平成 19 年度　数学学習指導設計Ⅱ

確率と場合の数

－確率と場合の数を組合わせた授業設計－

H1 班　　畑中　貴達
大野　敦史
池田　和弥

目次

1　教材の選択

1.1　教材　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・H1 (2)
1.2　なぜ確率を選んだか？　・・・・・・・・・・・・・H1 (2)

2　テーマ設定
2.1　確率の歴史　・・・・・・・・・・・・・・・・・・H1 (2)
2.2　教科書　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・H1 (4)

3　授業設計
3.1　授業設計におけるテーマ・・ ・・・・・・・・・・H1 (5)
3.2　授業設計　Ⅰ　確率の基礎　・・・・・・・・・・H1 (6)
Ⅱ　順列と確率　・・・・・・・・・・H1 (8)
Ⅲ　組合せと確率　・・・・・・・・H1 (10)
Ⅳ　期待値　・・・・・・・・・・・・H1 (11)
Ⅴ　二項定理　・・・・・・・・・・H1 (11)

4　授業過程
4.1　選択した理由と問題設定・・・・・・・・・・・・H1 (12)
4.2　生徒の自力解決・・・・・・・・・・・・・・・・・H1 (13)
4.3　練り上げ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・H1 (15)

5　自己評価と課題
5.1 自己評価　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・H1 (17)
5.2 課題　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・H1 (17)

1　教材の選択

1.1　教材・・・確率

1.2　なぜ確率を選んだか？

確率の分野は日常に最も身近で、数学Ⅰ,A の中でも親しみやすく、数学が苦手な人も興味を持ちやすいと思ったから。

自分たちが数Ⅰ、A の中で一番苦手な範囲だったから。

2 テーマ設定

2.1　確率の歴史

＜確率の始まり＞

確率論の歴史的発端は、パスカルとその友人のシュバリエ・ド・メレの間の議論に始まる。

ある日、メレは賭博に関するある疑問を友人であるパスカルに伝えました。それは次のような疑問であった。

「A と B との間である賭けをしていた。その賭けは最終的に勝った方が全ての賭け金をもらえるギャンブルである。もしも、このゲームを途中で止めたとき、中間結果を見て賭け金をどのように配分すればよいのだろうか。」

例
A と B との間でコインの裏表にかける賭けをしたとする。お互いに 10 万円を出し合って、先に 3 勝した方が勝ちとする。(つまり、20 万円が得られる。)勝負が進み、A が 2 勝、B が 1 勝したところでゲームを中断したとする。このとき、賭け金であった 20 万円は A と B にどのような割合で分配したらよいか?

☆考え方1☆
勝負はついていないので、10 万円ずつ、A、B それぞれにキャッシュバックするという考え方。
★問題点1★
2 勝している A の方から不満が出る。

☆考え方2☆
A が 2 勝、B が 1 勝しているので、2:1 でお金を分けるという考え方。

★問題点2★
B が 0 勝だったとき、B の分け前が 0 になってしまうので適切とはいえない。
そこで、パスカルはこの問題を解くのに確率と期待値の概念を導入し、鮮やかに問題を解決した。

解決方法
A、B が一回毎の試行で勝つ確率はそれぞれ 1/2。勝負が続行されたとして、次の勝負で A が勝てば 3 勝 1 敗で A の勝ちとなる。また、次の勝負で A が負けた場合、A と B とは 2 勝ずつになるので、この後に A が勝てば、3 勝 2 敗で A の勝ち、B が勝てば 2 勝 3 敗で B の勝ちである。つまり、A が負けた場合には、その次の勝負で必ず、勝負がつく。
A が最初に負けて次の勝負で勝つ確率は 1/4。
A が最初に負けて次も負ける確率も 1/4。
従って、A が 2 勝 1 敗の段階で、A が最終的に賭けに勝つ確率は、3/4 であり、B が最終的に勝つ確率は 1/4。
よって、A が 2 勝 1 敗の段階では、A が 3/4 の確率、B が 1/4 の確率で勝利することが予想されるため、A が得られるお金の期待値は
E(A)=20×3/4=15 万円、E(B)=20×1/4=5 万円になり
A に 15 万円、B に 5 万円支払うのが、妥当だという結論に至る。
パスカルはその後、フェルマーとの手紙の交換を行い、確率論をさらに発展させていく。その議論が現在へと受け継がれ、今日の確率論が築かれた。

