

数学学習指導設計 I

中学校 第2学年

単元名 図形と合同

テーマ 初めての証明・三角形の合同条件

グループ B

- ・若林 直広
- ・神山 峻輔
- ・中林 晋兵

目次

- 1, 単元の設定理由
- 2, 具体的な内容
- 3, 小学校・中学校1年とのつながり
- 4, 学習指導要領解説
- 5, 教科書分析
- 6, 問題作成
- 7, 指導案
- 8, 個人の感想

1, 単元設定の理由

中学校第2学年 図形と合同

計算の問題よりも特異な科目であり、より深く教えることができると考えたため。図形は計算問題より具体的にイメージしやすい単元であるため。

これからの時代は、i P a dなどタブレット機器を利用し、視覚的にとらえる単元に発展していくと推測されるため、この単元を選んだ。

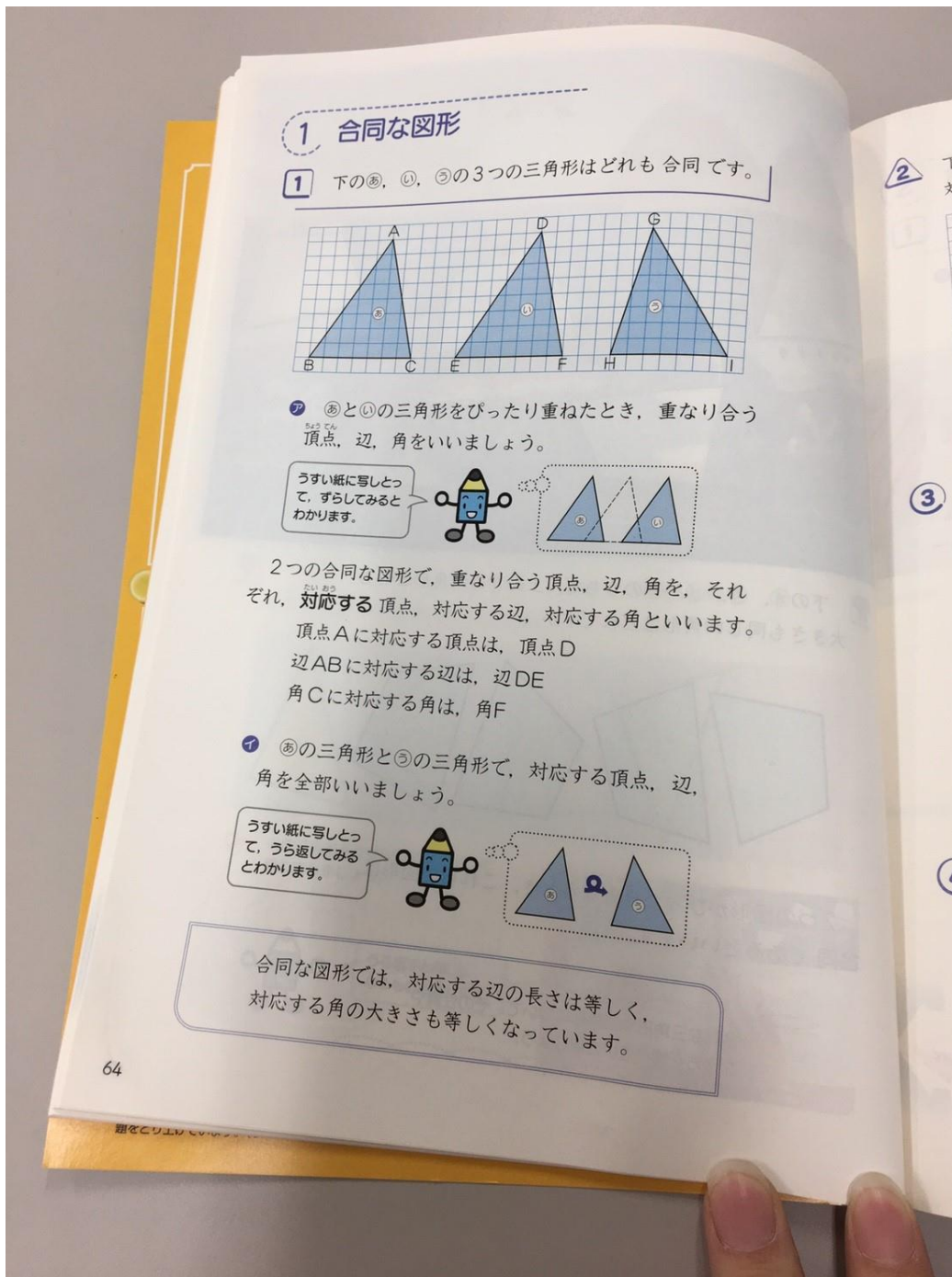
2, 具体的な内容

三角形の合同条件

三角形の合同条件は図形と合同の単元で最初に学習する内容であり、今後の証明などで使用する。例えば直角三角形や平行四辺形であることの証明に用いられる。

3, 小学校・中学校1年とのつながり

小学校第五学年

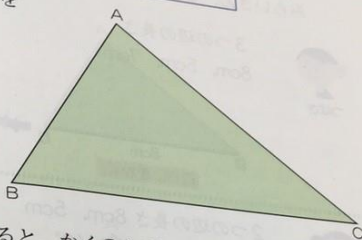


2つの図形がぴったりと重なるとき、それらの2つの図形は合同である、とまず「合同」続いて、合同な図形が与えられ、それらの対応する角や辺は等しいということ、図形を薄い紙に写し取って重ねて、方眼での実測によって学んでいる。

2 合同な図形のかき方

