2020 年度

数学学習指導分析 II

単元：空間図形

Ｄ班
伊與森勇希
鞆星輝
清水太智

目次

１．単元設定と設定理由

【単元設定】

立体図形　（中３）

【設定理由】

１年次の立体図形の学習は図形的な表現力，直観力，洞察力を育成することが重要である。一方３年次は図形について見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす。

この直観的な見方と論理的な思考との間にはギャップがあり、そのことで苦手意識を持つ生徒もいると思う。どうすれば直観的な判断に左右されやすい状態の生徒を論理的に思考する段階へと促せるのかを考えていきたいと思いこの単元を選択した。

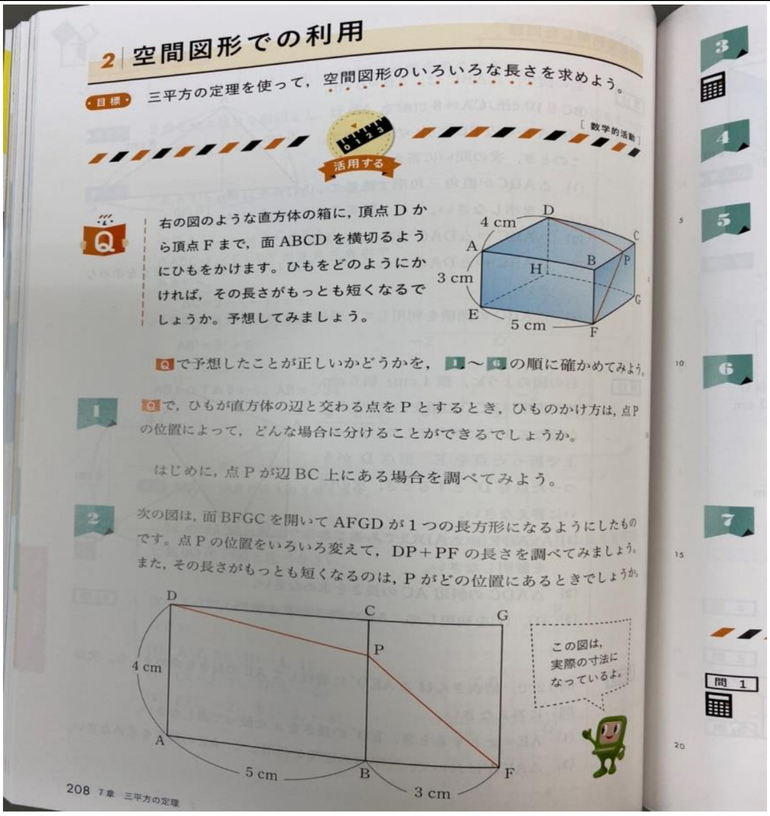
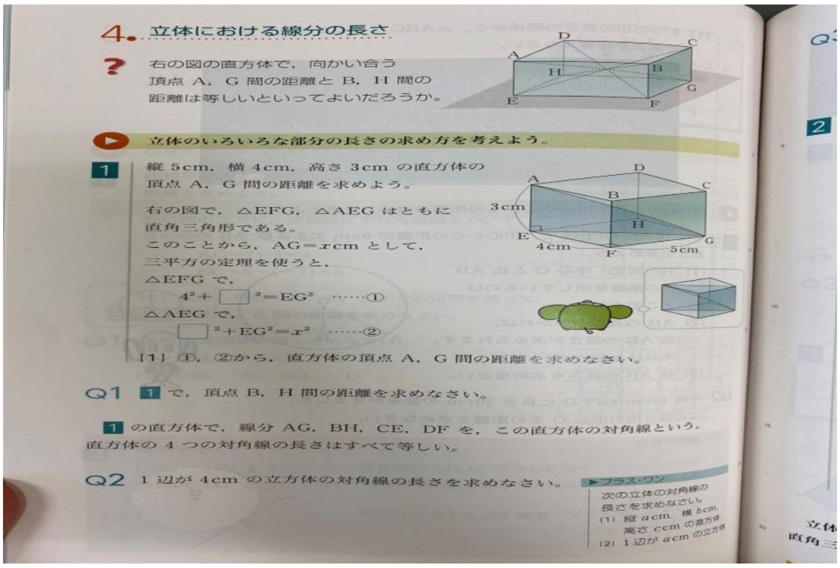
２．授業におけるテーマ設定

テーマ「図形について見通しをもって論理的に考察し図に表す」

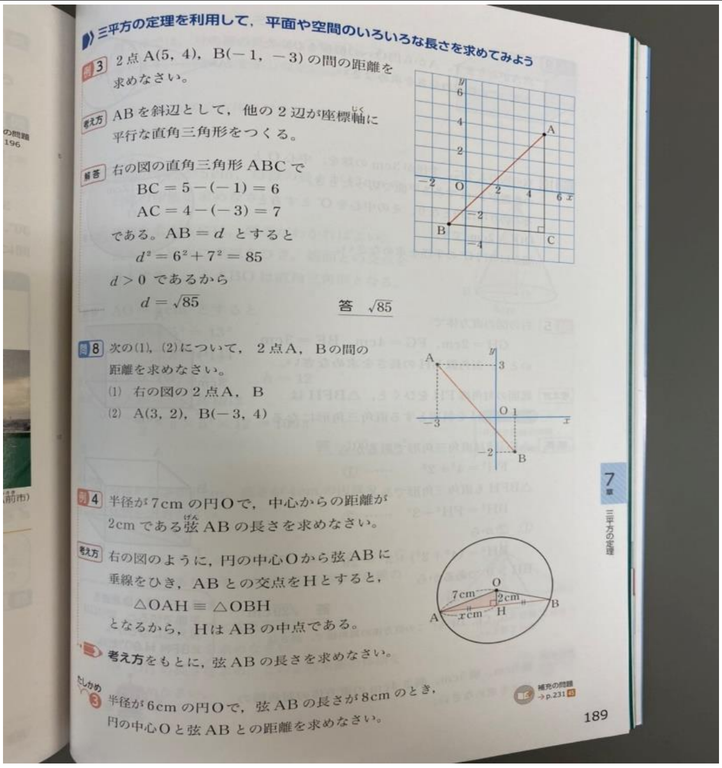
【設定理由】

立体を考える際にいつでもその物体を用意出来るとは限らないし、立体の切り口を考えるときにも実際には切れないこともある。そういう場合に実物を見なくてもイメージができる力を身に着けて欲しいと考え、このテーマを設定した。

３．教科書の検討

<table>
<tr><td>学年</td><td>教科書名・出版社</td><td>内容</td></tr>
<tr><td>中三
28</td><td>学校図書</td><td>
2 空間図形での利用
目標 三平方の定理を使って，空間図形のいろいろな長さを求めよう。
数学的活動
活用する
Q 右の図のような直方体の箱に，頂点Dから頂点Fまで，面ABCDを横切るようにひもをかけます。ひもをどのようにかければ，その長さがもっとも短くなるでしょうか。予想してみましょう。
Qで予想したことが正しいかどうかを，1～3の順に確かめてみよう。
1 Qで，ひもが直方体の辺と交わる点をPとするとき，ひものかけ方は，点Pの位置によって，どんな場合に分けることができるでしょうか。
はじめに，点Pが辺BC上にある場合を調べてみよう。
2 次の図は，面BFGCを開いてAFGDが1つの長方形になるようにしたものです。点Pの位置をいろいろ変えて，DP＋PFの長さを調べてみましょう。また，その長さがもっとも短くなるのは，Pがどの位置にあるときでしょうか。
この図は，実際の寸法になっているよ。
208 7章 三平方の定理</td></tr>
<tr><td>中三
28</td><td>大日本図書</td><td>
4. 立体における線分の長さ
? 右の図の直方体で，向かい合う頂点A，G間の距離とB，H間の距離は等しいといってよいだろうか。
立体のいろいろな部分の長さの求め方を考えよう。
1 縦5cm，横4cm，高さ3cmの直方体の頂点A，G間の距離を求めよう。
右の図で，△EFG，△AEGはともに直角三角形である。
このことから，AG＝$x$cmとして，三平方の定理を使うと，
△EFGで，
$4^2+\boxed{}^2=EG^2$ ……①
△AEGで，
$\boxed{}^2+EG^2=x^2$ ……②
[1] ①，②から，直方体の頂点A，G間の距離を求めなさい。
Q1 1で，頂点B，H間の距離を求めなさい。
1の直方体で，線分AG，BH，CE，DFを，この直方体の対角線という。
直方体の4つの対角線の長さはすべて等しい。
Q2 1辺が4cmの立方体の対角線の長さを求めなさい。
プラス・ワン 次の立体の対角線の長さを求めなさい。(1) 縦$a$cm，横$b$cm，高さ$c$cmの直方体 (2) 1辺が$a$cmの立方体</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>中三

