数学学習指導設計Ⅱ

中等部第一学年

文字式

A 班

岸本　健

西尾　銀河

目次

１.単元設定と設定理由

［単元設定］

文字式　（第一学年）

［設定理由］

小学校では数だけを計算して答えを求めるだけだったが、中学校では求めたい値を文字として置くことで、答えを求めることになる。今まで文字という概念がなかったので、生徒にとっては理解することが難しいと思う。特に、変数という文字が一番生徒に、とっては理解しにくいところだと思うので、いかにわかりやすく教えるかを工夫して指導していきたいと思ったから。

2.教材研究

［数学学習指導要領］

小学校と中学校の比較

小学校…

・数量を表す言葉や、□△、a ,x などの文字を用いて式に表し、文字に数を当てはめて関係を調べたりすること

・数量の関係を表す式についての理解を深め、文字を用いて式を表すことができるようにすること

中学校…

・文字を用いることの必要性と意味を理解すること

文字を用いた式は、数量の関係や法則などを簡潔、明瞭にしかも一般的に 表現するために必要である。さらに、文字を用いることにより、数量の関係を具体的なものの意味に束縛されることなく、抽象的な数の関係に還元して考察することもできる。また、文字を用いた式には、自分の思考の過程を表現し、他者に的確に伝達できるという良さもある

・文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること
文字を用いて数量の関係や法則などを式に表現するとき、乗法の記号×は、文字と文字の間や、数と文字の間では普通省略し、除法の記号÷は特に必要な場合を除いてはそれを用いないで分数の形に表すことを学習する。これによっていろいろな式の表現が一層簡潔になり、式の取り扱いを一層能率的に行うことが出来る

・簡単な一次式の加法と減法の計算をすること
文字を用いた式の計算については、一次式の加法と減法を取り上げる。その計算方法については、主として一元一次方程式を解くのに必要な程度の簡単な式の計算が出来ることをねらいとする。文字を用いた式の計算の方法の理解にあたっては、数の計算と同様に項の考え方が使われたり、計算の法則が保たれたりするなど、数の世界と関連付けて考えることが出来るようにすることが重要である。

・数量の関係や法則などを文字を用いた式に表すことができることを理解し、式を用いて表したり読み取ったりすること
文字を用いた式は優れた表現方法であり、式を用いて数量の関係や法則などを表したり、その意味を読み取ったりして、その良さを感じ取り、式を積極的に活用できるようになることは重要である。式を用いて表したり読み取ったりするためには、文字が表す数量とその関係を理解しなければならない。また、文字を用いて表すためには、文字で表された数量について演算決定しなければならないが、文字だけ考えるよりも、具体的な数に置き換えて考えることでその関係の把握が容易になる。数量の関係を表す式では、相当関係または大小関係を等式または不等式に表すことを取り扱う。文字はいろいろな値をとることが出来るが、その理解を深めるために、文字を用いた式に数を代入して式の値を求める学習が役に立つ。このことは、方程式の解の意味を理解するためにも重要である。式の値を求める際には、負の数を代入する場合においても正しく処理できるようにする。また、具体的な場面と結びつけるなどして、式の値を求めることを単なる計算練習としないことが重要である

文字が使われるときの場面

小学校…数量の関係を表すもの

例：あめ一個の値段Ｘ円、5 個の代金をＹ円として、ＸとＹの関係を式に表せ

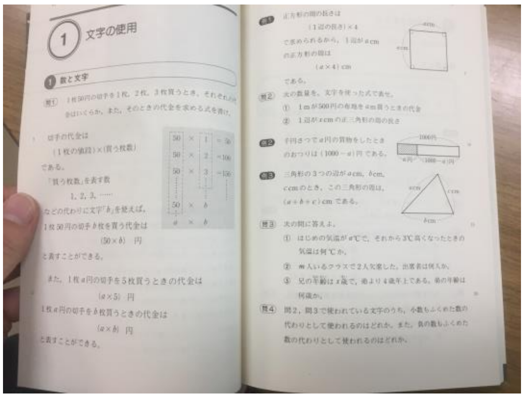
$5 \times X = Y$

中学校…計算の対象である

例：8X-20-15+6X=14X-35、5(8X+6)=40X+30、12mn+3m=3(4n+1)