1 下の三角形と合同な三角形のかき方を考えましょう。

- ① うすい紙に3つの頂点を写しとってかいてみましょう。



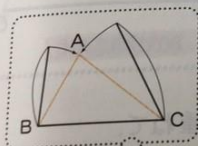
三角形は3つの頂点がきまると、かくことができます。

- ② 辺の長さや角の大きさをはかってかく方法を考えましょう。また、そのかき方を説明しましょう。

辺BCをかくと、頂点Bと頂点Cがきまります。

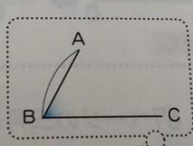


- ③ 辺BCの長さをはかって頂点Bと頂点Cをきめてから、頂点Aのきめ方をいろいろ考えましょう。



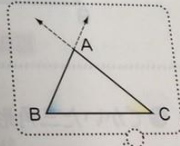
つばさ

辺ABと辺ACの長さがわかれば頂点Aがきまります。



みらい

角Bの大きさと辺ABの長さがわかれば頂点Aがきまります。



ひろと

角Bと角Cの大きさがわかれば頂点Aがきまります。

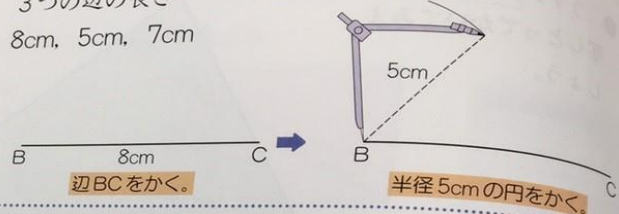
次に、合同な図形を描いてみようとなる。まず三角形が与えられ、薄い紙を使って実際に三角形を描き、合同な三角形を描くためには三つの頂点の位置が決まれば描けることに気づく。ここで、合同というのは点を同じ位置関係で移したときにできる図形であると感覚的に学んでいる。そこで、頂点が二点しか決まっていない場合を考える。何がわかれば残りの頂点を決定できるか考え、最終的に残りの頂点を決定する方法は3通りあることを学ぶ。