歴史を調べただけではテーマが決められなかったので、次は色々な出版社の教科書を調べてみた。

2.2　教科書

テーマを見つけるために、いろいろな出版社の教科書を調べた。
東京書籍の数 A の教科書に、「さいころを投げて１の目が出る確率や、くじで当たりくじを引く確率などは中学校で学んだ」と書いてあった。

↓

確率を高校で初めて習うわけではない。

教科書の中の場合の数と確率の単元を読み比較してみた。

例(確率)　トランプのエース４枚とジョーカーが１枚ある。この５枚のカードをよくきって、２枚を選ぶとき、そのなかにジョーカーが入っている確率を求めてみよう。

↓

例(場合の数)　(1) トランプのエース４枚とジョーカーが１枚ある。この５枚のカードをよくきって、２枚を選ぶときの選び方は何通りあるか？
(2)二枚のジョーカーが入るのは何通りあるか？

テーマを決める

確率＝(事象 A の起こる場合の数)／(起こりうるすべての場合の数)なので、
最初に確率というのがどういうものなのかを教えて、場合の数と確率をいっしょにして学習してもよいのではないのか考えるようになった。
また、学習指導要領を見てみると昭和元年までは、場合の数という単元はなかった。
教科書と学習指導要領を調べてみんなで話し合った結果、僕たちのテーマは、

確率と場合の数を組合せた授業設計を行うことに決まった。

3.1　テーマ「確率と場合の数を組み合わせた授業計画を設計する」

単元設計を行う上で工夫した点

・本来はじめに習うことになっている集合も確率の一部として組み込んだ。

↓　なぜか？

集合の単元は確率の乗法定理、加法定理、和事象、余事象を学ぶうえでとても大切な単元であり、別々に学習するより一緒に学習するほうがいいと感じたから。

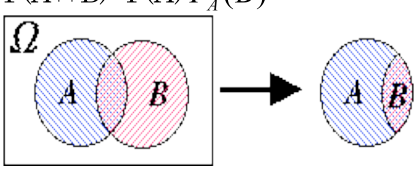
・ 確率の乗法定理、加法定理、余事象を各時間で取り扱うことによって、考え方を定着させる。

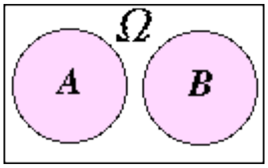
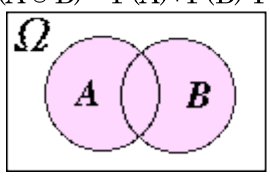
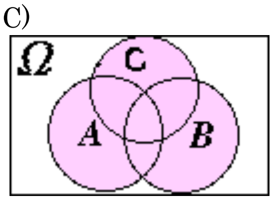
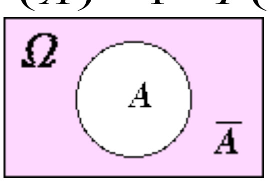
3.2　単元設計

目次
- Ⅰ　確率の基礎
- Ⅱ　順列と確率
- Ⅲ　組合せと確率
- Ⅳ　期待値
- Ⅴ　二項定理

Ⅰ　確率の基本

単元目標
（１）確率の意味を理解し、簡単な場合について確率を求めることができる。
（２）確率の加法定理、乗法定理について理解する。
（３）余事象、和事象の確率を求めることができる。