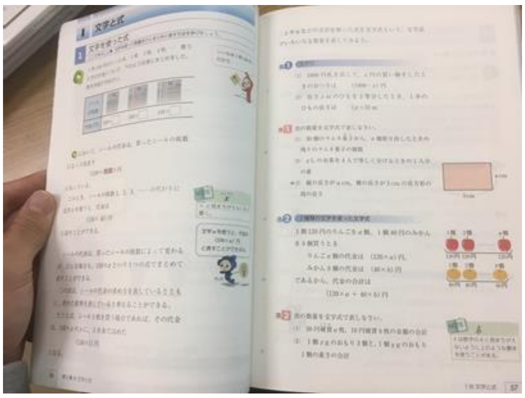
[教科書分析]

教科書分析(東京書籍,啓林館　昭和 59 年度　平成 28 年度)



59 年度(東京書籍)

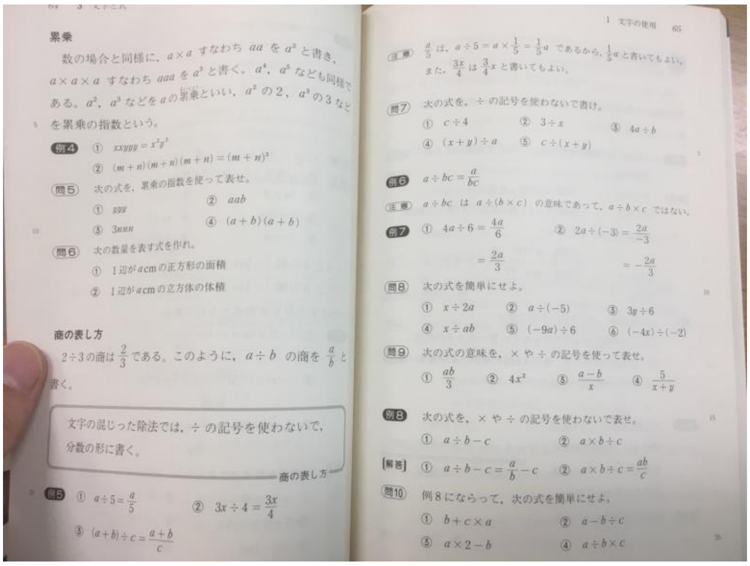
・59 年度…新しい単語を文章で説明したり、例題を示した後問題を解く。



28 年度(東京書籍)

・28 年度…新しい単語を文章で説明したり、例題を示した後問題を解くが、文章の横や問題の横にメモや補足資料があり、その単語がどのようなものを表しているか、また問題を解く上でのヒントなども加えられている。

例題や問題を見て


1 文字の使用 65

累乗

数の場合と同様に，$a\times a$ すなわち aa を a^2 と書き，$a\times a\times a$ すなわち aaa を a^3 と書く。a^4，a^5 なども同様である。a^2，a^3 などを a の累乗といい，a^2 の 2，a^3 の 3 などを累乗の指数という。

例4 ① $xxyyy=x^2y^3$
② $(m+n)(m+n)(m+n)=(m+n)^3$

問5 次の式を，累乗の指数を使って表せ。
① yyy　② aab
③ $3nnn$　④ $(a+b)(a+b)$

問6 次の数量を表す式を作れ。
① 1辺が $a$cm の正方形の面積
② 1辺が $a$cm の立方体の体積

商の表し方

$2\div3$ の商は $\frac{2}{3}$ である。このように，$a\div b$ の商を $\frac{a}{b}$ と書く。

文字の混じった除法では，÷ の記号を使わないで，分数の形に書く。

商の表し方

例5 ① $a\div5=\frac{a}{5}$　② $3x\div4=\frac{3x}{4}$
③ $(a+b)\div c=\frac{a+b}{c}$

注意 $\frac{a}{5}$ は，$a\div5=a\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}a$ であるから，$\frac{1}{5}a$ と書いてもよい。また，$\frac{3x}{4}$ は $\frac{3}{4}x$ と書いてもよい。

