

2017 年度

数学学習指導設計 II

单元：微分・積分学

D 班

中山皇

西田貴幸

宮下礼人

目次

1. 単元設定と設定理由・・・・・・・・・・・・・・・・ p.3
2. 教科書比較・・・・・・・・・・・・・・・・ p.4
3. 本時のねらい・・・・・・・・・・・・・・・・ p.6
4. 指導案・・・・・・・・・・・・・・・・ p.7
5. 個人の感想・・・・・・・・・・・・・・・・ p.11

1. 単元設定と設定理由

微分・積分は、今後数学を学んでいくうえで非常に重要な単元である。特に、理系に進むとしたら数Ⅲまで学習する人が多いと思うが、その中でも非常に重要な分野の一つでもある。

微分・積分を使う場面は多岐にわたる（例えば機械的なものとか、築造的なものとか）。そこで、「数学的に重要な単元だから」という理由で教えるのではなく、実際の利用例、何に使われているのか挙げながら教える方が、実際の生活に結び付きイメージもしやすいと思う。そのような指導案を考えてみたいと思ったので、微分・積分を選んだ。

また、数Ⅱまでで学習する積分（関数は三次関数まで）には、 $|a|/6$ 公式、 $|a|/3$ 公式、 $|a|/12$ 公式というものがある。これを使うと、二次関数などの積分をする際計算時間を大幅に削減できる。センター試験の際、数学は時間との勝負のようなどころもあるので、これらの公式は必須と言えた。

しかし、仮に数Ⅲを学ぶとすると、数Ⅲで学習する関数の積分公式には $|a|/6$ 公式のような便利な公式は存在しない。三角関数、指数・対数関数...どれも計算量が多く、なおかつ本質を理解したうえでの計算の工夫が必要である。「数Ⅱまではあんなに早く計算できたのに、数Ⅲの積分は計算量が多い」「部分積分とか置換積分とか、なぜそうなるかわからない」となることも多いと思う。公式に当てはめて、早さばかりの積分ばかりをやってしまうと、苦手意識が芽生えてしまうこともあるかもしれない。そのような観点からも、微積の教え方を考えてみたいと思った。

2. 教科書比較

今回の教科書比較をするにあたって啓林館の教科書を用い、ある程度の間隔をあけ教科書がどのように変わっているのかを比較した。

<導入の流れ>

平成 10 年度、25 年度、30 年度も全て「平均変化率」から始まっているが…、

平成 10 年度：一次関数や二次関数のグラフを取り上げて、平均変化率の説明に入る。

最後に発展として、斜面を転がる球や鉛直投げ上げ運動の例を示している。

平成 25 年度（30 年度）：斜面を転がる球の例を挙げ、そこには二次関数の関係があることを言い、平均変化率の説明に入る。

→些細な変化のように感じるが、微分・積分を学ぶ上で最初から身近な例を示すことで生徒が微分・積分を身近に感じるメリットがあるのではないか？

ただし、数学的な考えに基づくのならば前者の方が好ましく、後者は物理的な考えに基づいていると考える。

<定数関数の微分の取り扱い>

平成 10 年度：定数関数を微分すると 0 ということについて、特に際立った説明無し。

定数 k $(k)' = 0$

平成 25 年度：定数関数を微分すると 0 ということ、微分の定義に従って説明。定数 c

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (c)' = 0 \quad (y \text{ の増分}) = c - c = 0$$

< x^n の微分の取り扱い>

平成 10 年度： $n=1, 2, 3$ のとき、 $(x^n)' = nx^{n-1}$ とある

平成 25 年度（30 年度）： n が自然数のとき、 $(x^n)' = nx^{n-1}$ となっている

→平成 10 年度の教科書では実際に微分の定義に従って解いた $n=1, 2, 3$ の場合のみを示している。平成 25 年度、30 年度も $n=1, 2, 3$ しか実際に行っていないが自然数に拡張しても問題ない書き方になっている。しかし、これは数学的には問題があると思う。さらに平成 30 年度の教科書は指数と係数のところに色付けが施してあり、視覚的にわかりやすい工夫がなされている。

<最大・最小>

平成 10 年度：

1 辺が 12 c m の正方形の厚紙がある。(右の) 図の点線にそって折りまげ、4 すみから正方形を切りとって、ふたのない箱をつくる。箱の容積を最大にするには、どのようにきりとればよいか。