	学習内容	本時の目標	中心となる考え	問題	主たる数学的活動
1	確率の意味を理解し、簡単な確率を求めてみる。 $P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=$?©?ÌA,Ì‹N,±,é?ê?‡?Ì” / ‹N,±,è,€,é,·,?,Ä,Ì?ê ?‡,Ì	簡単な確率を求める。	確率の定義を理解して、簡単な確率を求める。	3 枚の硬貨を同時に投げるとき次の確率は？ (1)3 枚とも裏 (2)2 枚は表,1 枚は裏	A 全ての場合を書き出す。 B 樹形図を書いて解く。
2	確率の乗法定理について理解する。 ・事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件つきの確率を $P_A(B)$ とすると $P(A \cap B)=P(A)\,P_A(B)$ 	乗法定理を用いる確率を求める。	どういった状況で、乗法定理がつかえるのかを、図で理解し確率を求めてみる。	1.袋の中に当りくじ２個、はずれくじ３個、合計 5 個のくじが入っている。X，Y の２人がこの順にくじを１個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、X が当り、Y がはずれる確率は？	A 事象の図を書いて解く。

3	確率の加法定理について理解する。 ・２つの事象 A,B が互いに排反であるとき $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ 	加法定理を用いる確率を求める。	どういった状況で、加法定理がつかえるのかを、図で理解し確率を求めてみる。	1.袋の中に当りくじ２個、はずれくじ３個、合計 5 個のくじが入っている。X，Yの２人がこの順にくじを１個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、X と Y のどちらが有利か？	A 事象の図を書き、乗法定理も用いて解く。
4	和事象の確率（事象 A,B が互いに排反でないときの加法定理）を求めてみる。 ２つの事象 A,Ｂについて $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$ 	和事象の確率を求める。	図によって和事象というものを理解し、確率を求めてみる。	1~9 までの番号札があり、その中から 2 枚取り出すとき、2 枚とも奇数または 3 の倍数の確率は？	A 事象の図のようなものを書いて解く。
5	和事象の確率を求めてみる。（３の続き） ３つの事象 A,B,C について $P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(B \cap C)-P(C \cap A)+P(A \cap B \cap C)$ 	和事象の確率を求める。	図によって余事象というものを理解し、確率を求めてみる。	1~20 までの番号札があり、その中から１枚取り出すとき、奇数または 3 の倍数または 5 の倍数の確率は？	A 事象の図のようなものを書いて解く。
6	余事象の確率を求めてみる 全事象 U の事象 A とその余事象 $\overline{A}$ について $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 	余事象を理解し、確率を求める。	図によって余事象というものを理解し、確率を求めてみる。	3 個のさいころを投げるとき、目の最小値が 2 以下である確率は？	A 事象の図のようなものを書いて解く。

Ⅱ.順列と確率

単元目標

(1)順序よく、重複しないように数えあげるにはどのようにすればよいか考えてみようとする。　(関心・意欲・態度)

(2)順列の考え方を理解し、具体的な事象の起こりうる場合を順序よく整理し、考察することができる。　(数学的な考え)

(3)試行や自称の考えを明確にし、確率の基本的な法則を用いて具体的な事象について確率を求めることができる。　(表現・処理)

(4)順列の用語、記号を明確に理解している。(知識・理解)

	学習内容	本時目標	中心となる考え	問題	主たる算数的活動
7	順列の定義 順列と確率	P の定義を理解して、簡単な順列の問題を求められるようにする。 順列と確率の関係性を理解する。	n 個のものから r 個を取っての並べ方 順列と確率の関係性	1~5 の数字を書いた 5 枚のカードから 3 枚を抜き出して順に 1 列に並べる。 (1)並べかたは何通りあるか? (2)3 桁の数字が奇数になる確率は?	A 樹形図を書き出す。 B (1)での解法を(2)に利用する。 C 順列と確率の関係性を考える。
8	順列の積の法則	順列の積の法則を理解する。 順列と確率と余事象の関係性を理解する。	順列の積の法則 余事象の考え方	1~5 の数字を書いた 5 枚のカードから 3 枚を抜き出す (1)全部の中から奇数であるものは何通りあるか? (2)偶数である確率は?	A 順列の総数を求める。 B 積を使えば簡単に求められることに気付く。 C 余事象の考え方を利用して確率を求める。