28</td>
<td>東京書籍</td>
<td>


三平方の定理を利用して，平面や空間のいろいろな長さを求めてみよう

例3 2点A(5, 4)，B(−1，−3)の間の距離を求めなさい。

考え方 ABを斜辺として，他の2辺が座標軸に平行な直角三角形をつくる。

解答 右の図の直角三角形ABCで

$BC = 5-(-1) = 6$

$AC = 4-(-3) = 7$

である。$AB = d$ とすると

$d^2 = 6^2 + 7^2 = 85$

$d > 0$ であるから

$d = \sqrt{85}$

答 $\sqrt{85}$

問8 次の(1)，(2)について，2点A，Bの間の距離を求めなさい。

(1) 右の図の2点A，B

(2) A(3, 2)，B(−3, 4)

例4 半径が7cmの円Oで，中心からの距離が2cmである弦ABの長さを求めなさい。

考え方 右の図のように，円の中心Oから弦ABに垂線をひき，ABとの交点をHとすると，

△OAH ≡ △OBH

となるから，HはABの中点である。

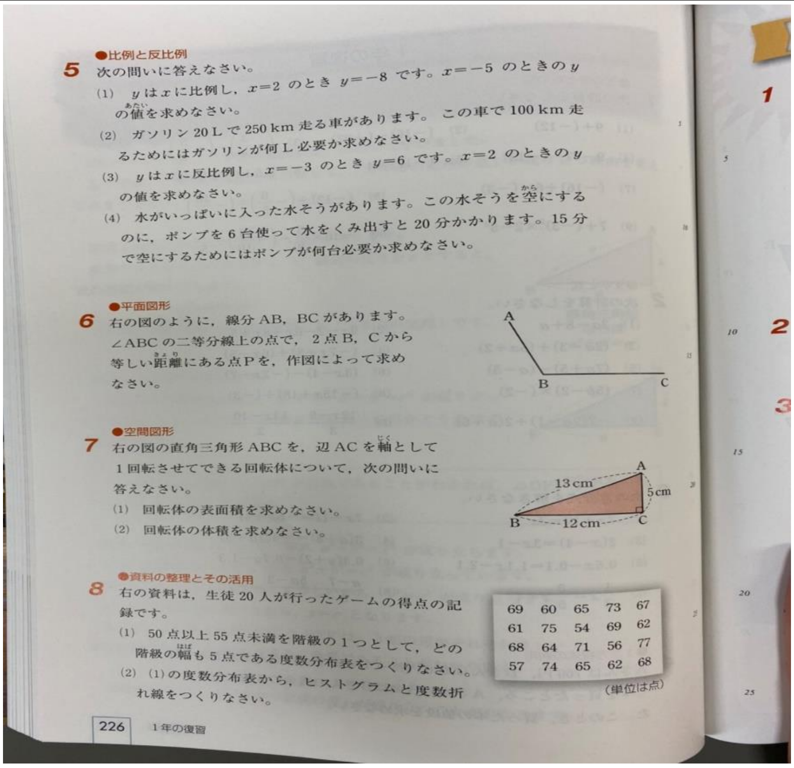
考え方をもとに，弦ABの長さを求めなさい。

たしかめ 3 半径が6cmの円Oで，弦ABの長さが8cmのとき，円の中心Oと弦ABとの距離を求めなさい。

補充の問題 →p.231

189

7章 三平方の定理
</td>
</tr>
<tr>
<td>中三

28</td>
<td>数研出版</td>
<td>


●比例と反比例

5 次の問いに答えなさい。

(1) y は x に比例し，$x=2$ のとき $y=-8$ です。$x=-5$ のときの y の値を求めなさい。

(2) ガソリン 20 L で 250 km 走る車があります。この車で 100 km 走るためにはガソリンが何 L 必要か求めなさい。

(3) y は x に反比例し，$x=-3$ のとき $y=6$ です。$x=2$ のときの y の値を求めなさい。

(4) 水がいっぱいに入った水そうがあります。この水そうを空にするのに，ポンプを 6 台使って水をくみ出すと 20 分かかります。15 分で空にするためにはポンプが何台必要か求めなさい。

●平面図形

6 右の図のように，線分 AB，BC があります。∠ABC の二等分線上の点で，2 点 B，C から等しい距離にある点Pを，作図によって求めなさい。

●空間図形

7 右の図の直角三角形 ABC を，辺 AC を軸として 1 回転させてできる回転体について，次の問いに答えなさい。

(1) 回転体の表面積を求めなさい。

(2) 回転体の体積を求めなさい。

●資料の整理とその活用

8 右の資料は，生徒 20 人が行ったゲームの得点の記録です。

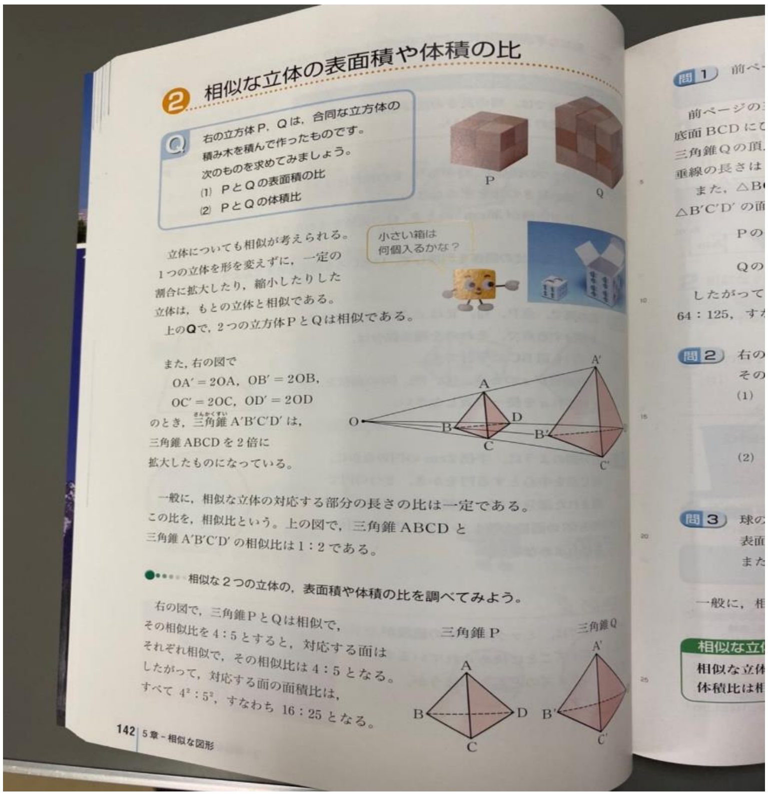
(1) 50 点以上 55 点未満を階級の 1 つとして，どの階級の幅も 5 点である度数分布表をつくりなさい。