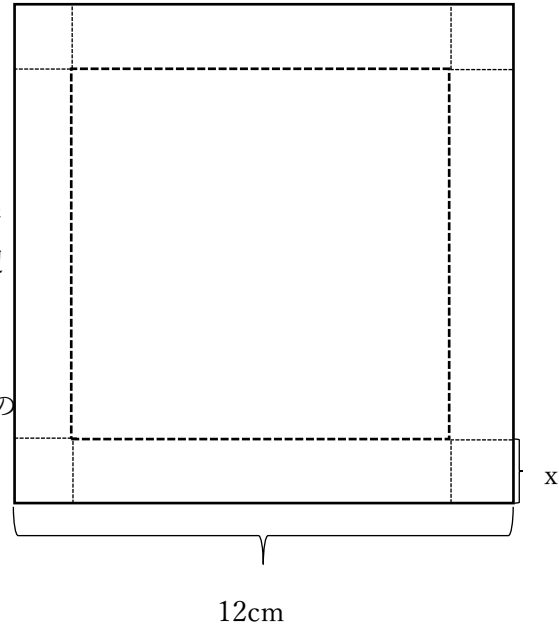
平成 25 年度、平成 30 年度：

1 辺が 1 c m の正方形の厚紙がある。1 すみから合同な正方形を切り取って (右の) 図の点線にそって折り曲げ、ふたのない箱を作る。箱の容積の最大値を求めよ。また、切り取る正方形の一辺の長さを何 c m にすればよいか。→すみの正方形の 1 辺を x としたうえで、それぞれ解答を進めている。

→①問いかけ方が、平成 25 年度 (30 年度) の方が具体的な数値を求めるように言っているのに対し、平成 10 年度の方は箱の最大容積自体はきいていない。→最大値の「値」はきいていない。

②平成 10 年度で問われている x は、「未知数」、平成 25 年度 (30 年度) で問われている x は、「変数」だと考える。

平成 10 年度の問題は、「箱の容積を最大にするには、どのようにきりとればよいか」という表現から、その「数値」 x が決まる問い方をしている。対して平成 25 年度 (30 年度) の方は、似たような問題ながら、『「箱を作ること」によりその体積を、 x を使った式で表す。この x は変数で、定義域内 (ここでは $0 < x < 6$) を動く。ではその箱の最大容積を、体積を x の関数としたら値としてどれほどになるのか。』という問いかけ方に変わっている。



3. 本時のねらい

本時のねらいを

「最初に二次関数の接線に関する問題を提示して、直線を描くためには傾きが必要になることを再認識させ、2点を近づけ続けるとある1つの値に終着するという概念に気付かせる。」

ということに設定し以下の問題を考えた。

問題

「二次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフ上の点(4,3)における接線の方程式を求めよ。」

上記の問題を設定した理由としては、極限の概念を生徒自身に気づかせたいからである。与えられた1点のみで接線の方程式を求めるには極限の概念が必要になる。

最初に既習事項である直線（接線）の方程式を問題にだすことで傾きが必要になることに気づかせる。ただし、傾きを求めるためには2点が必要であり、2点と傾きには何かしらの関係がある。すなわち、極限の概念までを生徒自身に気づかせたい。

4. 指導案

本時のねらい

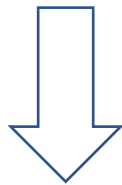
最初に、二次関数の接線に関する問題を提示して、直線にかくためには傾きが必要になることを再認識させ、2点を近づけ続けるとある1つの値に到着するという概念に気付かせる。

先生：皆さんは、図形の単元で学習した「接線」を覚えていますか？もちろん覚えていますよね（笑）そこで今日は、今まで学習した関数の「接線」について考えてみようと思います。

問題

二次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフ上の点(4,3)における接線の方程式を求めよ。

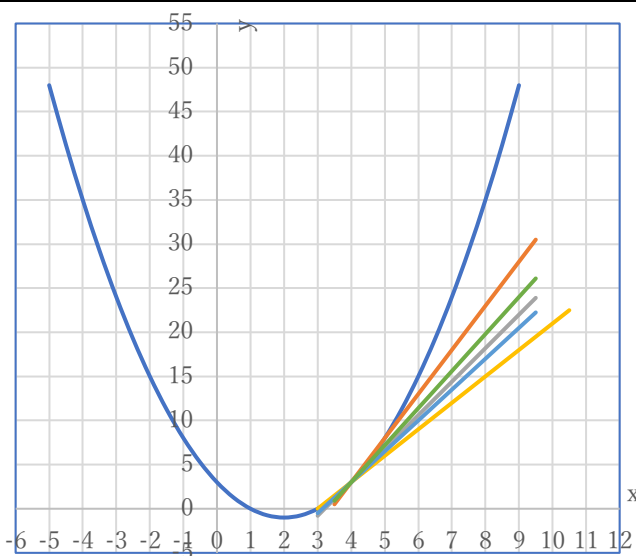
先生：ではまず、配った方眼紙を見てください。そこには、問題の関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフが描いてあります。友達同士相談しても構いませんので、点(4,3)から接線を描いてみましょう。