問7 次の式を，÷ の記号を使わないで書け。
① $c\div4$　② $3\div x$　③ $4a\div b$
④ $(x+y)\div a$　⑤ $c\div(x+y)$

例6 $a\div bc=\frac{a}{bc}$

注意 $a\div bc$ は $a\div(b\times c)$ の意味であって，$a\div b\times c$ ではない。

例7 ① $4a\div6=\frac{4a}{6}=\frac{2a}{3}$　② $2a\div(-3)=\frac{2a}{-3}=-\frac{2a}{3}$

問8 次の式を簡単にせよ。
① $x\div2a$　② $a\div(-5)$　③ $3y\div6$
④ $x\div ab$　⑤ $(-9a)\div6$　⑥ $(-4x)\div(-2)$

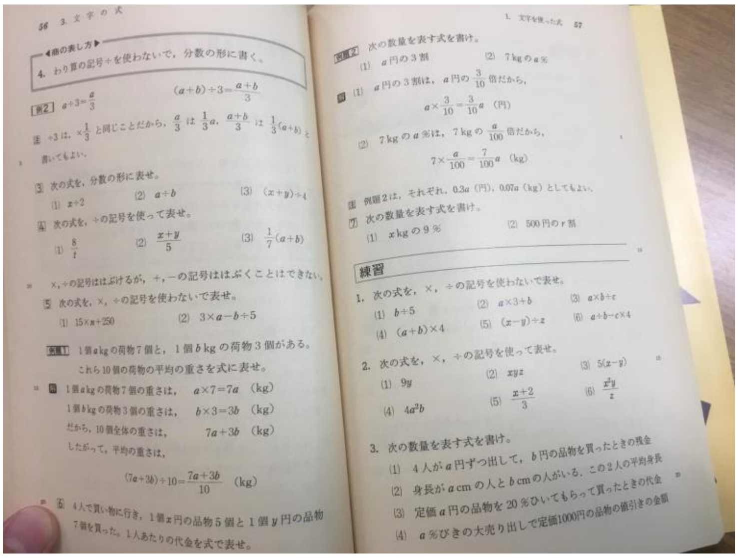
問9 次の式の意味を，× や ÷ の記号を使って表せ。
① $\frac{ab}{3}$　② $4x^2$　③ $\frac{a-b}{x}$　④ $\frac{5}{x+y}$

例8 次の式を，× や ÷ の記号を使わないで表せ。
① $a\div b-c$　② $a\times b\div c$

[解答] ① $a\div b-c=\frac{a}{b}-c$　② $a\times b\div c=\frac{ab}{c}$

問10 例8にならって，次の式を簡単にせよ。
① $b+c\times a$　② $a-b\div c$
③ $a\times2-b$　④ $a\div b\times c$

59 年度(東京書籍)


56 3. 文字の式

◀商の表し方▶
4. わり算の記号÷を使わないで，分数の形に書く。

例2 $a\div3=\frac{a}{3}$　$(a+b)\div3=\frac{a+b}{3}$

注 $\div3$ は，$\times\frac{1}{3}$ と同じことだから，$\frac{a}{3}$ は $\frac{1}{3}a$，$\frac{a+b}{3}$ は $\frac{1}{3}(a+b)$ と書いてもよい。

3 次の式を，分数の形に表せ。
(1) $x\div2$　(2) $a\div b$　(3) $(x+y)\div4$

4 次の式を，÷の記号を使って表せ。
(1) $\frac{8}{t}$　(2) $\frac{x+y}{5}$　(3) $\frac{1}{7}(a+b)$

×，÷の記号ははぶけるが，＋，－の記号ははぶくことはできない。

5 次の式を，×，÷の記号を使わないで表せ。
(1) $15\times n+250$　(2) $3\times a-b\div5$

例題1 1個 $a$kg の荷物7個と，1個 $b$kg の荷物3個がある。これら10個の荷物の平均の重さを式に表せ。

解 1個 $a$kg の荷物7個の重さは，$a\times7=7a$ (kg)
1個 $b$kg の荷物3個の重さは，$b\times3=3b$ (kg)
だから，10個全体の重さは，$7a+3b$ (kg)
したがって，平均の重さは，
$(7a+3b)\div10=\frac{7a+3b}{10}$ (kg)

