2017 年度

数学学習指導設計Ⅱ

単元：微分の考え

C グループ

瀧本翔太　伊東健太　東大将　木下凛　宮下圭介

目次

1.単元設定と設定理由

数学を学習していく中で関数は重要な内容である。

そこで、関数という内容に着目し、その中で三次関数を取り扱っていくことに決定した。

また関数を取り扱っていく上でグラフについて考察するのは重要なことであり、三次関数のそれを正確に描くためには増減表を正確にかけることが必要である。従って、この増減表からグラフの概形を書く一連の流れについて考えていきたいと考えたのでこの部分が取り扱われている「微分の考え」という単元を扱うことに決定した。

中学校で習う一次関数や関数$\mathrm{y} = \mathrm{a}x^2$、また数学Ⅰで習う中学校で習った放物線の一般形である二次関数$\mathrm{y} = \mathrm{a}x^2 + bx + c$での知識との関連性を踏まえて、それぞれの定義域に対する値域の値がどのように変化していくかを考えていく。

扱う関数としては次数が三次までの関数について取扱う。

また、ただ単にグラフを描いて終わるのではなく、グラフに接線を引き本来の関数のグラフとの関連性を考察していく。

この接線を考える時に微分係数という言葉が出てきてこれを求めるには微分という手法が必要となる。微分を計算するにあたり極限を考える必要があるがここでは直観的に理解させて後に学習する数学Ⅲで極限についての概念を学んでいく。

また、扱う微分される関数は次数が三次までの多項式関数であり、指数関数、対数関数、三角関数、分数関数、無理関数などについては数学Ⅲで扱うことになっている。

2. 教科書比較

2-1 数研と東京書籍の比較

数研と東京書籍は始めに f’(x)は傾きだということをきちんと説明している。また、どちらも説明文の横に理解を手助けさせるための図があり、とても分かりやすいようになっていた。ただ、数研では

「f’(x)>0　ならば単調増加　f’(x)<0　ならば単調減少 f’(x)=0　ならば定数　」

と書いてあるのに対し、

東京書籍では

「f’(x)>0　ならば単調増加　f’(x)<0　ならば単調減少」

しか書かれておらず、次のページで　f’(x)=0　の説明が出ていても太字ではなく通常の文字で書かれていた。

数研と東京書籍を比較して感じたことは、東京書籍は図が多くイメージしやすいよう工夫されていたが、大事な箇所が抜けていた。そういった場所は教師がきちんと補足して教えなければいけないだろう。数研は一方と比べてシンプルだと感じた。だが、必要な図はしっかり描いてあるし、大事な箇所はきちんとまとめていた。

2-2 啓林館

数研には「ある区間で常に f’(x)=0 のとき、グラフの接線は常に x 軸に平行である」とあり、「(f’(x)=0 ならば、f(x)はその区間で定数である」、とまとめてるが、啓林館には f’(x)の記述はない。また数研は「常にｆ（ｘ）＝0」などと書いてあり、f(x)=0 の x が○＜ｘ＜△のようにあるように思うが、この分野では x=☆と一点になるので、ちょっとイメージがしにくくなるかもしれないが教師が噛み砕いた言い方はいくらでもできるので、教科書ではきちんとこういうふうに説明しておいたほうが良いだろうと思う。

例題の解答部分で違うのは、啓林館でｘ＜−1，1＜ｘでｙ’＞0、−1＜ｘ＜1 で y’<0 と書いてあるが増減表で十分だと思われる。そもそも、数研は増減表のグラフの説明をちゃんとやっているが啓林館はしていない。

全体を通して、数研はしっかりとした説明がされている。ただ結構硬い表現と言うか、教師の噛み砕きがないとちょっと理解しにくい気がする。要はこういうことって感じの説明が欲しくなる。啓林館は表現は優しいが抜けがあるといった感じ。そこはそこでまた教師が補う必要があると思う。表現は硬いがしっかり説明されている数研が良いと思う。

3. 問題開発

本時のねらいを

「三次関数の概形が接線の傾きの変化を調べることで描けるということをきづかせ、描けるようにしたい。」

ということに設定し以下の問題を考えた。

問題

「三次関数$\mathrm{f(x)} = x^3 - 12x$と、各点(x, y)=(−4, −16), (−3, 9), (−2, 16), (−1, 11), (0, 0), (1, −11)(2, −16), (3, −9), (4, 16)のプロット、その点を通る接線を求め GeoGebra に出力せよ。
また出力してどのような関係があるか述べよ。」

また、上記の関数の係数を設定した理由としては、関数のグラフが原点を通っている、極値が二つある、極値の絶対値が大きく関数の増減が見やすい、この関数は微分すると$f'(x) = 3x^2 - 12$となり因数分解して$3(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+2)$となる。増減表を書く際に$f'(x)$の符号を調べるがそのときに$f'(x)>0$ という不等式を解くことになる。この作業を考えると$f'(x)$の式の形が即座に因数分解できて、定数項がない方が符号を調べるのには簡単なのでこの係数の設定にした。

