

数学学習指導設計Ⅱ

和音の数学的解析

～総合的な学習において～

グループ C

後尾 勇人

倉田 広晶

服部 夏実

目次

1. 選択した単元と理由.....	2
2. 数列の問題例.....	2
3. QA マップ作成.....	5
4. 音楽に親しみのある人となない人の違い, 方針変更	10
5. QA マップ第 1 案.....	11
6. QA マップ第 2 案.....	13
7. QA マップ第 3 案.....	14
8. 最終的なQA マップ.....	17
9. 感想	20

1. 選択した単元と理由

○単元

数列（等差数列と等比数列）

○理由

数列は規則性を見つけることで、1つの式で表すことができる。これにより、多くの数列を式で表し、扱うことができる。数列の規則性を見つける謎解きのような楽しさを生徒に伝え、生徒がこれらを活用できるようにしたい。

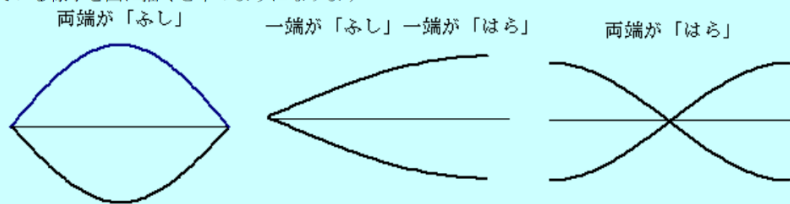
2. 数列の問題例

1. 和音を利用した例

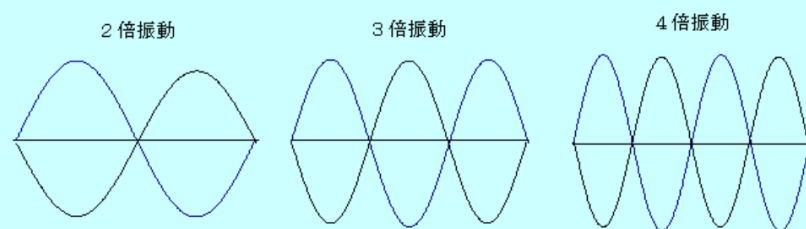
ドミソはどうして和音としてきれいに聞こえるの？

音はいろんなものが揺れて（振動して）鳴っています。そのときよく見るとよく振動する部分（はら）と振動しない部分（ふし）があることが分かります。両端を固定してある弦では両端が「ふし」になります。また 底のある筒を吹いて音が鳴るのは、筒の中で空気は底で「ふし」、口の部分が「はら」となるように振動しているからです。さらに底が空いている筒も上手に吹くと鳴りますがあれは底も口の部分も「はら」になっています。[（注：ビール瓶についての記述を削除しましたH18.3.1）](#)

揺れている様子を図に描くと下のようになります



ただこれが振動のすべてでしょうか？両端が「ふし」になる振動の様子はまだあります。



つまり1つの音を鳴らしても上記のような2倍、3倍の振動が重なって起こります。はじめの基本になる振動を基本振動といいその振動による音を基音と言います。同じように2倍振動に対応する音を2倍音、3倍振動と3倍音・・・と続きます。基音と2倍音では振動数が倍になっています。つまり基音を鳴らしても必ず2倍音、3倍音・・・が鳴っていることになります。（もちろん倍音が同時に鳴る大きさは基音よりずっと小さく、倍音が高くなるほど音の大きさは小さくなりますが・・・）

さてハ長調の一オクターブ低いドは132Hz（自然純正率）です。これを基音にして鳴る楽器は必ず倍音になっていますから

基音	倍音	3倍音	4倍音	5倍音	6倍音	7倍音	8倍音
1 3 2	2 6 4	3 9 6	5 2 8	6 6 0	7 9 2	9 2 4	1 0 5 6
低いド	ド	ソ	高いド	高いミ	高いソ	高い♭シ	更に高いド

となり、ミもソも、ドの倍音の中に含まれています。

つまり ドミソはどれも2オクターブ低いドの子供なのです！！だから和音になるのです。

ファラドはどうでしょう						
基音	倍音	3倍音	4倍音	5倍音	6倍音	
1 7 6	3 5 2	5 2 8	7 0 4	8 8 0	1 0 5 6	
低いファ	ファ	高いド	高いファ	高いラ	さらに高いド	

ソシレは					
基音	倍音	3倍音	4倍音	5倍音	6倍音
1 9 8	3 9 6	5 9 4	7 9 2	9 9 0	1 1 8 8
低いソ	ソ	高いレ	高いソ	高いシ	更に高いレ

このようにそれぞれファやソが基音となった場合ファラド、ソシレがその子供になっているのです。

注：ビール瓶のように首の部分があって中が空洞になっているものはオカリナのような管の体積で決まる音を出します。ここで述べたふしやはらになる振動とは少し異なります。（ヘルムホルツ共鳴）

2、金利を利用した例

毎年定期的に貯金して、6回の貯金で総額が5000€を超えるには、いくらずつ預金すればよい？ただし、純利子（税金を差し引いた利子）は2.85%で、毎年の初めに貯金して、その年の最後に利子が付加される。

<解答>

毎年の貯金額をxとして、n年後の預金総額を a_n とすると、

$$a_1 = x, q = 1 + 0.0285 = 1.0285, n = 6$$

$$x \cdot \frac{1 - 1.0285^6}{1 - 1.0285} > 5000$$

まず、等しくなる場合を考えると、

$$x \cdot \frac{1 - 1.0285^6}{1 - 1.0285} = 5000$$

$$x \cdot 6.444 \dots = 5000 \quad | : 6.444 \dots$$

$$x = 775.903 \dots$$

よって、776€ずつ貯金すればよい。

3, 算数の授業で使用される例

4年 変わり方調べの発展場面

事象の構造を見抜き、発展的問題を解決する

●数学的に考える力 「なぜ?」「どのように?」

伴って変わる2つの数量があるとき、それらの依存関係に着目することで問題の構造を見抜くことができる。そこで、事象から一方が決まればもう一方が決まるという関係を見出し、それらの変化や対応の規則性に着目して問題を解決することを通して、ものごとを数理的に処理し、発展的に考えていこうとする子どもを育てる。