6 4人で買い物に行き，1個 x 円の品物5個と1個 y 円の品物7個を買った。1人あたりの代金を式で表せ。

1. 文字を使った式 57

例題2 次の数量を表す式を書け。
(1) a 円の3割　(2) 7kg の a％

解 (1) a 円の3割は，a 円の $\frac{3}{10}$ 倍だから，
$a\times\frac{3}{10}=\frac{3}{10}a$ (円)
(2) 7kg の a％は，7kg の $\frac{a}{100}$ 倍だから，
$7\times\frac{a}{100}=\frac{7}{100}a$ (kg)

注 例題2は，それぞれ，$0.3a$ (円)，$0.07a$ (kg) としてもよい。

7 次の数量を表す式を書け。
(1) $x$kg の9％　(2) 500円の r 割

練習

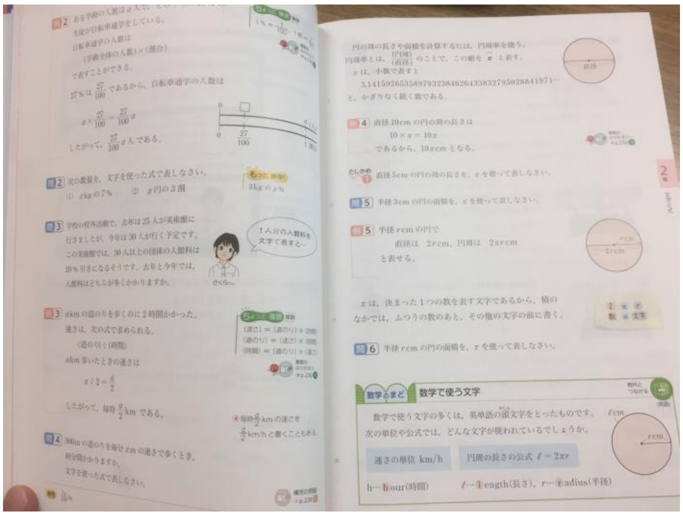
1. 次の式を，×，÷の記号を使わないで表せ。
(1) $b\div5$　(2) $a\times3+b$　(3) $a\times b\div c$
(4) $(a+b)\times4$　(5) $(x-y)\div z$　(6) $a\div b-c\times4$

2. 次の式を，×，÷の記号を使って表せ。
(1) $9y$　(2) xyz　(3) $5(x-y)$
(4) $4a^2b$　(5) $\frac{x+2}{3}$　(6) $\frac{x^2y}{z}$

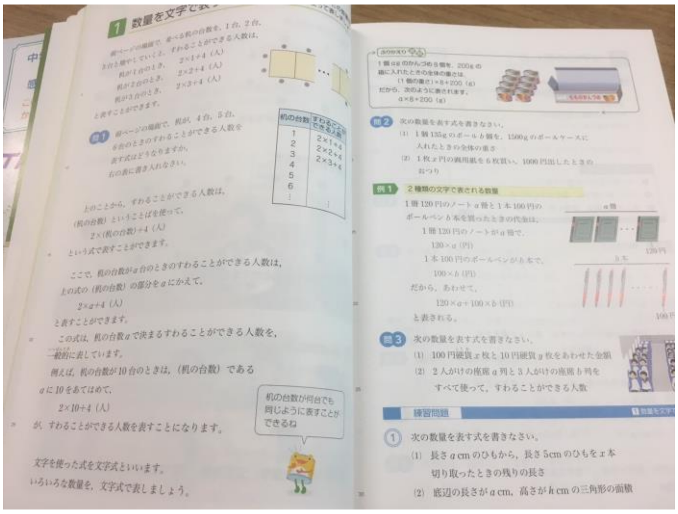
3. 次の数量を表す式を書け。
(1) 4人が a 円ずつ出して，b 円の品物を買ったときの残金
(2) 身長が $a$cm の人と $b$cm の人がいる。この2人の平均身長
(3) 定価 a 円の品物を20％ひいてもらって買ったときの代金
(4) a％びきの大売り出しで定価1000円の品物の値引きの金額