4. 指導案

作成した指導案

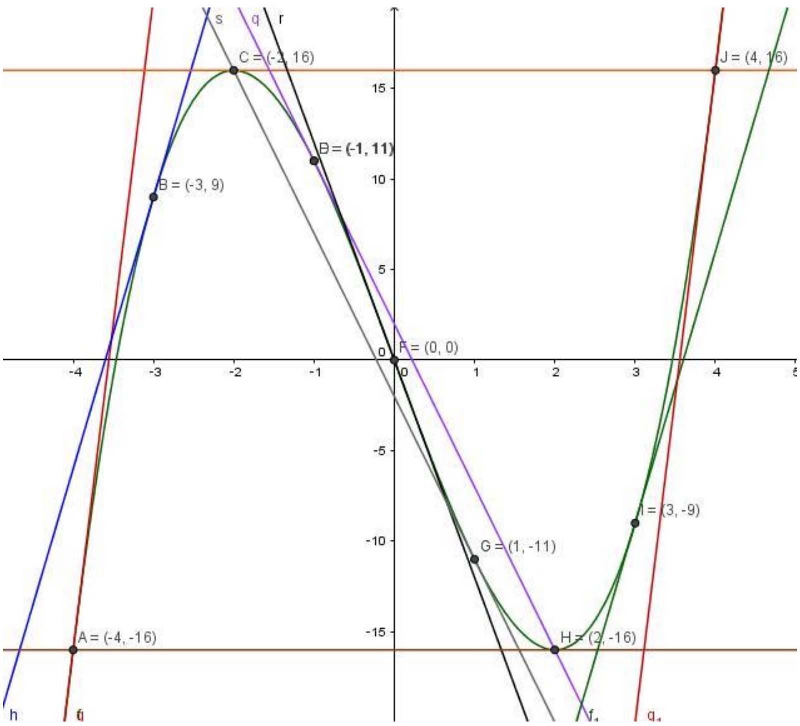
本時のねらい
三次関数の概形が接線の傾きの変化を調べることで描けるということをきづかせ、描けるようにしたい。

先生:皆さんは y=3x+2 とか、$y=2x^2-4$ などの一次関数や二次関数のグラフの概形を描きなさい、と言われば皆さん描けますよね？じゃあ、三次関数、$y=x^3-12x$ のグラフの概形を描きなさいと言われて描けますか？・・・実は皆さん、描ける知識はもう備わっているのです。最近習っていたことを活かす時が来ました笑。では問題を板書します。

問題
三次関数$f(x)=x^3-12x$と、各点(x, y)=(−4, −16), (−3, 9), (−2, 16), (−1, 11), (0, 0), (1, −11) (2, −16), (3, −9), (4, 16)のプロット、その点を通る接線を求め GeoGebra に出力せよ。また出力してどのような関係があるか述べよ。

先生:書いてある通り GeoGebra を使いますよー。まず、三次関数$f(x)=x^3-12x$を GeoGebra に入力してください。で、各点の接線を求めて式を入力しましょう。

活動 A への支援
▶より特殊な支援
接線の変化とグラフはどうなっている？
もしもっと接線を増やしたらどうなるだろう？



期待する活動 A

・接線を求め、GeoGebra に出力する。

(接線は

y=36x+128, y=15x+54, y=16, y=−9x+2, y=−12x, y=−9x−2, y=−16, y=15x−54, y=36x−128)

カクカクではあるが f(x)に似ている？→接線を増やせば滑らかになりそう。接線をたくさん描けばグラフは描ける。→大変、面倒くさい

活動 B への支援

▸より一般的な支援

どうすれば三次関数のグラフが描けそうか？

▸より特殊な支援

三次関数のグラフの概形は何がわかれば描けそうか？特徴を考える。

期待する活動 B

二次関数との比較から、三次関数の頂点、つまり極大値と極小値とその位置がわかる必要がある。そしてグラフから、極大値、極小値は接線の傾きが 0 のときであると発見。また、二次関数では、上に凸なのか下に凸なのか判断しなければならなかった。三次関数では、前後の接線の傾きの符号で上に凸なのか下に凸なのかわかる。

活動 C への支援

▶より一般的な支援

傾きの変化に注目して三次関数のグラフの概形をかけるか試してみよう。

▶より特殊な支援

傾きの変化を x を使った式で表して見よう。その式はもうあなた達は今日使っていました。どうやって傾きを出しましたっけ？

その式から、どこからどこまでの傾きが、正、負または 0 かな？まず極大値、極小値の x 座標は？

期待する活動 C

傾きの変化を表す式が描ける。増減表のようなムダのない描き方でなくていいので、どこからどこまでが傾きが正、負、0 なのか。極大値、極小値の点はどこになるのか、を調べ、三次関数のグラフの概形を描ける。