活動 A への支援

▶より特殊な支援

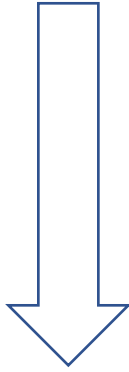
二次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフが描かれている方眼紙を配布する。



期待する活動 A

二次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ 上の点(4,3)から接線(正確でないもの)を描く。

図1 生徒たちが描くと予想する接線(正確ではないもの)
→点の一つでは直線が無数に描けてしまう…



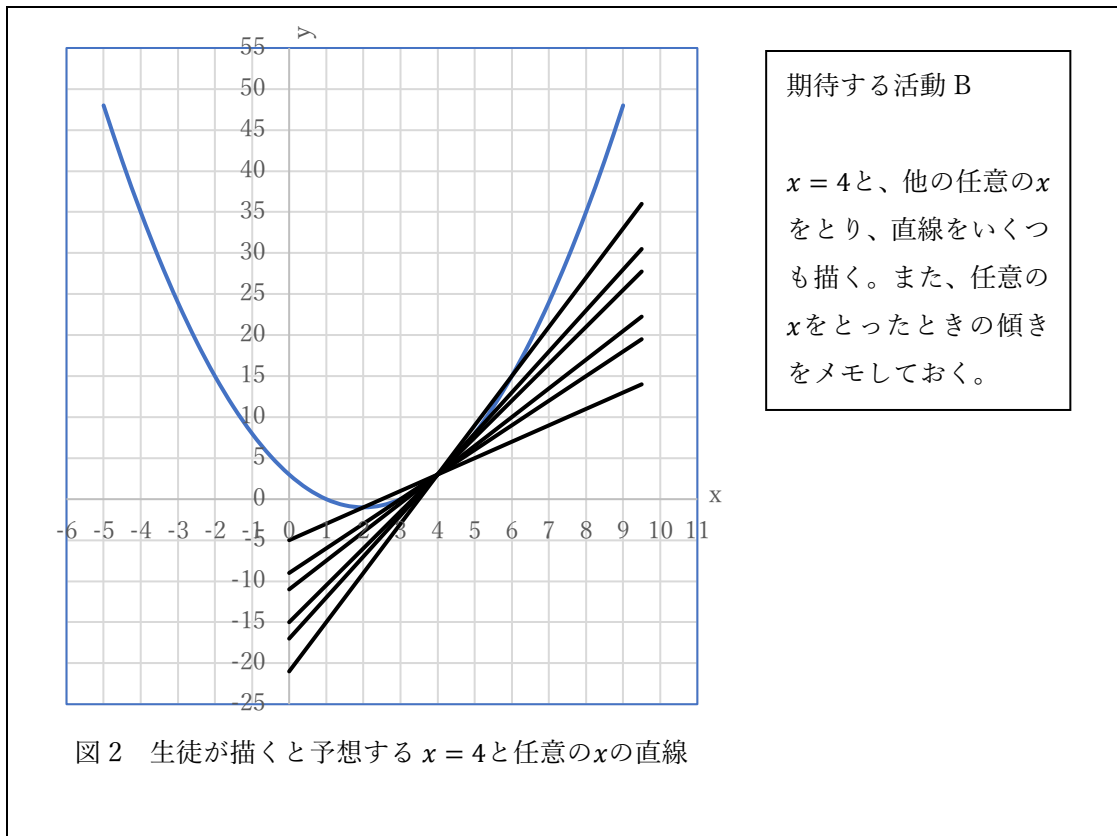
活動 B への支援

▶より一般的な支援

傾きがわかれば直線の方程式が求まるね。

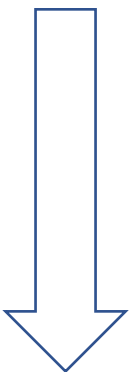
▶より特殊な支援

直線の方程式を求めるには傾きが必要で、2点があれば求められるはず。



期待する活動 B

$x = 4$ と、他の任意の x をとり、直線をいくつも描く。また、任意の x をとったときの傾きをメモしておく。



活動 C への支援

▶より一般的な支援

2点のとり方と傾きに規則性はないかな。

▶より特殊な支援

メモしたある x のときの傾きを表にしよう。

期待する活動 C

接線を求めるための 2 点の傾きを求め、2 点のとり方と傾きの規則性があるか考える。

表 1 $x = 4$ と任意の x の直線の傾き

任意の x	2	3	3.5	3.7	3.9	3.95	3.99	4.01	4.05	4.1	4.3	4.5	5	6
傾き	2	3	3.5	3.7	3.9	3.95	3.99	4.01	4.05	4.1	4.3	4.5	5	6