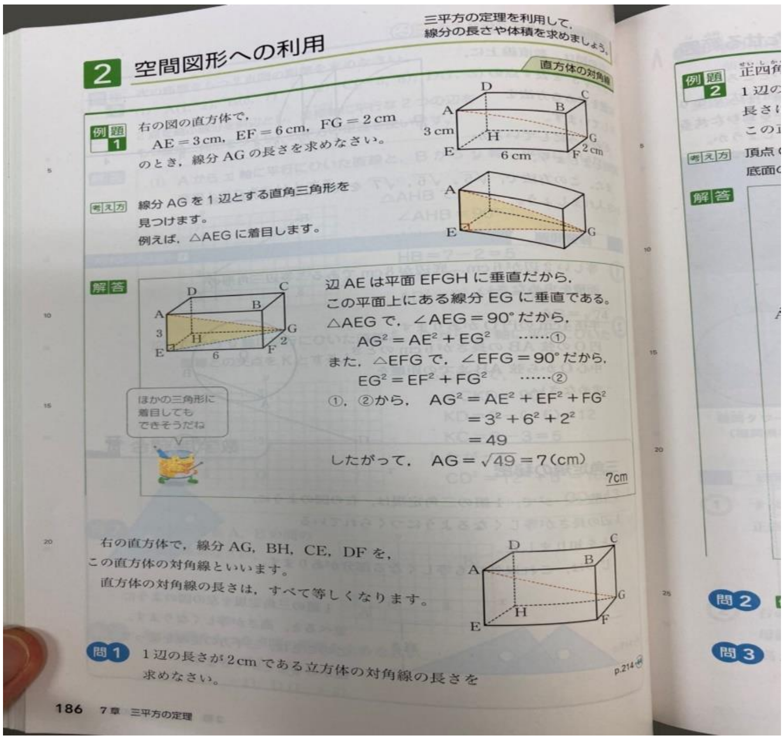
(2) (1)の度数分布表から，ヒストグラムと度数折れ線をつくりなさい。

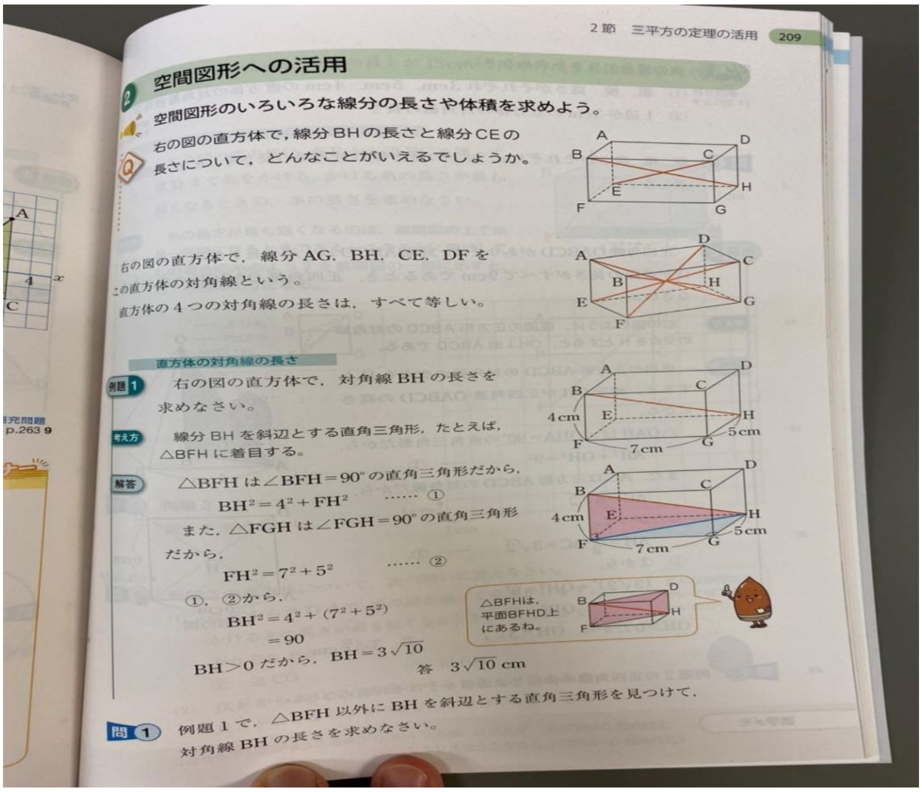
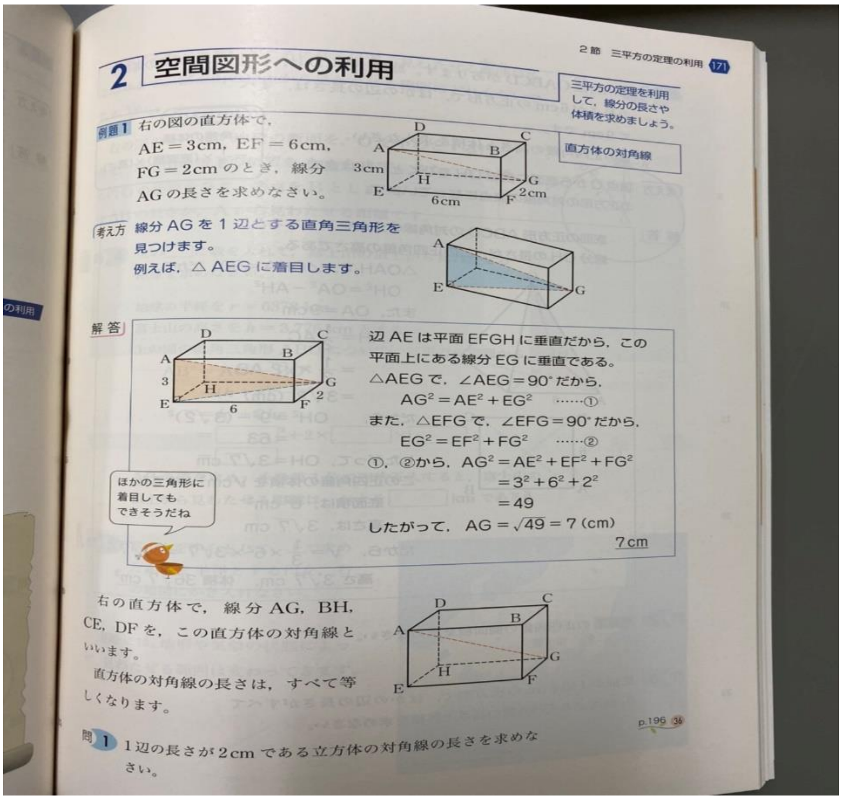
69 60 65 73 67
61 75 54 69 62
68 64 71 56 77
57 74 65 62 68
(単位は点)

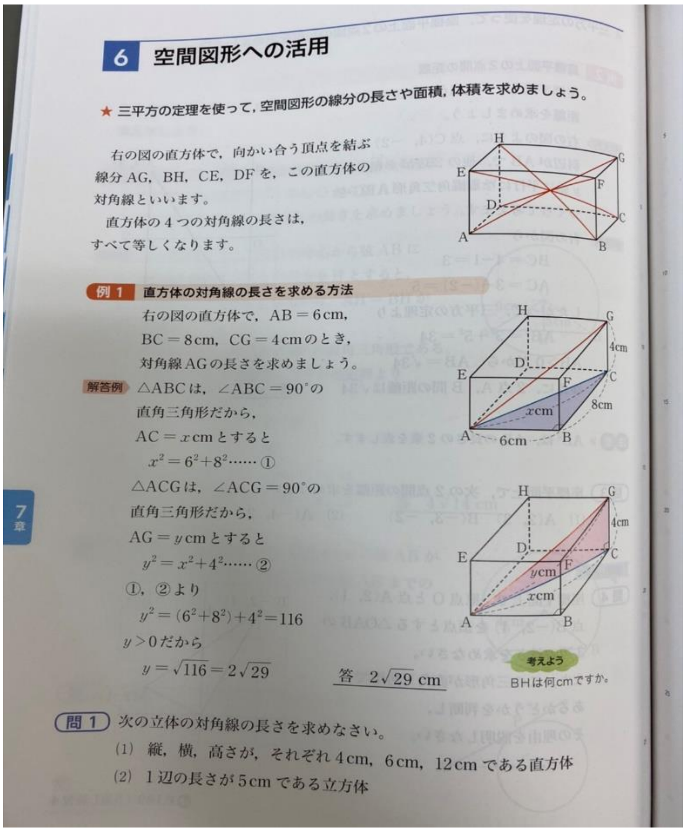
226 1年の復習
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>中三