9	円順列の定義 円順列と確率	円順列の定義を理解する。 円形に並べられたものの順列と確率の関係性を理解する。	n 個の異なるものを円形に並べられたときの並べ方	異なる色 5 つの玉を円形に並べた場合の順列の総数はいくらか? 6 個の白玉と 3 個の赤玉を円周上にでたらめに並べるときに赤玉どうしが隣り合わない確率は?	A 円順列の総数を求める。 B 確率を円順列の総数を使って求める。
10	重複順列の定義 重複順列と確率	重複順列の定義を理解する。 すべて異なるものから繰り返して取るときの順列と確率の関係性を理解する。	n 個の異なる種類のものから，繰り返しを許して r 個をとるときの並べ方	1~3 の数字を書いた 3 枚のカードから 1 枚を抜き出す。カードをもとに戻し，よく切ってからもう一度 1 枚を抜き出す。この手順を 3 回繰り返す。ただし、取り出した順に一、十、百の位とする (1)並べ方は何通りあるか? (2) 十の位が 2 である確率は?	A 重複順列の総数を求める。 B 並べ方が 3^3 となっていることに気付く。 C 確率を重複順列の総数を使って求める。

Ⅲ.組合わせと確率
単元目標：順列と組み合わせの違いや関連性を理解し、組合わせの式を導く。

組合わせをつかったさまざまな確率を求めることが出来る。

時	学習内容	本時の目標	中心となる考え	問題	主たる数学的活動
11	C の定義	順列の考え方と区別できるようにする。 組合せと順列の関係性について理解する。	A 人から B 人を選ぶ組合わせと A 人から B 人を選んで並べる順列の違い 組合わせと順列の関係性	(1)A～E の 5 人から 3 人を選ぶとき、A が含まれる組合わせは？	1.組合わせを具体的に書き出す。 2.組合わせと順列の関係性を考える。 3.組合わせの式を導き出す。
12	組合わせの積の法則	組合わせの積の法則を理解する。	組み合わせの積の法則	A～E の 5 人の男子生徒、F～J の女子生徒 5 人の計 10 人から 5 人を選ぶ。 (1) 男子 2 人、女子 3 人を選ぶ選び方とそのなかで A が選ばれる確率は？ (2) 男子から A 君を含んだ 2 人、女子から F さんを含んだ 3 人を選ぶ選び方とその確率は？	1.男子の選び方と、女子の選び方をそれぞれ書き出す。 2.男子の選び方と女子の選び方を組み合わせるとき、それは積を求めることで求められることに気づく。

13	組分けの問題	組分けの場合、どのように組合わせを用いるかを理解する。	N 組同数の組み分けの場合、求める組み分けは組合わせを N!で割ったものになる。	A～C の男子生徒と D～F の女子生徒 3 人ずつ、5 人を 2 人ずつ 3 つのグループに分ける。 (1)このような分け方は何通りか？また A が含まれる確率は？ (2)各グループが男女 1 人ずつになるような分け方は何通りあるか?またそのなかに A の含まれる確率は？	1. 組合わせを書き出して、それぞれの分け方を求める。 2. 今までのように C を用いて組合わせを求めたとき、それよりも小さな数になっていることに気づく。 3. 2.は組合わせ÷3!になっていることに気づく。
14.15	組み合わせの応用				