授業実践では、伴って変わる2つの数量の規則性について、図や表から考察したことをもとに、簡潔・明瞭な表現として式に表す。さらに、式を考察することで変化や対応の規則性に着目し、発展的な問題を解決していく。

●数学的に考える力を育てる授業づくりの3つの視点

①数学的に考える力の明確化

- 日常事象について、規則性に着目して式に表し、結果を予想したりものごとを数理的に処理したりする【汎用】
- 一方が変化すると他方も変化するという関数の考えを帰納的にとらえ、式を用いて数量の関係を簡潔に表現するとともに、式の表す事柄や関係を一般化して読む【考え方】
- や△を用いた式についての理解【知識・技能】

②数学的に考える力を育む学びの文脈の用意

変化や対応の規則性に着目することで、発展的問題を解決する【発展】

商一定の場面を学習した後に、変化や対応の規則性に着目することで、発展的問題を解決する場面を用意する。その際、□や△を用いて一般化した式を読むことで、問題の構造を明確にとらえることができるようにする。

③授業コントロールの充実

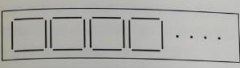
既習事項を活用し、的確な表現で変わり方を表現する指導

発展的な問題を解決する場面において、□や△を用いた式として関係を一般的に表していく。さらに、式から場面や数量の関係を読み取ることを通して、式のもつよさについて実感できるようにする。

●数学的に考える力を育てる授業プラン【第5時】

事象の考察と一般化（商一定の場面）

マッチぼうを団のようにならべます。
正方形の数が10 ときのマッチぼうの本数を求めましょう。



○表から見た規則性について、図で確認する。

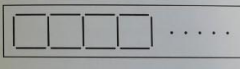
○規則性を言葉の式や、□や△を用いた式に表して一般化する。

○伴って変わる2量の依存関係に着目し、表を使って変化や対応の規則性を考える。

- ・表を横に見ると、4本ずつ増えている。
- ・表を縦に見ると、正方形の数を4倍したらマッチ棒の数になる。
- 変化や対応の規則性を一般化した式に表す。

発展的問題場面の解決

マッチぼうを団のようにならべます。
正方形の数が10 ときのマッチぼうの本数を求めましょう。



○学習したことを発展させて考えようとする態度を育てる。

○伴って変わる2量の依存関係に着目し、表を使って変化や対応の規則性を考える。

- ・表を横に見ると、3本ずつ増えている。
- ・表を縦に見ると、正方形の数を3倍した数に1を加えるとマッチ棒の数になる。
- 変化や対応の規則性を一般化した式に表す。

式の読みと式のもつよさの実感

○一般化した式を比較することで問題の構造を明らかにする。

○変化していく数量に着目できるようにする。

●数学的に考える力を育てる授業の実践【第5時】

事象の考察と一般化（商一定の場面）

一方が決まればもう一方が決まるという関係を観察し式に表す

子どもたちは第3学年までに、未知の数量を表す記号として、□を用いて式に表すことを学習している。第4学年では、それらの理解をもとに、変量を表す記号として、□や△などを用いて数量の関係を式に表すことを学習する。

本時は、まずはじめに商一定の場面を扱い、正方形の数とマッチ棒の数という2量の依存関係に着目し、表を使って変化や対応の規則性を整理した。

C6 正方形が1個のときのマッチ棒の数は4本で、2個のときは8本、3個のときは12本、4個のときは16本になるから4本ずつ増えていくことがわかりました。

T5 式を使って言えますか?

C7 1個のときは4×1、2個のときは4×2、3個のときは4×3、4個のときは4×4です。

T6 式を見て、変わるところと変わらないところを見つけましょう。

C8 正方形の数は1、2、3、4と変わっていて、マッチ棒の数も4、8、12、16と変わっています。変わらないところは4です。

C10 言葉の式にすると、**マッチ棒の数=4×正方形の数**になります。

C13 □と△を使うと、**□=4×△**になって正方形の数が10個のときは、**□=4×10=40**だから40個です。

そして、言葉の式や、□や△を用いた式に表すことによって、その関係を簡潔、明瞭、的確に、また、一般的に表すことができることを確認した。

発展的問題場面の解決

2量の依存関係に着目し、既習の図や表を用いて規則性を考え式に表す

次に、正方形と正方形の間にあるマッチ棒の数が1本となるような並べ方を提示し、発展的な問題解決に取り組んだ。子どもたちは表の考察から、正

第2章 「数学的に考える力」を育てる事例

方形の数が1つ増えるとマッチ棒の数は3本増えるという変化の規則性については気付くことができたが、式に表す段階でまず子どもが見られた。そこで、図と照らし合わせて考えてみるように助言することで、最初の1本の存在に気付き、式に表すことができた。

C16 正方形が1個のときは4本で、2個のときは7本、3個のときは10本、4個のときは13本です。

C17 表から、正方形が1個増えると、マッチ棒は3本増えることがわかりました。

C20 正方形が10個のときは、**1+3×10=31**という式から、マッチ棒の数は31本になります。

T15 **1+3×10=31**という式を使って考えてくれたんだけど、もう少し詳しく説明してくれるかな。

C21 (図を使って説明) はじめに1本あって、マッチ棒が3本ずつ増えているから、**1+3×(正方形の数)**でマッチ棒の数が求められます。

C23 △と□を使って式に表すと、**△=1+3×□**になります。

このようにすると、**△=1+3×□**という式が導き出せる。

△の数を求めよう。

△=1+3×□

△=1+3×10

△=1+30

△=31

式の読みと式のもつよさの実感

2つの場面について、一般化した式から関係を考察する

2つの問題の□と△を使った式を比較することで、一方はかけ算がそのまま使える場面、もう一方はたし算とかけ算が含まれている場面であることに気付くことができた。事柄や関係を簡潔・明瞭・的確に、また、一般的に表す式のもつよさについて実感させることが大切である。