24</td>
<td>東京書籍</td>
<td>
2 相似な立体の表面積や体積の比
Q 右の立方体P，Qは，合同な立方体の積み木を積んで作ったものです。次のものを求めてみましょう。
(1) PとQの表面積の比
(2) PとQの体積比
P　Q
小さい箱は何個入るかな？
立体についても相似が考えられる。1つの立体を形を変えずに，一定の割合に拡大したり，縮小したりした立体は，もとの立体と相似である。
上のQで，2つの立方体PとQは相似である。
また，右の図で
$OA' = 2OA$，$OB' = 2OB$，
$OC' = 2OC$，$OD' = 2OD$
のとき，三角錐(さんかくすい) A'B'C'D' は，三角錐ABCDを2倍に拡大したものになっている。
一般に，相似な立体の対応する部分の長さの比は一定である。この比を，相似比という。上の図で，三角錐ABCDと三角錐A'B'C'D'の相似比は1：2である。
相似な2つの立体の，表面積や体積の比を調べてみよう。
右の図で，三角錐PとQは相似で，その相似比を4：5とすると，対応する面はそれぞれ相似で，その相似比は4：5となる。
したがって，対応する面の面積比は，すべて $4^2 : 5^2$，すなわち16：25となる。
三角錐P　三角錐Q
142 5章－相似な図形</td>
</tr>
<tr>
<td>中三

28</td>
<td>啓林者</td>
<td>
2 空間図形への利用
三平方の定理を利用して，線分の長さや体積を求めましょう。
直方体の対角線
例題1 右の図の直方体で，
AE＝3cm，EF＝6cm，FG＝2cm
のとき，線分AGの長さを求めなさい。
考え方 線分AGを1辺とする直角三角形を見つけます。
例えば，△AEGに着目します。
解答 辺AEは平面EFGHに垂直だから，この平面上にある線分EGに垂直である。
△AEGで，∠AEG＝90°だから，
$AG^2 = AE^2 + EG^2$ ……①
また，△EFGで，∠EFG＝90°だから，
$EG^2 = EF^2 + FG^2$ ……②
①，②から，$AG^2 = AE^2 + EF^2 + FG^2$
$= 3^2 + 6^2 + 2^2$
$= 49$
したがって，$AG = \sqrt{49} = 7$(cm)
7cm
ほかの三角形に着目してもできそうだね
右の直方体で，線分AG，BH，CE，DFを，この直方体の対角線といいます。
直方体の対角線の長さは，すべて等しくなります。
問1 1辺の長さが2cmである立方体の対角線の長さを求めなさい。 p.214
186 7章 三平方の定理</td>
</tr>
</table>

中三 28	教育出版	 2節 三平方の定理の活用 209 2 空間図形への活用 空間図形のいろいろな線分の長さや体積を求めよう。 Q 右の図の直方体で，線分BHの長さと線分CEの長さについて，どんなことがいえるでしょうか。 右の図の直方体で，線分AG，BH，CE，DFをこの直方体の対角線という。 直方体の4つの対角線の長さは，すべて等しい。 直方体の対角線の長さ 例題1 右の図の直方体で，対角線BHの長さを求めなさい。 考え方 線分BHを斜辺とする直角三角形，たとえば，△BFHに着目する。 解答 △BFHは∠BFH=90°の直角三角形だから， $BH^2=4^2+FH^2$ ……① また，△FGHは∠FGH=90°の直角三角形だから， $FH^2=7^2+5^2$ ……② ①，②から， $BH^2=4^2+(7^2+5^2)=90$ BH>0だから，$BH=3\sqrt{10}$ 答 $3\sqrt{10}$ cm △BFHは，平面BFHD上にあるね。 問1 例題1で，△BFH以外にBHを斜辺とする直角三角形を見つけて，対角線BHの長さを求めなさい。
中三 24	啓林者	 2節 三平方の定理の利用 171 2 空間図形への利用 三平方の定理を利用して，線分の長さや体積を求めましょう。 直方体の対角線 例題1 右の図の直方体で，AE=3cm，EF=6cm，FG=2cmのとき，線分AGの長さを求めなさい。 考え方 線分AGを1辺とする直角三角形を見つけます。例えば，△AEGに着目します。 解答 辺AEは平面EFGHに垂直だから，この平面上にある線分EGに垂直である。 △AEGで，∠AEG=90°だから， $AG^2=AE^2+EG^2$ ……① また，△EFGで，∠EFG=90°だから， $EG^2=EF^2+FG^2$ ……② ①，②から，$AG^2=AE^2+EF^2+FG^2=3^2+6^2+2^2=49$ したがって，$AG=\sqrt{49}=7$ (cm) 7cm ほかの三角形に着目してもできそうだね 右の直方体で，線分AG，BH，CE，DFを，この直方体の対角線といいます。 直方体の対角線の長さは，すべて等しくなります。 p.196 問1 1辺の長さが2cmである立方体の対角線の長さを求めなさい。

中三 28	日本文教出版社	

6 空間図形への活用

★ 三平方の定理を使って，空間図形の線分の長さや面積，体積を求めましょう。

右の図の直方体で，向かい合う頂点を結ぶ線分 AG，BH，CE，DF を，この直方体の対角線といいます。

直方体の 4 つの対角線の長さは，すべて等しくなります。

例 1　直方体の対角線の長さを求める方法

右の図の直方体で，AB = 6 cm，BC = 8 cm，CG = 4 cm のとき，対角線 AG の長さを求めましょう。

解答例　△ABC は，∠ABC = 90°の直角三角形だから，

AC = x cm とすると

$x^2 = 6^2 + 8^2$……①

△ACG は，∠ACG = 90°の直角三角形だから，

AG = y cm とすると

$y^2 = x^2 + 4^2$……②

①，②より

$y^2 = (6^2 + 8^2) + 4^2 = 116$

$y > 0$ だから

$y = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$　　　答　$2\sqrt{29}$ cm

考えよう

BHは何cmですか。

7 章

問 1　次の立体の対角線の長さを求めなさい。

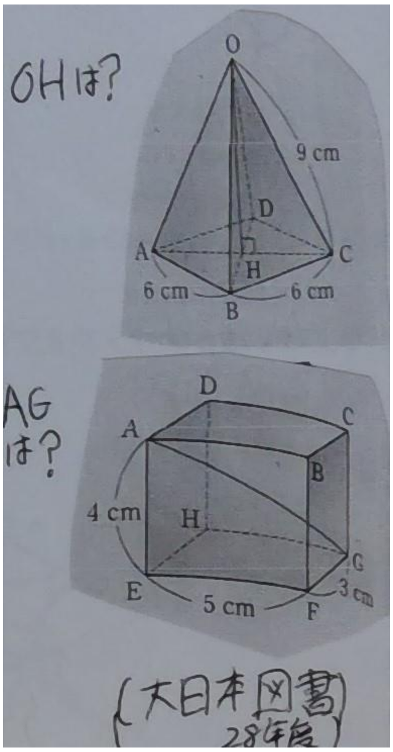
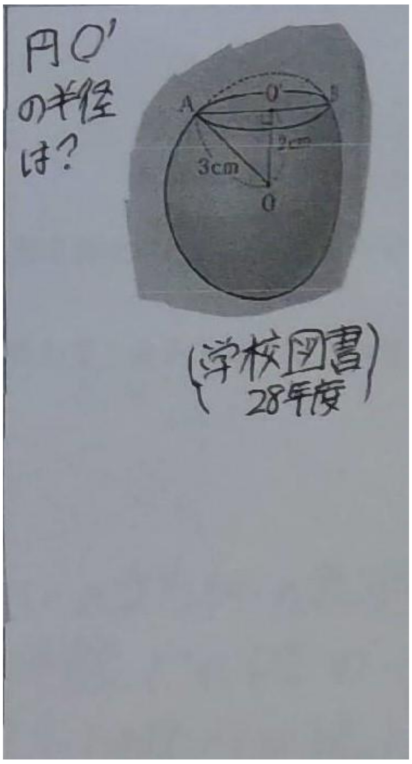
(1)　縦，横，高さが，それぞれ 4 cm，6 cm，12 cm である直方体

