無いか。

意図すること

○相似な三角形があることに気付き、相似から AE : AF を求めて欲しい

自力解決２を行っていない生徒への支援

○ 実際に AE と AF の長さを求めてその比を求めることはできないだろうか?

○ X 軸 Y 軸を$\vec{b},\vec{d}$と考えることはできないか?

意図すること

○ 長さを求めるにあたり点 A,B,C,D に座標を与える。それによりわからない点を求め AE の長さと AF の長さを求めて欲しい
○ 座標軸が直角に交わっていない軸でも今までで学んだことを使うことができる。

評価

○始点 A から図形の性質や AE は AF の何倍かという考え方を利用し、点 F の位置を求め、AE : AF を導き出すことができる

5.3 集団討議

生徒が用いた解決法を発表してもらう。順番としては１→２→３（ベクトルの授業なので最終的にベクトルの考えを抑えてもらう）

発問１

○自力解決１、２、３それぞれの考えの中で同じ考えを用いているものはないか？
→自力解決１と３が比の考えを用いている
→自力解決２と３が交点を求める方程式を解いている

意図

○ベクトルの考えには自力解決１、２で使う考えが含まれていることに気付いてもらいたい

発問２

○自力解決１、２、３それぞれわかることは何か？
→自力解決１は辺の長さに関係なく答えが出せる
→自力解決２は座標軸の設定で点 E、F の位置関係がわかる
→自力解決３は辺の長さを単位として点 E、F の位置関係がわかる

意図

それぞれの考えに優劣は無く一長一短であることを気付いてもらいたい

６　振り返り

◎自己評価

・ この講義を受けるまで授業というものは、問題を解いてその方法を学んでいくものだと考えていたが、「問題から何が分かるか」「どんな考えが重要になるのか」を伝えるものであり、教師の様々な意図が含まれているものであるのだと考えるようになった。

・ 授業を作るとき、この時間に何を学んで欲しいか、何を知らせたいかを考える事が重要であることを知った。また、それらを達成させるにはどんな行動や支援をすれば良いのかを考えて授業を計画していくことが、良い授業を作る第一歩であることを学んだ。

・ 自力解決３で「BF：FC をｓ：ｓ－１」への支援を二段階考えたことで生徒が理解しやすくなってくれたら良いと思う。

◎ 課題

・ 様々な参考文献を調べてみたり、インターネットで検索してみたりしたがベクトルが用いられるようになった本当の理由を調べる事ができなかったのが残念なので、機会があればどういった事情で生まれたのか知りたい。

・ 学習過程の問題を作るにあたってベクトルで表せて相似では表せない問題を作りたかった。ここでは、「AE と AF は一直線上」としたが、もっと良い表現があると思う。

・ 自力解決３で「Ｘ軸Ｙ軸が直角に交わらない座標軸」について考えてもらおうとしているがその支援が曖昧で上手な表現とは言えないと思う。

・集団討議の発問に対しての意図が伝わりにくいと思う。

・ ベクトルの活用により、何がどのように変化するか、またどういった考えの手助けをしてくれるのかをもっと幅広く考える事ができたら良かった。

◎ 参考文献
・インターネット
「高等学校学習指導要領
（平成 11 年 3 月告示、14 年 5 月、15 年 4 月、15 年 12 月
一部改正）－第 2 章：普通教育に関する各教科－」
http://www.mext.go.jp/b_menu/shuppan/sonota/9903
01/　03122603/005.htm
「過去の学習指導要領」　http://www.nicer.go.jp/guideline/old/

・　教科書
「新版数学　数学Ｂ」　実教出版
「チャート式　数学ⅡＢ」　数研出版
「数学Ｂ」　実教出版
「エクセル　数学Ⅱ＋Ｂ」　実教出版
「指導書　楽しさ広がる　数学Ⅱ」　啓林館
「指導書　未来へ広がる　数学Ⅱ」　啓林館