59 年度(啓林館)

・59 年度…計算問題が中心。



28 年度(東京書籍)



28 年度(啓林館)

・28 年度…59 年度に比べて文章問題が多くみられた。

数量の関係や法則などを文字を用いた式に表すことができることを理解し、
式を用いて表したり読み取ったりすること(数学学習指導要領より)

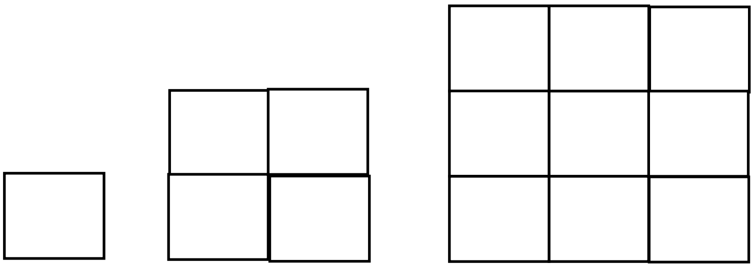
上の文章は数学学習指導要領の中の一部であるが、数学学習指導要領にもあるように、実際の教科書でも 59 年度に比べて 28 年度は文章から文字を用いた式に表すなどの文章問題が多くみられた。

[考察]

現在の教科書(東京書籍、啓林館、数研出版)はどれも図形を作ることによって文字に一般化させている題材である。これらは、図形を見ながら増加減少するものを視覚的にとらえやす

いため、式の導入がしやすくなると考えられる。
文字式の導入において、図形を作ることにより、文字に一般性を負荷する題材を用いることが良いのではないのかと考えられる。

3.指導案作成
・問題までの導入の設定
　作成する指導案は、2 時限目と考えて、1 時限目に文字を使った式を導入したことにする。
＜１時限目の問題＞
　１本１㎝の長さの棒で正方形を作る。
　一辺が 10 ㎝の正方形を作るには棒は何本必要か？



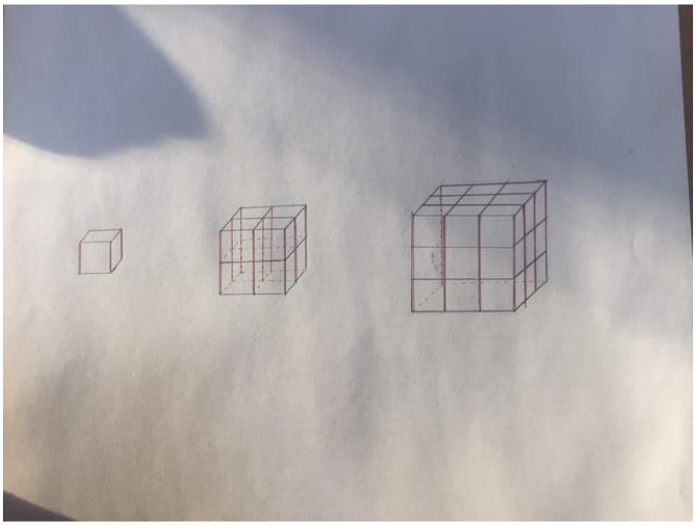
	縦向きの棒の本数		横向きの棒の本数		棒の本数
1 ㎝×1 ㎝の正方形のとき	１×(１＋１)	＋	１×(１＋１)	＝	4
2 ㎝×2 ㎝の正方形のとき	２×(２＋１)	＋	２×(２＋１)	＝	１２
3 ㎝×3 ㎝の正方形のとき	３×(３＋１)	＋	３×(３＋１)	＝	２４
	・				
	・				
	・				
10 ㎝×10 ㎝の正方形のとき	１０×(１０＋１)	＋	１０×(１０＋１)	＝	２２０

ｎ㎝×ｎ㎝の正方形を作るとき棒の本数は 2×ｎ×(ｎ＋１)と書けることに気付かせる。
それによって、正方形の辺の長さがどれだけ長くなっても計算で棒の数を求めることができることを理解させる。また、文字ｎに置くという処理を抵抗なくできるように指導していく。