(2)　1 辺の長さが 5 cm である立方体

検討

①どのような使われ方か？

立体を平面で切ったりし、平面として考える問題は主にこの二つに分かれた。

		
大日本図書	○	×
学校図書	○	○
教育出版	○	△
啓林館	○	△
日本文教出版	○	×
数研出版	△	×
東京書籍	△	×

○・・・教科書の例題として考え方付きで使われている。

△・・・練習問題として使われている。

×・・・使われていない。

（各教科書 28 年度参照）

②なぜ？

立体の中に直下各三角形を見つけることで三平方の定理を使わせるため。切り取られた面についてはあまり言及されていない。（東京書籍は切り取られた図形がどのような図形になるかを言及する問題を取り扱っていた。）

４．授業で取り扱う問題設定

三平方の定理を用いて空間図形問題を解く応用の内容を取り扱うということで、少し複雑に見える図形を選んだ。問題を解くにあたって切断面をうまく図示出来るかが鍵となる。また、多くの中学生が苦手意識をもっている文字をとりあつかった。

[問題]

下の図のように、1 辺 a の立方体の各頂点と中心に球(半径 r)の中心が位置しているとき、r を a を用いて表せ。ただし図 1 は、球の中心だけを取り出した図となっており、球は対角線上で接しているとする。