Ⅳ　期待値

Ⅴ　二項定理

４　授業過程

4.1　選択した理由と問題設定

Ⅲの第一時を具体的に授業設計する（p.H1 (7) 参照）

なぜ、その時間を選んだか？

・ 自分達が作ったオリジナルの単元で授業をしてみたいと思ったから。

・ 順列と組み合わせの区別がつかない生徒がいると思ったので、しっかりと教えたいと思ったから。

授業で取り扱う問題を話し合って、「A～E の 5 人の中から 3 人選ぶとき、A が選ばれる確率は？」という問題を取り扱うことに決まった。

なぜこのような問題を設計したのか？

・ 組合わせと確率の第１時間目の授業なので書き出して解けるような簡単な問題にした。

・ 生徒が書き出すことによって、これまでに習ってきた順列との違いや関係性に気づきやすくしたかったから。

・ 順列との関係性に気づいて、生徒が自分で組合わせの式を導き出せるようにしたかったから。

まず、自力解決と支援を次のように場合分けした。

自力解決Ａ
○ 既習を使い、何とか解決しようとしている。

自力解決Ｂ
○ 既習を使いながら、より洗練された解決法を見出している。
○ 本時目標の数学的価値の一部を含んでいる。

自力解決Ｃ
○ さらに手際よく、洗練された考え方をし、新しい見方や考え方を生み出している。

支援１　　　現在の活動を実現させる支援
○ つまずき等によって活動が止まっている児童に対し与え、その支援によって乗り越え、算数的活動を続けることが出来る。

支援２　　　次の活動を促す支援
○ より高い活動レベルに引き上げる支援
○ 現在行っている活動に対し、別な角度の解決に取り組んだり、より高い数学的価値をもつ活動に取り組ませるための支援

支援３　　　数学的な価値に気づかせる支援
○ 児童が無方向、無意識に取り組んだ活動に対し、数学的意味づけを行う支援
○ 児童自身がそれまでに行ってきたいくつかの考え方に対し、より数学的価値が高いのはどれかに気づかせる支援
○ 数学的な価値に気づかせることによって、それまで行ってきた活動（ＡやＢなど）が、別の見方で見ることができ、全体の中で価値の位置づけができるような支援
○ 特殊から一般へ 考えが広がる思考へ向けた支援

問題.A～E の 5 人から 3 人を選ぶとき、A が選ばれる確率は？

4.2 生徒の自力解決

自力解決Ａ－１→書き出して解く。
前に学習した順列として、
(A,B,C)=(B,A,C)=(A,C,B)=(B,C,A)
=(C,A,B)=(C,B,A)であると考えて、
多く書き出してしまう。
支援１
(A,B,C)=(B,A,C)=(A,C,B)=(B,C,A)
=(C,A,B)=(C,B,A)
は違うんじゃないかな？
支援１
『Ａ～Ｅの５人から３人を選んで並べる』と『Ａ～Ｅの５人から３人を選ぶ』問題の違いについて具体的に考えてみよう。

自力解決Ａ－２→計算から求める。
前に学習した順列の考え方を用いて
${}_5P_3=60$　通り
と求める。

支援１
『Ａ～Ｅの５人から３人を選んで並べる』と『Ａ～Ｅの５人から３人を選ぶ』問題の違いについて具体的に考えてみよう。

自力解決Ａ－３
問題の組合わせを書き出し、確率を求める。
(A,B,C)　(A,B,D)　(A,B,E)　(A,C,D)　(A,C,E)
(A,D,E)　(B,C,D)　(B,C,E)　(B,D,E)　(C,D,E)
$6/10=3/5$
支援２
10 通りを順列の式を用いて表せないかな？

自力解決Ｂ－１

二重線部が３人を一列に並べる順列 ${}_3P_3$ であると求められる。

支援２

10 通りを P を用いて表してみよう。

自力解決Ｂ－２

問題の選び方の総数は　${}_5P_3/{}_3P_3$　と表せる。

【５人から３人を選ぶ組合わせ：${}_5P_3/{}_3P_3$】

支援２

順列の式で問題の解を表してみよう。

自力解決Ｃ－１

分母は ${}_5P_3/{}_3P_3=10$ と求めることができる。

しかし、分子はどう表せばよいかでつまずく。

支援１

分子は必ず A が含まれる選び方なので A を固定して考えてみよう。

(A,?,?)・・・・・・

自力解決Ｃ－２

分子の組合わせは、A を固定する。つまり、残り４人から２人を選ぶ組合わせなので ${}_4P_2/{}_2P_2$ であることがわかるので確率を求めることができる。

一般化・評価問題へ

4.3 練り上げ・評価問題

・練り上げ

先・・・先生　　生・・・生徒

自力解決Ａ－３→自力解決 B－１→自力解決 B－2
順列の問題と組合わせの問題の違いを理解させるために次のような表を書いて、違いや関連性に気づいてもらう。
組合わせを順列で表せることに気付いてもらう。