C53 棒の長さや影の長さはほぼ比例している。

C54 棒の長さは、影の長さの約2.5倍になっている。

C55 棒の長さや影の長さの比はいつもだいたい5:2といえる。

T30 「約」とか「だいたい」といった言葉が出ていますが、なぜでしょう。

C56 影の長さを測ったときに、少し影がぼやけていたので、どこまで測るかで悩みました。それで、誤差が出たのだと思います。

C57 一瞬で、正確に測るのは難しいと思う。

T31 測る上で、避けられない誤差だったということですか。

C58 でももう一度、やり直してみてもいいと思います。



棒の長さ (m)	影の長さ (m)
50	20
60	24
100	40
150	60
200	80

振り返りと他の場面への適用

校舎の高さを求めるとともに、他の場面での活用にも目を向けさせる

子どもたちは、実際に測らなくても計算で校舎の高さが求められたことに驚いていた。

C59 影の長さは6m82cmだから…。

C60 $5:2=\square:6.82$ $\square=17.05$ (m)

C61 すこい、求められたね。

C62 影の長さしか測っていないのに、求められるんだね。

T33 確かにすこいね。でも、校舎の高さは本当にこの高さで間違いない？

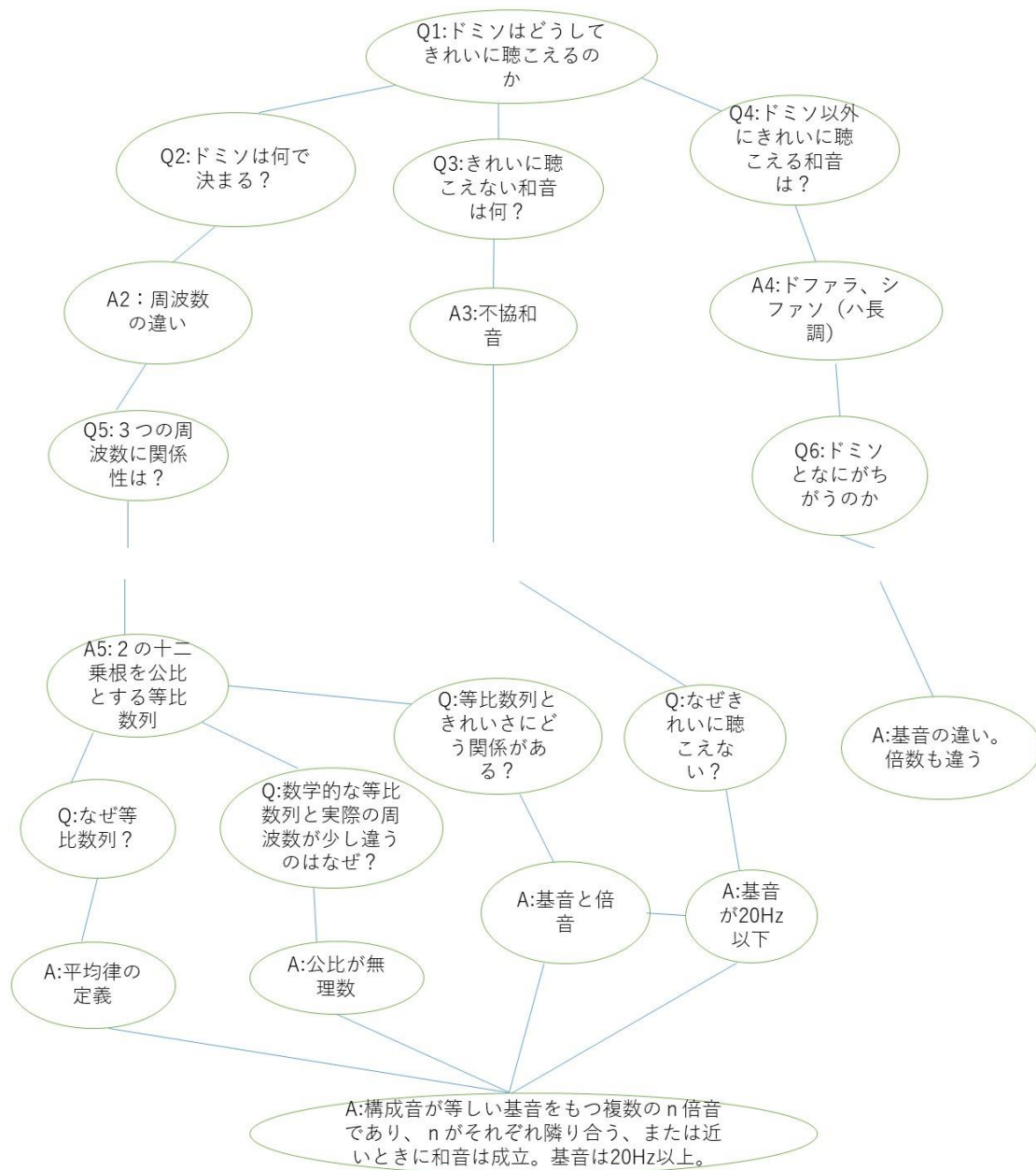
最後に、計算で求めた数値の妥当性を検証するため、屋上から巻尺をたらし、およその高さを測定してみることにした。すると、ほとんど誤差が出なかったため、子どもたちは自分たちが活動した結果に満足していた。本時で扱った校舎の高さを求めるような活動を行うことができるが、柱の長さや木の