↓

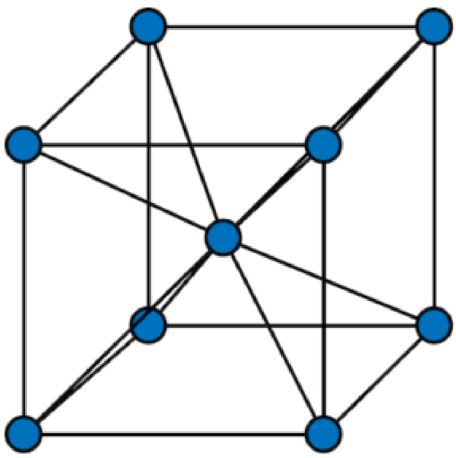


図 1

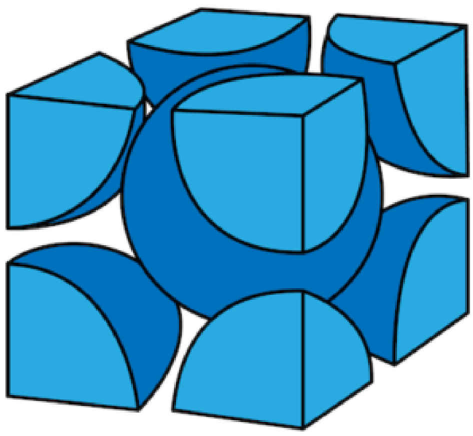


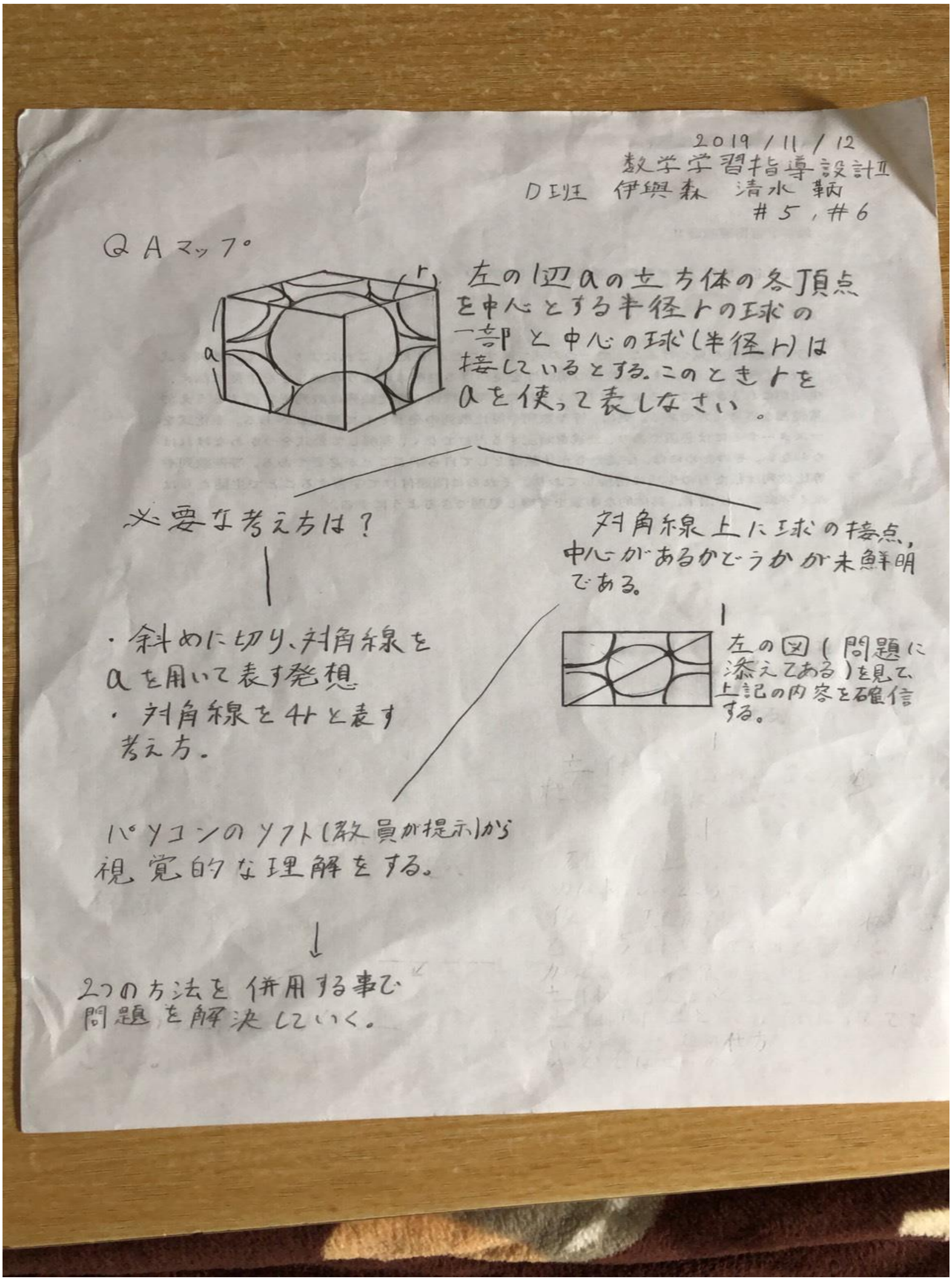
図 2

ここで以下のように指摘を受けた

球の接点と対角線が交わっていることはどうやって証明するのか。

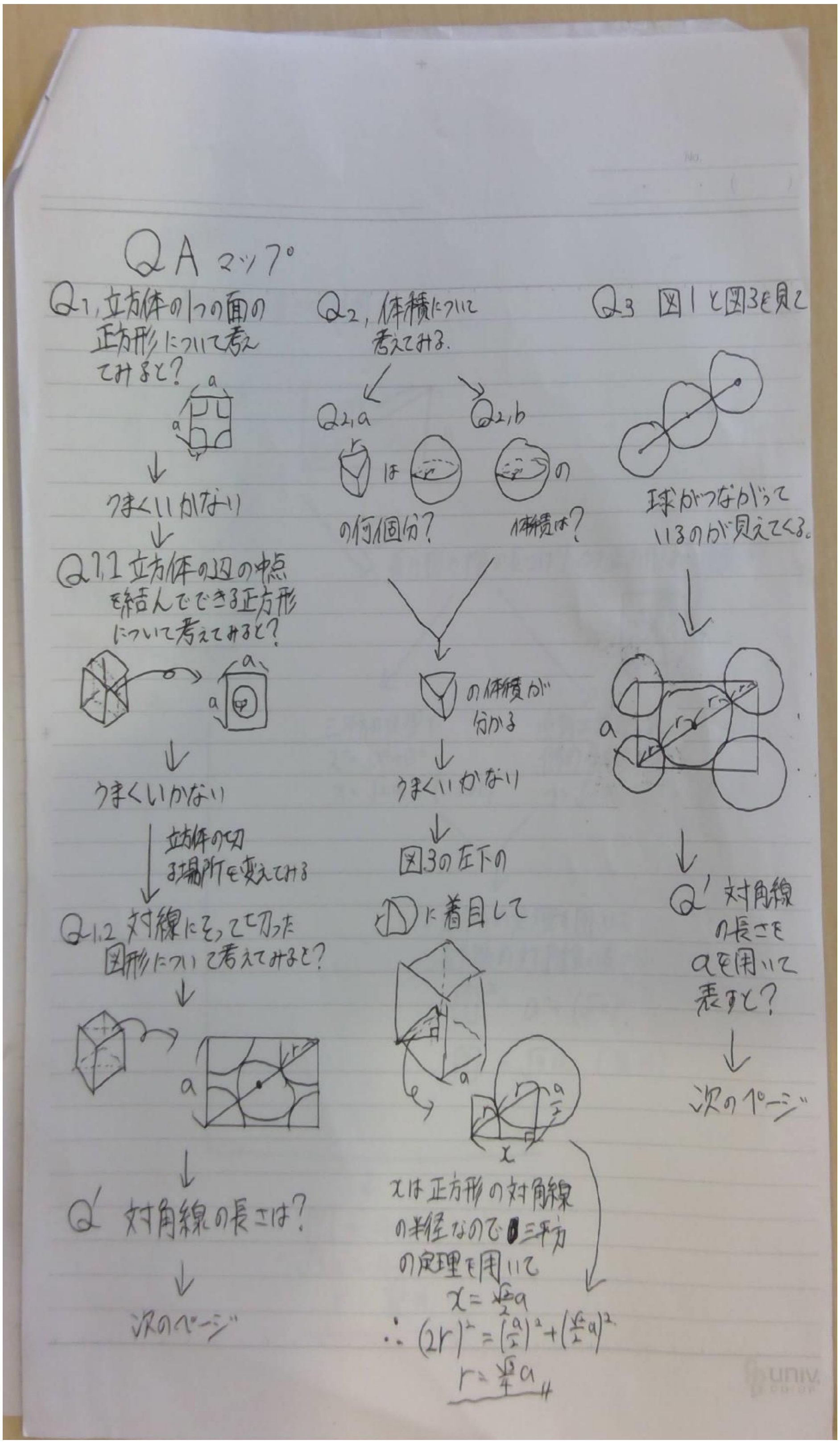
５．ＱＡマップ

ここでは、図の関係から画像で示すことにする。以下ＱＡマップとなる。



ここで以下のように指摘を受けた

番号の割り振りがない。



QAマップ

Q1, 立方体の1つの面の正方形について考えてみると？

↓

うまくいかない

↓

Q1.1 立方体の辺の中点を結んでできる正方形について考えてみると？

↓

うまくいかない

↓ 立方体の切る場所を変えてみる

Q1.2 対線にそって切った図形について考えてみると？

↓

Q' 対角線の長さは？

↓

次のページ

Q2, 体積について考えてみる.

Q2,a は の何個分？

Q2,b の体積は？

の体積が分かる

↓

うまくいかない

↓

図3の左下の に着目して

xは正方形の対角線の半径なので三平方の定理を用いて

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\therefore (2r)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$