[指導案]
・本時のねらい
　文字を用いる必然性がある問題により、文字の利便性に気付いてもらう。

<問題>

各辺が１㎝の立方体が積み上げられてより大きな立方体が作られています。
このとき、各辺がｎ㎝の立方体を作る場合、何本の棒が必要になるでしょう
また、どのように考えればよいでしょう？



[問題]
立方体の棒の数を数える問題

↓

[期待する活動Ａへの支援]
ノートに図を描かせて、棒の数の求め方を考えさせる。

↓

[期待する活動Ａ]
・実際に棒の数を数える。
・床と柱に分けて考える。

↓

[期待する活動Ｂへの支援]
以前の授業で扱った正方形の棒の本数を求める問題を利用して解けることに気付かせる。

↓

[期待する活動 B]
考えた数え方を文章に表して、それを言葉の式の形にする。
床と柱に分けて考える。

B-1:
まず、立方体の各フロアでの床の棒の本数と屋根の棒の本数を求める。
立方体の各フロアでの床の棒の本数と屋根の棒の本数は、(１つの床での棒の本数)と(フロアの数＋屋根)をかける。
また、１つの床での棒の本数は以前の授業で扱った正方形の棒の本数と同じ答えになるので、(フロアの数＋屋根)と(以前の授業で扱った正方形の棒の本数)をかければよい。よって、立式すると、次の式になる。
・(フロアの数＋屋根)×(１つの床での棒の本数)
(フロアの数＋屋根)×(以前の授業で扱った正方形の棒の本数)

↓

B-2:
１つの床に立つ柱の本数は、その床の交点の数と同じである。また、交点の数は(１辺での棒の数＋１)と(１辺での棒の数＋１)をかけたものである。立方体の柱の総数は、１つのフロアでの柱の本数にフロア分かければよい。
よって立式すると次の式になる。
・(１辺での棒の数＋１)×(１辺での棒の数＋１)×(フロアの数)

↓

B-3:
立方体の棒の本数は、(B-1)と(B-2)の和となる。
・(B-1)＋(B-2)= (フロアの数＋屋根)×(１つの床での棒の本数)
+(１辺での棒の数＋１)×(１辺での棒の数＋１)×(フロアの数)
=(棒の本数)

↓

[期待する活動 C への支援]
言葉の式を文字を使った式に表させる。

↓

[期待する活動 C]

立方体の１辺の長さをｎとして、棒の本数を言葉の式ではなくｎを用いた式に表す。

C-1:

正方形の棒の本数は以前に学んだ通り 2×n×(n+1)で表すことができる。

そこに１辺の長さ(フロアの数) n と屋根の分をかける。

よって、次の式で表せる。

(n+1)×{2×n×(n+1)}

C-2:

１つの床に立つ柱の本数は、１辺の長さ(１辺での棒の数) n ＋１と１辺の長さ(１辺での棒の数)n＋１をかけたものである。立方体の柱の総数は、１つのフロアでの柱の本数(n+1)×(n+1)にフロア分ｎかければよい。

よって、次の式で表せる。

(n+1)×(n+1)×n

C-3:

立方体の棒の本数は、(C-1)と(C-2)の和となる。

よって、次の式で表せる。

(C-1)+(C-2)= (n+1)×{2×n×(n+1)}+ (n+1)×(n+1)×n=3×n×(n+1)×(n+1)

↓

・さらなる活動Ｎへの支援

ピラミッドのような形になった場合、どのような数え方が考えられるか。

[練り上げ]
T…教師　S…生徒

T「前回は文字を使って式を作るという問題について考えました。 今日は前回の授業を少し応用させた問題に挑戦してみましょう。」

S「前回の授業の問題とどう違うのですか。」

T「前回の授業では、次のような問題について考えましたね。」

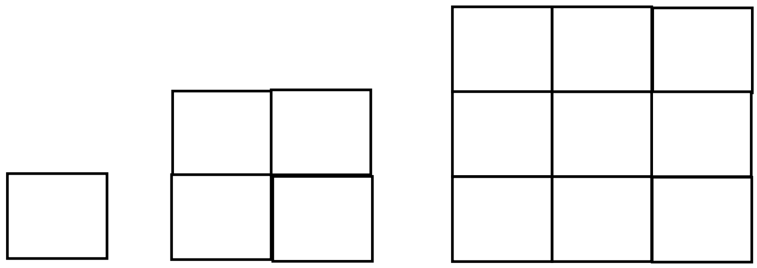


図 1

問題 1
Q：図 1 のように一辺 1 ㎝の正方形で一辺の長さが異なる正方形を作った場合の正方形の棒の本数
A： n ㎝の正方形の場合
　2 × n ×（n ＋ 1）　本