3. QA マップ作成

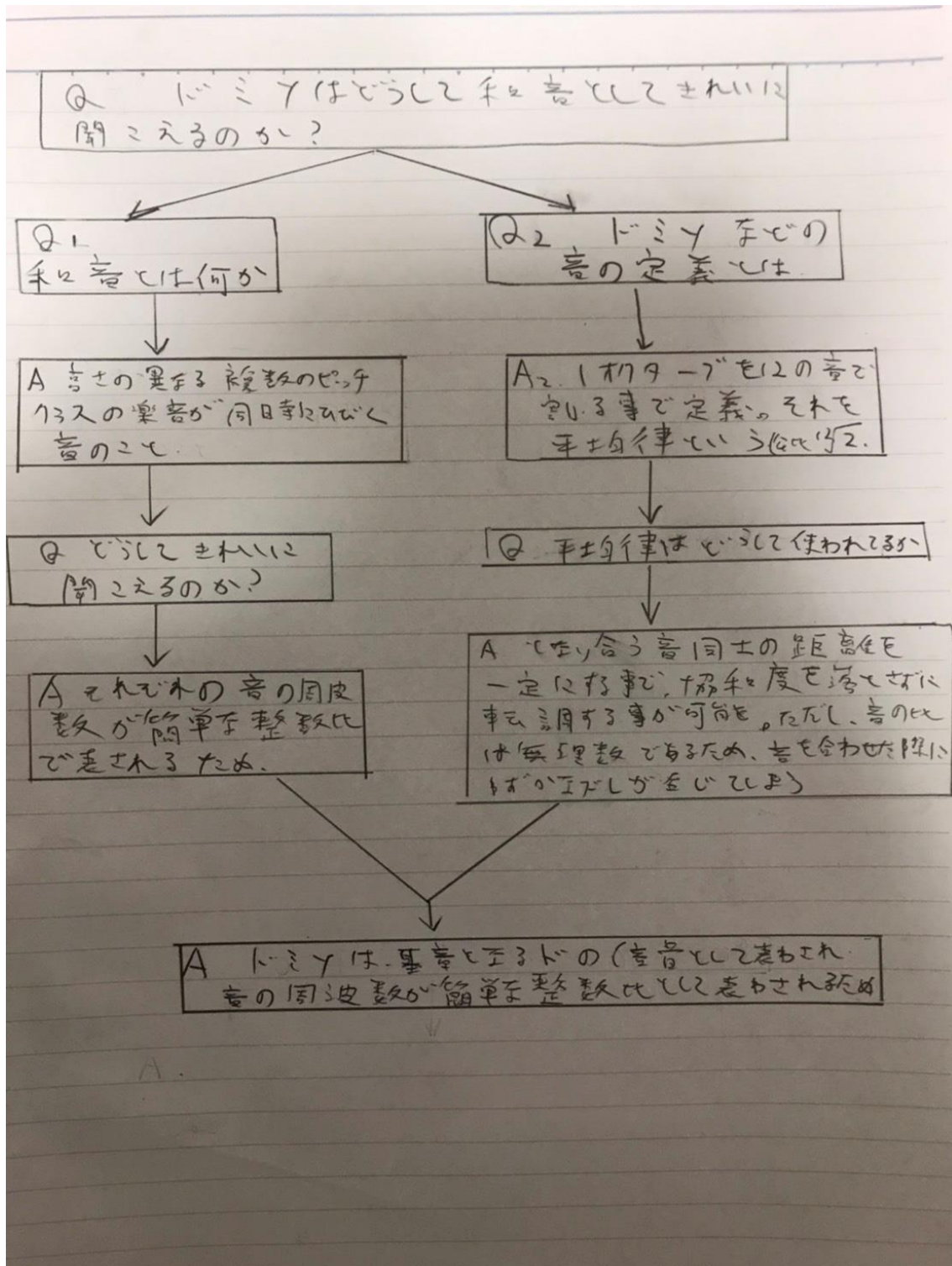
大きな問い：どうして和音はきれいに聞こえるの？

上記の問いの QA マップを作成した。3人の QA マップを比較すると、それぞれ定義から疑問を持って取り組むところは同じであったが、そこから派生する答えや疑問が少しずつ異なっている。だから、高校生で QA マップを作成しても、音楽が身近な生徒が興味、関心を持ったり、音楽が身近ではない生徒が人とは違う角度で考えたりして、数列を深く学べるのではないかと考えた。