$r = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

Q3 図1と図3を見て

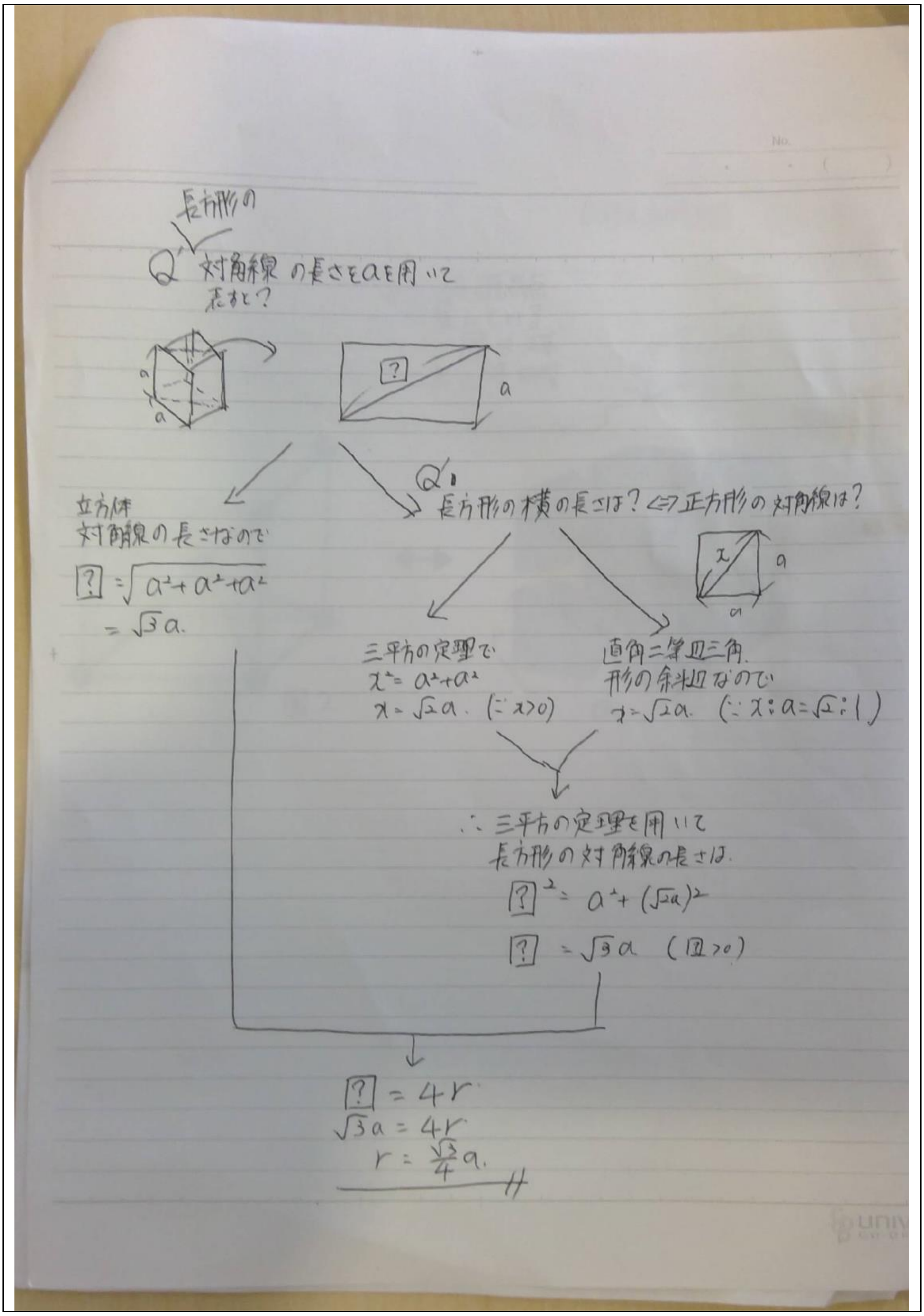
球がつながっているのが見えてくる。

↓

Q' 対角線の長さをaを用いて表すと？

↓

次のページ



6．活動支援表

［期待する活動 A への支援］

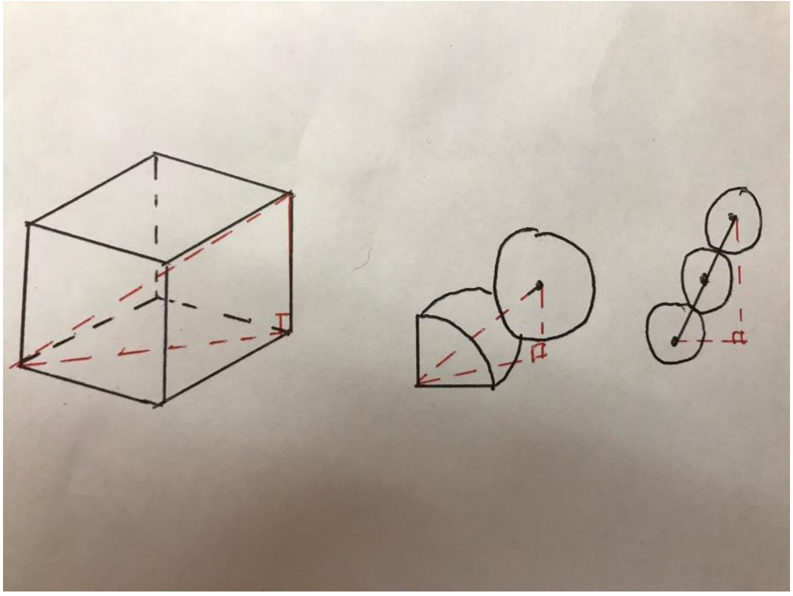
・より特殊な支援

立体図形の中にできる直角三角形をたくさん見つけて書き出してみよう。

↓

[期待する活動 A]

立体図１の一つの対角線に沿って切るとできる平面について、様々な直角三角形を見つけられている。



↓

[期待する活動 B への支援]

・より一般的な支援

三平方の定理を用いてわからない長さ辺を探し、書き出してみよう。

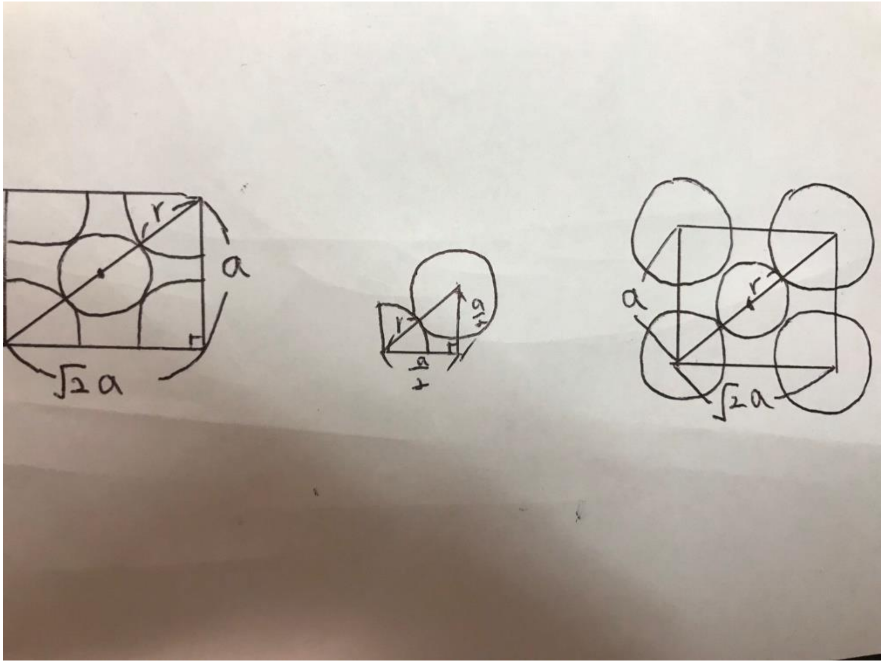
・より特殊な支援

球は対角線上で接していることに注意しよう。

↓

[期待する活動 B]

期待する活動Aで、できる直角三角形を平面に書き出し、ｒとａの関係を調べる。



↓

[さらなる活動（N）への支援]

別の問題でグラフの理解を深める。

例としては、本問題より直観的にわかりやすい面心立方格子などが挙げられる。

＜練り上げ＞

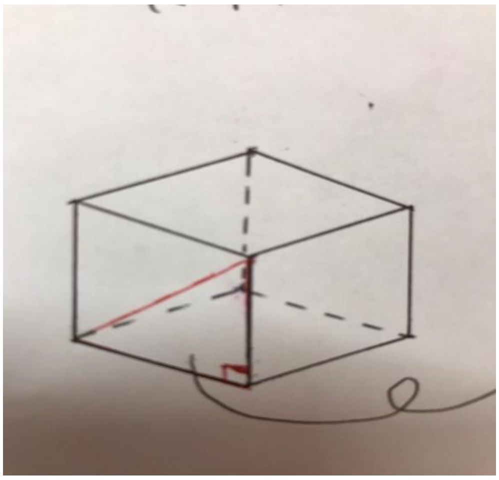
T：教師　S：生徒

1. 活動 A への展開

T：文字に惑わされないでくださいね。三平方の定理はどういうときに使えましたか？

S：　直角三角形があるときです。

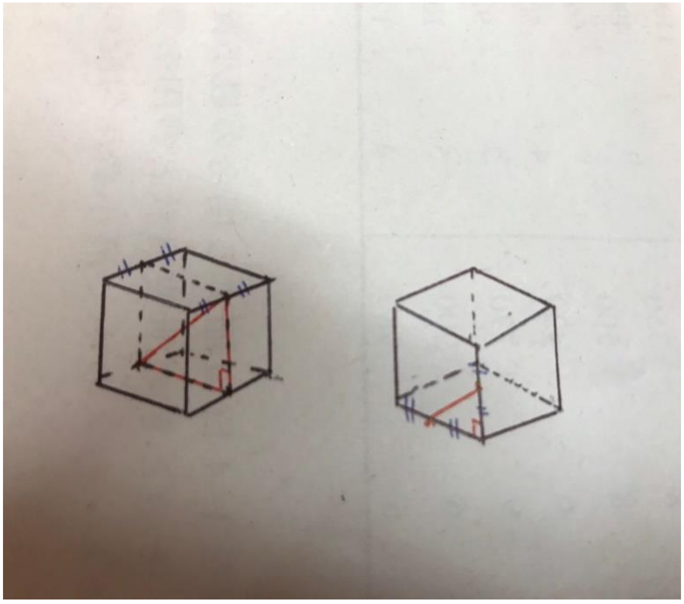
T：そうですね。では、問題の立体図形の中にできる直角三角形をたくさん見つけて、立体の中にかいてみてください。例えば立体の一つの面に着目するとこのようになりますね。