さらなる活動 (N) への支援

▶より一般的な支援

この 2 点を近づけ続けたら、ある 1 つの値に近づく。

他の関数で、ある点における接線の傾きはどのようになるか考えてみよう

期待する活動 N

任意の x を $x = 4$ に近づけ続けたら、ある 1 つの値に近づいているという事実気づく。

→極限の概念に考えつく。

そして、その値が $x = 4$ における接線の傾きではないかと推察する。

他の関数では、接線の傾きはどのようになるかを同じ手順で考えてみる。

活動 A から B への練り上げ

先生：今まで直線の方程式を求めるときは何がわかれば求まったかな？

生徒：直線の傾きだと思います。

先生：そうだね。ここでみんなが困っているのは1点しか与えられていないから傾きが求められないんだよね。では、もう1つの点を自分で設定してあげて直線の傾きを求めたらどうだろうか。

生徒：(自分たちでやってみる)

活動 B から C への練り上げ

生徒：先生！確かに直線の傾きはわかったけど、直線が二次関数のグラフと2点で交わってしまいました。

先生：そうですか。それでは接線とは言えませんね…。では、もう1つの点を他の x で試してみましょう。どこかに本物の接線があるはずです。

生徒：(様々な x をとって直線を描いてみる)

x のとり値によって直線が全然違う！ということは、傾きが違うということだ！

先生：そうですね。では、 x の値とそのときの傾きに何か特徴や規則性はあるのかな？

活動 C から N への練り上げ

生徒：表を描いて考えてみたら、 x の値が4より大きくなればなるほど傾きは大きくなっていくし、4より小さくなればなるほど傾きは小さくなっています。

先生：いいところに気付いてくれました。では、次は x の値を4に近づけるとどうなっているかということも考えてみましょう。

生徒：(自分たちで考える…)

4より大きい数から x の値を4に近づけると4より少し大きな数になっていて、4より小さい数から x の値を4に近づけると4より少し小さな数になっています。そのことから、 $x = 4$ における傾きは4であることが推察されます！

先生：その通りです。素晴らしい！

5. 個人の感想

中山皇

この授業を通して、自分自身が微分・積分を振り返るいい機会になりました。また、問題を自分たちで考えたことで、どのような問題を生徒に提示したらよいのかという難しさを感じました。一つの問題を提示するのに班員みんなで考え続けましたが、実際の教育現場では一人の教員がこのように問題を考えていると思うと自分の力不足も感じました。

将来、一教員を目指す者としてもっと自分の知識や多様な考え方を養う必要があると思いました。

西田貴幸

今回、この講義を受講し、指導案を作成することで、自分の思う「理解しやすい」授業の土台を媒体として作ることに励むことができた。しかし、実際に作成していくうえで考慮しなければならない事柄が多く、また、指摘される部分も多々あり、自分の力不足な点、改良すべき点をより明確に推し量ることができた。

「微分積分」の問題作成を班で行い、自分では考えていなかった様々な視点・方向性から公式や定義、解法を考えることができた。特に「GeoGebra」を用いて視覚的に生徒たちの認知、理解度を挙げる考え方は他科目でも身につけたが大学に入るまでは考えてもいなかった方法だったので、これは教員となり教鞭をとるうえで使っていきたいことだと感じた。

宮下礼人

この授業で、自分が今まで受けてきた中高の数学の授業は、先生方が試行錯誤し、生徒の理解を深めるために様々な工夫が凝らされていることが、自分たちの指導案等で分かった。

指導案を作っていく中で、教科書通りに進めるのではなく、“自分”で考え、工夫し、授業展開なども練り上げ・支援を意識して組み立てた授業設計を作ることが重要だと強く思った。例や今までの既習内容（中高を織り交ぜた）を挙げながら、生徒に理解してもらうことに重きを置いた設計を作ることが重要だと感じた。