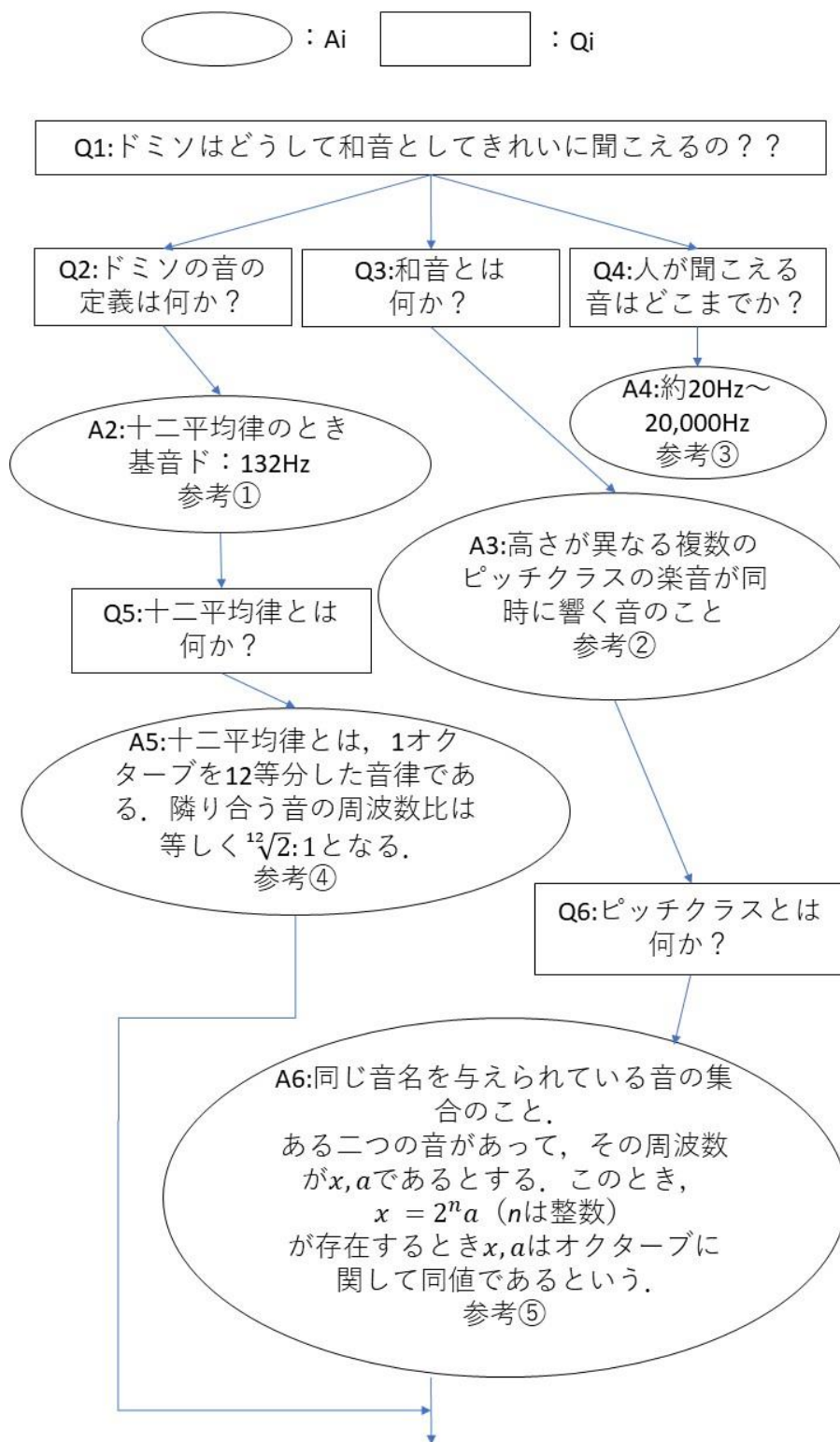
・QA マップ1



・QAマップ2



・QA マップ3



↓

Q6:和音は比で表せる？

↓

A6:ミもソもドの倍音に含まれている。つまり、ドミソはどれも2オクターブ低いドの子どもであり、和音になる。

基音	132	低いド
倍音	269	ド
3倍音	396	ソ
4倍音	528	高いド
5倍音	660	高いミ
6倍音	792	高いソ

参考①

参考文献

- ① 物理のトリビア ドミソはどうして和音としてきれいに聞こえるの？ <<http://natsci.kyokyo-u.ac.jp/~okihana/trivia/domiso.htm>>
- ② 和音<<https://ja.wikipedia.org/wiki/和音>>
- ③ 各音の周波数一覧
<https://www.petitmonte.com/javascript/musical_scale_frequency.html>
- ④ 平均律<<https://ja.wikipedia.org/wiki/平均律>>
- ⑤ ピッチクラス<<https://ja.wikipedia.org/wiki/ピッチクラス>>

4. 音楽に親しみのある人となない人の違い，方針変更

3章において，1人1つずつのQAマップを作成した．そこでの音楽に親しみのある人となない人の違いについて表1にまとめる．

表1：音楽に親しみのある人となない人の違い

音楽に親しみのある人	ない人
・使われる言葉の意味を大体知っている． ・もともと，きれいになる音を知っている．	・ハ長調とは何か？ ・なぜ調を設定する必要があるのか？ ・どうして平均律が使われているのか？

・方針変更

「和音とは何か？」の質問を考えていたが，調や，コードの話をしているうちによく使用される「カノン進行」という言葉がでてきた．「カノン進行」とは有名な曲の多くが用いている．その「カノン進行」を題材にし，最近の曲を使用して生徒に興味・関心を持たせようと考えた．

- ① 複数の課題曲（カノン進行が用いられている）から生徒が好きな曲を選ぶ．
- ② 何小節か分の楽譜を与える．鍵盤から音を出し，オシロスコープで周波数を読み取る．
（オシロスコープがない場合，周波数を事前に与える．）
- ③ 生徒たちに，その周波数がどのような関係になっているかを考えさせる．
- ④ 隣り合う音の周波数が比の関係になっていることを発見させる．
- ⑤ それぞれの曲のコード進行を比で表す．
- ⑥ その際に基音と公比を知る必要がある．
- ⑦ どうやって求めるか．
→第 n 項，第 $n+1$ 項，第 $n+2$ 項の初項と公比を求める問題になる．
- ⑧ 6 番の結果，全員の比が同じになる．これは，なぜか？
- ⑨ 実は，カノン進行という有名なコード進行を用いて作成されているからである．

<カノン進行が用いられる曲>

世界に一つだけの花，小さな恋の歌，糸 など

5. QA マップ第1案

Q: どうして和音はきれいに聞こえるの？

小さな恋の歌



音名	周波数[Hz]
ド	493.883301
シ	466.163762
ラ	440
ソ	415.304698
ファ	391.995436
ミ	369.994423
レ	349.228231
ド (真ん中)	329.627557
シ	311.126984
ラ	293.664768
ソ	277.182631
ファ	261.625565
ミ	246.941651
レ	233.081881
ド	220
シ	207.652349

メモ
表だけから公比を読み取るのは、あんまり和音の意味がない

小さな恋の歌



それぞれの和音の音を書き出す

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ド	シ	ド	ソ	ラ	ソ	ラ	シ	ド	シ
ソ	ソ	ラ	ミ	ファ	ミ	ファ	ソ	ソ	ソ
ミ	レ	ミ	シ	ド	ド	ド	レ	ミ	レ

周波数の表から和音の周波数を書き出す

1, 9の和音		2, 8, 10の和音		3の和音		4, 6の和音		5, 7の和音	
ド	329	シ	311	ド	329	ソ	277	ラ	293
ソ	277	ソ	277	ラ	293	ミ	246	ファ	261
ミ	246	レ	233	ミ	246	シ	207	ド	220

①それぞれの音の差を考える

1, 9の和音		差	2, 8, 10の和音		差	3の和音		差	4, 6の和音		差	5, 7の和音		差
ド	329	52 4度	シ	311	34 3度	ド	329	36 3度	ソ	277	31 3度	ラ	293	32 3度
ソ	277		ソ	277		ラ	293		ミ	246		ファ	261	
ミ	246	31 3度	レ	233	44 4度	ミ	246	47 4度	シ	207	39 4度	ド	220	41 4度