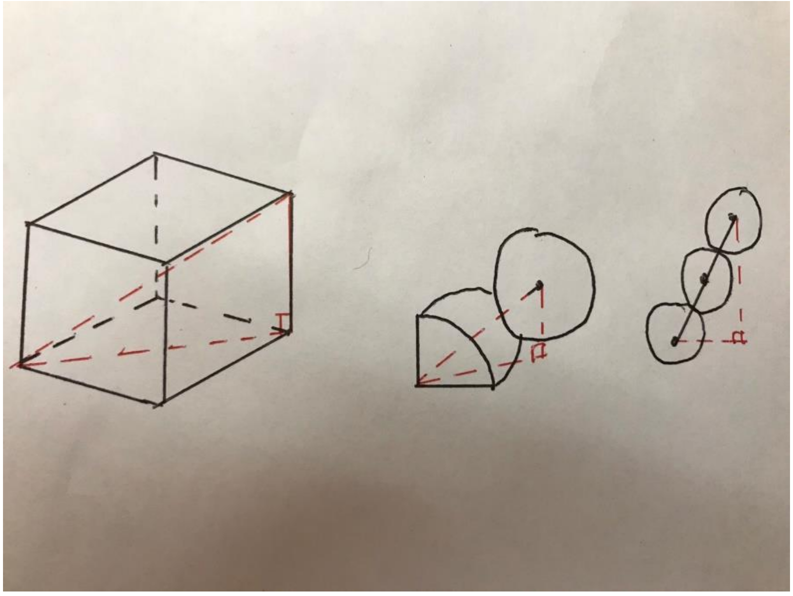
では、皆さんも探してみてください。

S：　こんなのもありました！

S 1:立体の面に平行な平面に着目しました。



S 2:立体の対角線に沿って切るとできる平面に着目しました



T：たくさんありましたね。前後左右の人と自分の見つけた直角三角形を見せ合ってください。

S1,S2：そういうのもあるな。

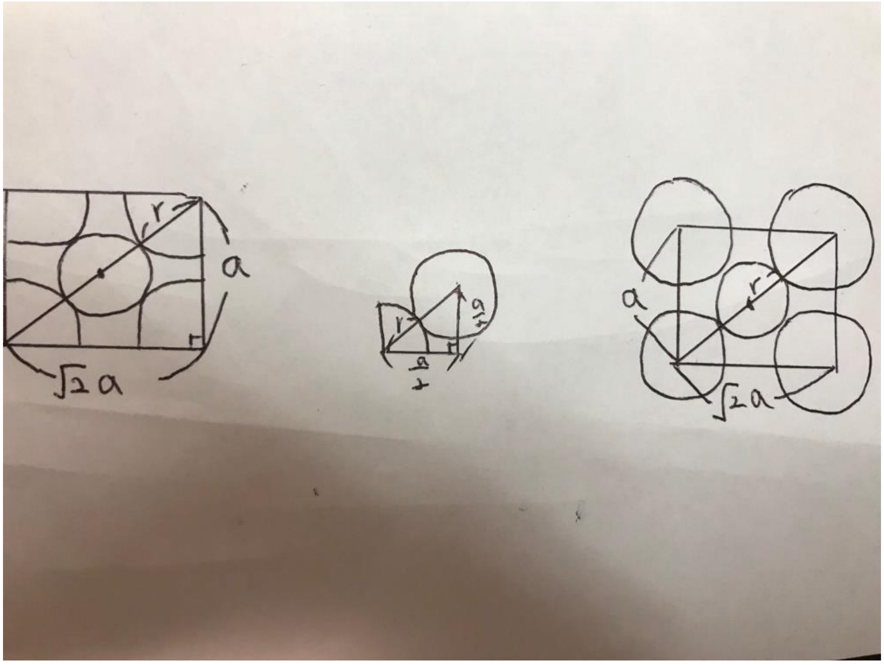
2. 活動 A から B への展開

T：では、さきほど見つけた直角三角形を平面上に図示して辺の長さを r や a 用いて表して r と a の関係を求めましょう。

S1： なかなか r と a の関係がみつからないな。
S2:うまく平面に図示出来ないな。

T：今回は r と a の関係が知りたい分けですから直角三角形の同じ辺の長さを r と a の両方で表せたら=で結べますね。
対角線上の平面を図示するときは球が対角線上で接していることに着目してみてください。

S 1： さっき他の生徒に見せてもらった対角線の方の直角三角形を考えてみよう。
S2：出来ました。

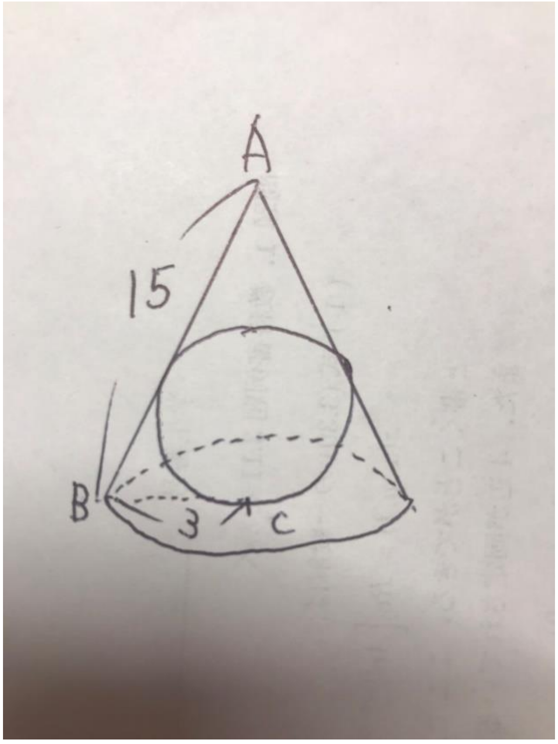


三平方の定理を用いて対角線の長さを a で表すと同じ辺を r と a の両方で表すことができます。

3. 活動 B から N への展開

T：空間図形問題でも平面に表すことで考えやすくなりましたね。そのことをふまえて次はこの問題に取り組んでいきましょう。

[問題] 円すいの中心に球が接している。このとき球の半径を求めなさい。



７．感想

伊與森勇希

約半年間、立体図形の指導案を練ってきたが、驚いたこととしてまず、これほどまでに指導案は様々な要素、事柄に細分化されているということだ。加えて、方向性としての指導内容、解かせ方、教え方を決めても指導計画書に落とし込むのには、多くの時間がかかり、もどかしさを感じた。実際に教員になった際にはこの指導計画書を書く機会は確実に多くあるので、早く慣れていきたいと思う。その点では、今回時の授業は将来のための良い練習となったので、非常に自分のためになったなと考えている。

鞆星輝

まず初めにつまずいたのが問題作成だ。いつもなにげなく解いている数学の問題だが、作る側になって初めて矛盾点や解答者が勘違いしないかなど、考えるべきことがいろいろあることを知った。

また、どうしても解答を知っているものだから、授業が生徒に気が付かせるではなく、解答の道順に乗せようという風になってしまう。生徒自身で考え導き出すことが重要なので、そういった授業展開ができるようになりたい。生徒が解答とは違うことをしていると

きに、そこからどうやって答えに持っていけるかが鍵となると感じた。

清水太智

今回の授業で数学の問題を生徒が解くプロセスについて細かく学べたと思った。QA マップなどはその最たる例でありいつも何気なくこなしていた問題を解く間にも多くの段階を踏んでいるということが分かった。そしてどの段階で生徒がつまずいているのかが即座に理解して適切なアドバイスを与えて問題解決の手助けができると思った。

今回扱った題材が立体の三次元空間上でどのような位置にあるのかが問題の前提として与えておくのか、証明するのかでも生徒が考えてしまうことがあるというのが問題を用意しておく側として不足していた考え方であると感じた。先生の指摘がなければほとんど気に留めることもなかったことなので新しい考え方ができるようになったと思った。

扱う題材を生徒の身近なものに近づけることが足りていなかったように思えた。興味を持ちやすい題材ならば集中して取り組みやすいし身近に数学が使われていることが実感できてやりがいを感じることができると思った。