5 人から３人を選んで並べる。	5 人から３人を選ぶ
↓	↓
(A,B,C)(B,A,C)(A,C,B) (B,C,A)(C,A,B)(C,B,A) ・・・・・・・	(A,B,C) ・・・・・ 10 通り

先５人から３人を選んで並べる問題の並べ方を左に、今日の問題の選び方を右に書いてみました。
左の問題の並べ方は全部で何通りあるかな？

生 ${}_5P_3=60$　通りです。

(A,B,C)(B,A,C)(A,C,B) (B,C,A)(C,A,B)(C,B,A) ・・・・・・・ ${}_5P_3=60$　通り	(A,B,C) ・・・・・ 10 通り

先ではこれを見て、左の二重線を順列の式を使って表せないかな？

生３人を一列に並べる並べ方なので、${}_3P_3$　。

先これらを使って 10 通りを P を用いて表してみよう。

生 ${}_5P_3/{}_3P_3$ ＝10 通りだ。

自力解決 B－2→自力解決 C－１→自力解決 C－2
これまでのことをもとに次は生徒に分子を求めてもらう。
A が選ばれるので残り４人から２人を選ぶ組合わせであり $_4P_2/_2P_2$ であることに気づいた生徒に、前でその考え方を発表してもらう。
それによって、考え方に気づいてもらう。

自力解決 C－２→一般化
まず生徒に n 人から r 人を選ぶ組合わせをさっき解いた問題をもとに順列の式で表してもらう。

n 人から r 人を選ぶ組合わせ：$_nP_r/_rP_r$

次に、それを順列の式を使わずに n と r で表してもらう。
$_nP_r/_rP_r = n!/\,r!(n-r)!$

最後にこの上の式を C を用いて表すことができることを示す。
$_nP_r/_rP_r = n!/\,r!(n-r)! = {}_nC_r$

評価問題

今回の授業で学んだ、C の定義を定着させるため、次のような問題を出題する。

1. A～G の７人から３人を選ぶとき、B が選ばれる確率は？
2. A～H の８人から４人を選ぶとき、A,B が選ばれる確率は？

5.自己評価と課題

5.1 自己評価

・確率の歴史を調べることにより、どうして確率の考え方が始まったかなどの確率の起源や、フェルマーやオイラーが確率と大きく関わっていたということなど今まで知らなかったことが分かった。

・確率の単元に場合の数や集合を含むことや、「確率の基本」→「順列と確率」→「組合せと確率」という順番で教える、今までにない指導案を試みて、教科書の問題をそのまま使えないなどの問題が生じ大変だった。しかし、授業を作っていくうちにどのような支援をすれば生徒はここにいきつくだろうか、このことに気付いてくれるだろうかと生徒の行動を予測しつつ授業設計していくことが重要であり、またそのように設計することが良い授業に繋がるのだということがわかった。

・最初のほうは今まで自分たちが受けてきた授業どおりの指導案を作っていた。しかし先生から発表のときにご指摘をいただいて、公式をただ単に教えるだけの授業から授業の中で生徒たちにどうやって公式を導かせるかの授業の学習指導案を作った。作ってみて感じたことは、「公式を教えてもらって問題を解く」の従来の教え方ではなく、生徒に授業で考えさせる時間を増やすことによって問題から何が分かるか、またどんな考え方が重要かを汲み取れる教え方かが重要であるということがわかった。また、その教え方のほうが授業への興味・関心が増し、勉学の向上にも繋がるのではないかと感じた。

5.2 課題

・初めスパイラルの形で生徒たちに教えられるように指導計画を作っていてが、完成した指導計画の問題があまりスパイラルの形になっていなかった。

・授業計画の中で例題として挙げた問題があまりよくなかった。もう少しいい問題を見つけることができればよかった。

参考文献

「確率論史」　アイザック・トドハンター原著　安藤洋美訳、いろいろな出版社の教科書