→同じ音の高さの差でも、周波数の差は同じではない

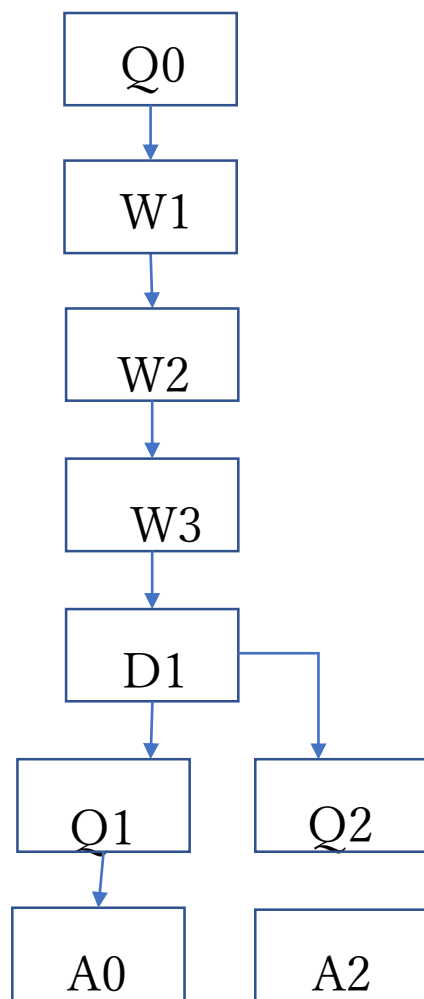
②それぞれの音の比を考える

1, 9の和音		比	2, 8, 10の和音		比	3の和音		比	4, 6の和音		比	5, 7の和音		比
ド	329		シ	311		ド	329		ソ	277		ラ	293	
ソ	277		ソ	277		ラ	293		ミ	246		ファ	261	
ミ	246		レ	233		ミ	246		シ	207		ド	220	

難しいところ

- ・少数点以下を少しでも省略してしまうと、きれいな公比が出ない
- ・公比が2の $1/12$ 乗だと気づくことが難しい

6. QA マップ第2案



Q0 どうして和音はきれいに聞こえるか

W1 実際の曲で聞いてみる

W2 楽譜を見てみよう

W3 和音の音の組み合わせを見てみよう

D1 各音の周波数を調べよう

Q1 差で考えると関係性が見えるのでは

Q2 比で考えると関係性が見えるのでは

A0 倍音の関係になっているから

A2 音符の周波数の定義が分かった

7. QA マップ第3案

Qi : 問, Ai : 答え, α : 支援

Q0 どうして和音はきれいに聞こえるの？

Q1 実際の曲の和音はどうか？

α 先生が事前に複数曲を用意したものを聞かせる.

A1 曲を聴く.

Q2 楽譜はどうなっているのかな？

α 先生が楽譜を配布する.

A2 楽譜からさまざまな和音があることがわかる.

Q3 和音の音はどうなっているの？

A3 5つくらい和音の音名を書き出す. (ドミソなど)

Q4 音の周波数はどうなっているの？

A4 各音の周波数を書き出す.

Q5 各音の周波数はどんな関係になっているの？

Q6 差で考えると関係性が見えるのでは？

Q7 比で考えると関係性が見えるのでは？

Q8 隣り合う音階どうして関係性は？

A7 隣り合う音の比が 1.0598 で表せる

Q9 一番低い音を基準として差を考えてみる

A9 以下の表ができる

1, 9 の和音		差	2, 8, 10の 和音		差	3の和 音		差	4, 6の 和音		差	5, 7の 和音		差
ド		13	シ		10	ド		83.	ソ		62	ラ		90
		1.2			1.9			25			.3			.7
ソ		96	ソ		28	ラ		1	ミ		27	ファ		72
											82			87
ミ		62.	レ		98.	ミ		11	シ		.6	ド		.6
		32			29			0.3			66			02
		7						72						

Q10 それぞれの差は何を表している？

A10 差の比はおよそ 1 : 2 となっている。d=62.327 とすると $f(\text{ミ})+d=f(\text{ソ})$ 、

$$f(\text{ミ})+2d=f(\text{ド})$$

Q12 等差数列の式で表せるか？

Q13 $f=n*d$ と仮定して、つまり初項 a_0 =公差 $d=62.327$ として考えてみる

A13 ミ : 329.628=5.28868d ソ : 391.995=6.28933d ド 523.251 : 8.39525d

A12 右辺の係数が整数に近くないことから、 $a_0=d=62.3271$ では等差数列は成立しない。

Q14 一番低い音を基準として比を考えてみる

A14 以下の表ができる。

1, 9 の和音		比	2, 8, 10の和音		比	3の 和音		比	4, 6 の和音		比	5, 7 の和音		比
ド		1.587	シ		1.682	ド		1.587	ソ		1.587	ラ		1.682
ソ		1.189	ソ		1.334	ラ		1.335	ミ		1.335	ファ		1.331
ミ			レ			ミ			シ			ド		

Q16 それぞれの比は何を表している？

Q17 簡単な分数に近似してみよう

α $5/3=1.66666\dots$ のような、おおよそ近似できそうな分数=小数の表を配布

A17 分数比がでる (ミ : ソ : ド = 5/5 : 6/5 : 8/5)

Q18 簡単な整数比に直してみる

A18 1、9の和音の場合ミ : ソ : ド = 5 : 6 : 8

Q19 比にそれぞれ $\times 5$ をしたので A14 表での比に $\times 5$ をしてみる

A19 ミ : ソ : ド = 5 : 5.945 : 7.935

Q20 初項 a_0 として、 a_0 : ミ = 1 : 5 の比を考える

A20 $f(\text{ミ}) \div 5 = 65.926$ これを初項 a_0 と考える

Q21 a_0 は何の音？ (ド？レ？)

Q22 音階は等比数列であることを利用して、鍵盤の数と比較する

W1 $(1.059\dots)^{n-1}=5$ となる $n-1$ を考えるとその n が等比数列の第 n 項であるので、求めた n だけミから鍵盤上で逆算する。

α n を求めるために対数の計算が必要なため、関数電卓を用いる

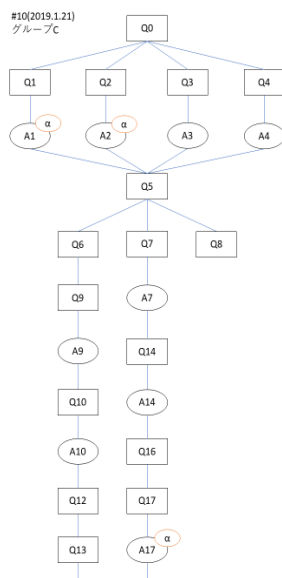
A22 $n=28.8645 \div 29$ より、ミから下に 29 番目の音をさがすとドである。