問題 2
Q: 図 1 のように一辺 1 ㎝の正方形で一辺の長さが異なる正方形を作った場合の交点の個数
A：(n+1)×(n+1)　個

T「前回の授業では問題 1 も問題 2 もどちらも平面についてしか考えていませんでしたが、今日は立体の問題について文字を使ってどのような式に表せるか考えていきましょう。」

T：「各辺が１㎝の立方体が積み上げられてより大きな立方体が作られています。
このとき、各辺がｎ㎝の立方体を作る場合、何本の棒が必要になるでしょう
また、どのように考えればよいでしょう？」

S1「立方体１つを作るのに必要な棒の本数が 12 本だから 12 本に立方体の数をかければいいんじゃない？」

S2「じゃあ、立方体の数を求めれば 12×立方体の数で求められる！」

S3「でもよく見ると重なっている棒があるよ。」

T：「では皆さん、１㎝,２㎝,３㎝などの立方体をノートに描いてみて棒の本数を求める考え方や規則性を考えてみましょう。」

T：「一本一本数えた人は前回の授業のように、規則性に注目して数えられるか考えてみましょう。では、わからない人へのヒントです。前回求めた正方形の棒の数と頂点の数を利用して考えることができます。」

T：「横向きの軸に注目してみたらどうでしょうか？」

S：「前の授業でやった正方形の棒の本数を求めるのと一緒だ。」

T：「正解です。つぎは立体ということをふまえて考えると？」

S：「一辺の辺の長さ＋１をかければいいんじゃない？」

T：「正解です。では文字を使って表すとどうなるでしょう？」

S：「正方形の棒の本数が 2×ｎ×(n+1)でこれにｎ＋1 をかければいいから、
(n+1)×{2×ｎ×(n+1)}になると思います。」

T：「すばらしい！！つぎは縦の棒の本数を求めるにはどうすればいいかな？」

S：「正方形の交点の位置から柱のように棒が出てるから、正方形の交点の個数に一辺の辺の長さをかければいいんじゃない？」

T：「そうです！では、文字を使った式に表してみましょう。」

S：「正方形の交点の数が(n+1)×(n+1)でこれに n をかければいいから、
(n+1)×(n+1)×n になると思います。」

T：「正解です。それでは、各辺が n ㎝の立方体を作る場合の棒の本数はどうなるでしょう？」

S：「さっき求めた二つの式を足せばいいと思います。なので、
(n+1)×{2×n×(n+1)}＋(n+1)×(n+1)×n になると思います。」

T：「excelllent!!」

5.感想

岸本　健

今回数学学習指導設計Ｉを受講して、指導案を作ることの難しさを学び、1つの授業を成立させせることがこんなにも大変だとは思っていなかった。

今までは教科書に書いてある通りに進めれば良いし簡単なものだと思っていたが違った。ただ教科書通りに進めるのではなく、どのような授業の進め方、どのように教えていくかなど、どのようにすれば生徒がより理解しやすくなるかを考えたり、生徒に教えていく上で教えるだけでなく自身の数学に対する理解も深めていく必要があるし、教師は生徒のためにとても長い時間をかけて授業計画を立てているのだと改めて感じた。

西尾　銀河

半年間、指導案をつくったがこんなにも大変だとは思わなかった。1つ1つ細かく組み立てていかなければいかず、教科書の通りにすればよいというわけではなかった。2人で作成したが、1人で作成することを考えると本当に大変だと感じた。だが、それが生徒のためになるのだと思うと、やりがいを感じる。

また、指導案を作成するにあたって難しいと感じたことは、期待する活動と支援を考えることだった。生徒の理解しているレベルをしっかり把握しなければならないと感じた。