活動 A から B への練り上げ

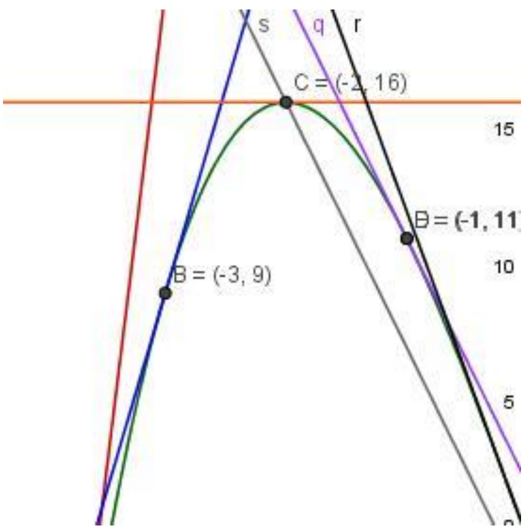
先生:二次関数をグラフに表す時と比較。二次関数は何がわかればよかった？

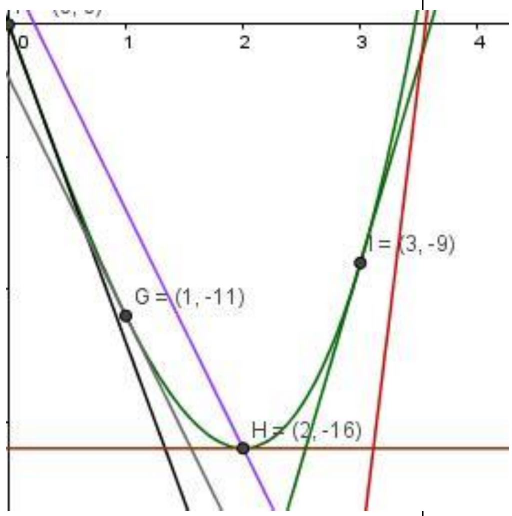
生徒:頂点、上に凸、下に凸。

先生:そうだよね！じゃあさ、三次関数では頂点ってどんな点だと言えるかな？(生徒がわ
　　注目するよう支持、さらには傾きに注目するように支持)

生徒:傾き 0 の点。

先生:そうそう！じゃあ最後、三次関数では上に凸、下に凸は何がわかればわかるか。さっ
き）に注目してみよう。GeoGebra に入力した関数の極大値、極小値の前後に注目させる。