A21 a_0 はドであり、そのおよそ 5 倍、6 倍、8 倍でミソドは構成されている音階が等比数列になっていることがわかる

W2 他の比についても同様に行う。

- AW2 近似された整数比の表が完成する
- W3 他の班の結果と見比べる。
- AW3 すべての班の比が一致する
- Q23 整数倍で表せるなら等差数列でも表せるのでは？
- Q24 初項 a_0 =公比 $d=65.926$ でもう一度考えてみる
- A24 $65.926 \times 6 = 395.556$ 。f(ソ)と比較すると 3.5Hz ほどずれがあるが、1 度目の計算結果と比較すると誤差は小さくなった。
- Q25 なぜ誤差が生じるのか
- A23 公比が無理数。
- A25 初項の周波数の整数倍の音で構成された音の組合せが和音の成立条件。初項を基音といい、整数倍の音を倍音という。構成音が基音の倍音であるとき、その音はきれいに聴こえる→和音の正体
- Q26 全ての班で比が一致したのはなぜ？
- A26 カノン進行が用いられているため
- Q27 自分たちできれいに聞こえる和音（ハモリの音）を作ってみよう！
- Q28 基音を決めて、和音を決める（？）

#10(2019.1.21)
グループC



8. 最終的なQ A マップ

Qi : 問, Ai : 答え, α : 支援, 数学的知識, 物理的な知識, 音楽的な知識

- Q0 どうして和音はきれいに聞こえるの？
- Q1 実際の曲の和音はどうか？
- α 先生が事前に複数曲を用意したものを聞かせる.
- A1 曲を聴く.
- Q2 楽譜はどうなっているのかな？
- α 先生が楽譜を配布する.
- A2 楽譜からさまざまな和音があることがわかる.
- Q3 和音の音はどうなっているの？
- A3 5つくらい和音の音名を書き出す. (ドミソなど)
- Q4 音の周波数はどうなっているの？
- A4 各音の周波数を書き出す.
- Q5 各音の周波数はどんな関係になっているの？
- Q6 差で考えると関係性が見えるのでは？
- Q7 比で考えると関係性が見えるのでは？
- Q8 隣り合う音階どうして関係性は？
- A7 隣り合う音の比が 1.0598 で表せる
- Q9 一番低い音を基準として差を考えてみる
- A9 以下の表ができる

1, 9 の和音		差	2, 8, 10の 和音		差	3の和 音		差	4, 6の 和音		差	5, 7の 和音		差
ド		13	シ		10	ド		83.	ソ		62	ラ		90
		1.2			1.9			25			.3			.7
ソ		96	ソ		28	ラ		1	ミ		27	ファ		72
											82			87
ミ		62.	レ		98.	ミ		11	シ		.6	ド		.6
		32			29			0.3			66			02
		7						72						

- Q10 それぞれの差は何を表している？
- A10 差の比はおよそ 1 : 2 となっている。d=62.327 とすると $f(\text{ミ})+d=f(\text{ソ})$ 、

$$f(\text{ミ})+2d=f(\text{ド})$$

Q12 等差数列の式で表せるか？

Q13 $f=n*d$ と仮定して、つまり初項 a_0 =公差 $d=62.327$ として考えてみる

A13 ミ : 329.628=5.28868d ソ : 391.995=6.28933d ド 523.251 : 8.39525d

A12 右辺の係数が整数に近くないことから、 $a_0=d=62.3271$ では等差数列は成立しない。

Q14 一番低い音を基準として比を考えてみる

A14 以下の表ができる。

1, 9 の和音		比	2, 8, 10の和音		比	3の 和音		比	4, 6 の和音		比	5, 7 の和音		比
ド		1.587	シ		1.682	ド		1.587	ソ		1.587	ラ		1.682
ソ		1.189	ソ		1.334	ラ		1.335	ミ		1.335	ファ		1.331
ミ			レ			ミ			シ			ド		

Q16 それぞれの比は何を表している？

Q17 簡単な分数に近似してみよう

α $5/3=1.66666\dots$ のような、おおよそ近似できそうな分数=小数の表を配布

A17 分数比がでる (ミ : ソ : ド = 5/5 : 6/5 : 8/5)

Q18 簡単な整数比に直してみる

A18 1、9の和音の場合ミ : ソ : ド = 5 : 6 : 8

Q19 比にそれぞれ $\times 5$ をしたので A14 表での比に $\times 5$ をしてみる

A19 ミ : ソ : ド = 5 : 5.945 : 7.935

Q20 初項 a_0 として、 a_0 : ミ = 1 : 5 の比を考える

A20 $f(\text{ミ}) \div 5 = 65.926$ これを初項 a_0 と考える

Q21 a_0 は何の音？ (ド？レ？)

Q22 音階は等比数列であることを利用して、鍵盤の数と比較する

W1 $(1.059\dots)^{n-1}=5$ となる $n-1$ を考えるとその n が等比数列の第 n 項であるので、求めた n だけミから鍵盤上で逆算する。

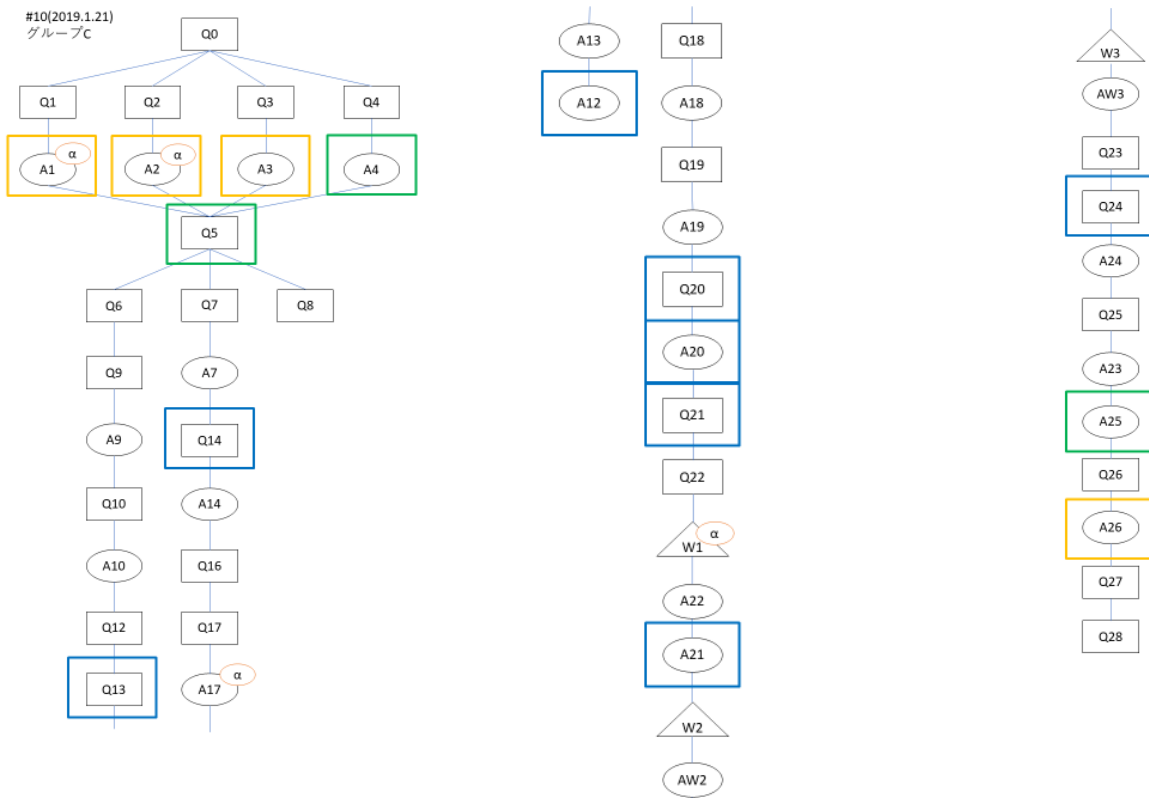
α n を求めるために対数の計算が必要なため、関数電卓を用いる

A22 $n=28.8645 \div 29$ より、ミから下に 29 番目の音をさがすとドである。

A21 a_0 はドであり、そのおよそ 5 倍、6 倍、8 倍でミソドは構成されている音階が等比数列になっていることがわかる

W2 他の比についても同様に行う。

- AW2 近似された整数比の表が完成する
- W3 他の班の結果と見比べる。
- AW3 すべての班の比が一致する
- Q23 整数倍で表せるなら等差数列でも表せるのでは？
- Q24 初項 a_0 =公比 $d=65.926$ で、小数点を省略せずに考えてみる。
- A24 $65.926 \times 6 = 395.556$ 。f(ソ)と比較すると 3.5Hz ほどずれがあるが、1 度目の計算結果と比較すると誤差は小さくなった。
- Q25 なぜ誤差が生じるのか
- A23 公比が無理数。
- A25 初項の周波数の整数倍の音で構成された音の組合せが和音の成立条件。初項を基音といい、整数倍の音を倍音という。構成音が基音の倍音であるとき、その音はきれいに聴こえる→和音の正体
- Q26 全ての班で比が一致したのはなぜ？
- A26 カノン進行が用いられているため
- Q27 自分たちできれいに聞こえる和音（ハモリの音）を作ってみよう！
- Q28 基音を決めて、和音を決める



・最終的に得られる数学的知識

和音を、数列の一般項として n の式で表し、適切に取り扱うことができる。また初項と公比が不明な状態において、数列を求めるという解き方の知識を習得することができる。そのため、事象を数学的に考察し、表現する力を伸ばすことができる。

・最終的に得られる音楽的知識

和音の仕組み

・必要となる数学的知識

対数に関する知識（学習済み）

・必要となる音楽的知識

音階などの基本的知識

9. 感想

後尾 勇人

今回取り扱った教材は数学と音楽の要素を併せ持つ総合的なものだった。そのため数学の授業に取り入れようとした前例を探すのが困難であり、教材の研究をするにあたってかなり苦労した。その反面、全く数学と関わりのなさそうな要素から数学的規則性や繋がりが見えてくる教材であるため、学習を通して知識を得たとき、物事を発見できたときの喜びや嬉しさが強く感じられた。

我々が作成した形態ではまだ授業を行うには不足している部分が多々ある。しかし実際に授業を行えるように改善し、この教材を扱うことができれば生徒の興味や、関心を引きだす教材となることが期待できる。

もし将来私が教職に就いた場合、機会があれば個人的にこの教材を取り扱ってみたいと考えている。

服部 夏実

数学学習指導設計Ⅱを通して、生徒を主体とした授業を作成するのは改めて難しいと感じた。教師側はすべての流れを理解した上で授業を行うが、生徒は流れを理解していない中で、目標を達成する必要がある。そのため、教師は生徒目線で授業を考慮する。しかし、何度も授業について考えていると、生徒目線で理解していることと理解できていないことを考えて授業を作成することが難しかった。これからも、生徒目線で授業を作成するよう努力したい。

また、QA マップを用いて授業を作成することははじめてだったため、おもしろかった。自

分たちで大きな問である「和音がどうしてきれいに聞こえるのか？」に調査していくことは、主体的に取り組む活動であるから、自分の興味関心にそって学習できることができる。これから、授業を作成する上で活かしていきたいと思った。

倉田 広晶

私は、数学学習指導設計Ⅱを通じて生徒たちにどのように目標を達成させていくかを考えるのは非常に難しいと思いました。今回、私たちは音楽の問題を数学的に思考し解を求めていく探究的な授業の設計に挑戦しました。結果的に数学の授業ではなくどちらかと言えば総合的な学習の時間に行うような内容になったが、生徒が思いつかないような音楽と数学の関係を授業を通じて体感できる生徒にとっても私たちにとってもとても興味深い授業を設計することが出来てとても楽しかったです。私は音楽に関する知識はほぼない状態からであったのでグループのメンバーに教えてもらいながら課題を解決でき、逆に、分からないからこそ生徒はどこにつまずきやすいのだろうなど想像しやすくその部分を指導案に反映することが出来て良かったと思い、また、生徒の視線についても学ぶことが出来て良かったです。この経験をもとにこれからの指導案設計に生かしていきたいです。