生徒: 接線の傾きが左から正、0, 負の順のとき、上に凸で、接線の傾きが左から負、0、

先生:That’s right!結局、三次関数のグラフを考える上で何に注目すればいいのでしょ

生徒:接線の傾き！

先生;そういうことです！

活動ＢからＣへの練り上げ

先生:傾きの変化の式ですが、もうあなたたちは使っています。思い当たる人はいませんか？

生徒:接線を求めるときに、傾きを求めた式？

先生:そうです！あのときはｘに具体的な数字を入れていましたね。でも入れずに見てみると､､､

f’(x)=$3x^2$−12,つまり x の値によって傾きが変わってくる式だとわかりますよね。それでは、この式

っていくんですが、何を調べたら三次関数のグラフが描けるんでしたっけ？

生徒:極大値、極小値の場所と値がわかれば描けます！

先生:それはつまり、傾きでいうと？どんなとき？

生徒:傾きが０になるとき極大極小のどっちかで、それは、その前後の符号が正、0，負なら極大値、負、0，

ら極小値です！

先生:はい！その通りです！いいですね。それでは f’(x)=3x2−12 から、今言ったことを調べていきましょ

（ここで生徒に調べる時間を与える）

$f'(x)=3x^2-12$

極大値、極小値の x 座標は $f'(x)=0$ を満たす x だから、

$f'(x)=3x^2-12=0$

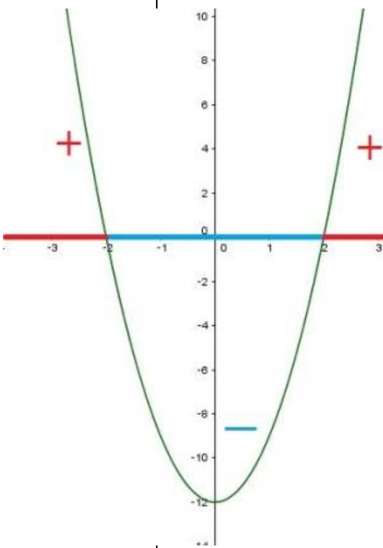
$3(x^2-4)=0$

$3(x+2)(x-2)=0$

よって、極大値極小値の x 座標は x=2, -2

ここで、どちらが極大値または極小値になるのか考える

パターン 1	パターン 2
X=2 の点の前後の傾きを、具体的な値を代入して考える。 例 x=1 を代入すると、f'(1)=-9 よって x=2 の前では傾きは負 X=3 を代入すると f'(3)=15 よって、x=2 のあとでは傾きは正 傾きは左から順に、負、0、正となるので x=2 の点は下に凸だから極小値をとる。 同様に x=-2 の点も考え、x=2 の点は上に凸だから極大値をとる。	f'(x)=3x2-12x のグラフを考え f'(x)=0 の解は、x=2, -2 だから なる。 X<-2, 2<x のとき、 f'(x)>0 つまり、 傾きが正。 -2<x<2 のとき、 f'(x)<0 つまり、 傾きは負 よって、x=-2 の点では、傾きは左から順に正、0, 負であるから、上に凸、つまり極大値をとり、 同様に考えると x=2 の点では極小



また極大値、極小値の点を求める。

極大値、極小値をとる点は x=2, -2 だから、f'(x)=x3-12x に代入する

よって極大値は f'(-2)=16

極小値は f'(2)=-16

先生:見ている感じ、(パターン 1) でやっている生徒が多いですね。でも中には別のやり いるみたいですよ。〇〇くんはどうやったの?(パターン 2 でやっている生徒に、 らう。)

先生:値を毎回代入するよりも、(パターン 2)のやりかたのほうが楽そうですよね。はい、 仕方がわかったので実際にグラフを描いて見ましょう!

さらなる活動(N)への支援

▶より一般的な支援
今まで平方完成をしてきた二次関数でもできることを確かめてみよう。

本時のまとめ（三次関数 f(x)のグラフの概形を描くためには）
1．f(x)の傾きを表す式 f’(x)を求める。（微分）
2．f’(x)=0 となる x を求め, その x のときの f(x)を求める。（極大値、極小値を求める）
3．f’(x)=0 となる x の前後の f’(x)の符号を求める。
4．これらを元に、グラフを描く。

5. 個人の感想

東大将

この講義を通して、中学校や高校の先生方がいかに授業の前の準備をしているのかを少し理解できたと思う。今回は一つの単元しか掘り進めていかなかったが、これからは他の単元のことも勉強していき、個人的にこういった指導案を作る練習をしていきたい。

瀧本翔太

この授業で教師の授業の準備の大変さ、重要さを再度確認できた。
生徒がどういう解法をするのかある程度予測して問題を作ったり、自分たちの班でいえばグラフの増減を調べる際の導関数の不等式を解くときにそこで手間取らないように三次関数の係数を決めたりと、後々の流れを考えての問題開発であったり授業の準備はものすごく重要であり大切にしていきたいものであると改めて思えた。

伊東健太

今回、指導案を自分たちで立てて感じたのは教師として良い授業を行う難しさだった
今まで漠然と教科書通りに進めれば良い簡単なものだと思っていたが違った。
ただ教科書通りに進めるのではなく、教科書を熟読した上でどのような授業の進行をすれば生徒にとって良いものとなるかを考えたり、自身の数学に対する知見を広げて、生徒たちの数学へのさらに深い理解を促す等、教師は生徒のため長い時間をかけて授業設計を行なっているのだと改めて感じた
これからはこの授業で学んだように論理的で、できるだけ生徒が理解しやすいように工夫に工夫を重ねた授業計画が立てられるよう努力していきたい

木下凛
実際に授業計画を立ててみて、思ったことはやはり、授業設計の難しさである
一つの単元、また1時間の授業の中でもどうすれば生徒にわかりやすく、しかも論理的に授業を展開できるか、というのを考えなければならず、今まで何気なく受けてきた授業にかけられた教師の教育に対しての熱量と、今それが未だに完璧に組み立てられない自分の力不足を感じた
まず自身の数学の力をさらに養い、今回の授業でも行なったように、数学史から数学の世界を見つめる等して、子どもが数学に興味を持ち、また理解を深めてもらえるような授業をすることが出来るようこれからも頑張りたい

宮下圭介
今回は5人で作成したわけだが実際は1人で作るとなると大変だなと感じた。また5人ですると間違った考えも訂正しやすいが1人でやると偏った考えなどが生じやすくなり、よりよく考えて作らないといけないんじゃないかと思った。今回は指導案作成だけでなく、数学史を見てより詳しく考えたが、教えるってのは思った以上に大変だと感じた。というのも自分が学んできたように教えればいい、とかなんとなく思っていたが数学史を見て自分は数学を全然わかっていなかったからだ。不安や焦りを感じた。だから何とか、これから先の教職に関する講義、活動で教師にふさわしい力をつけ自信をつけたいと思った。