2 67ページの三角形と合同な三角形をかきましょう。

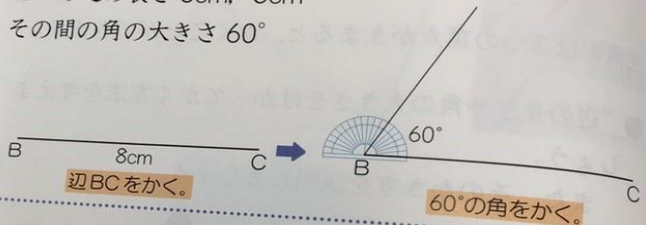
ア 下のような辺の長さや角の大きさを使って、つばささん、みらいさん、ひろとさんの考えをもとにかいてみましょう。



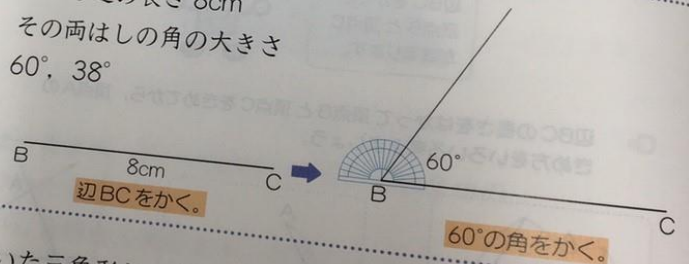
3つの辺の長さ
8cm, 5cm, 7cm



2つの辺の長さ 8cm, 5cm
その間の角の大きさ 60°



1つの辺の長さ 8cm
その両はしの角の大きさ
 $60^\circ, 38^\circ$



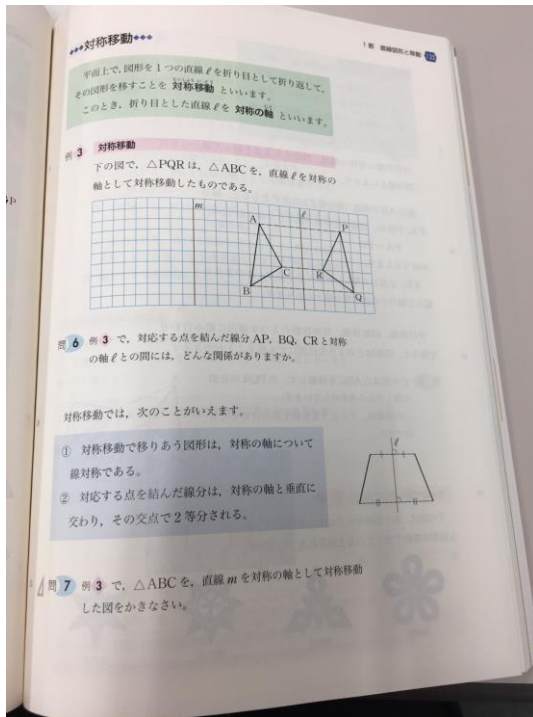
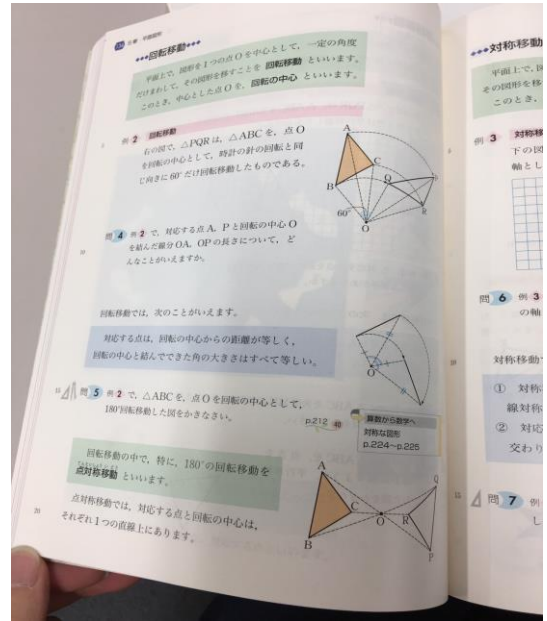
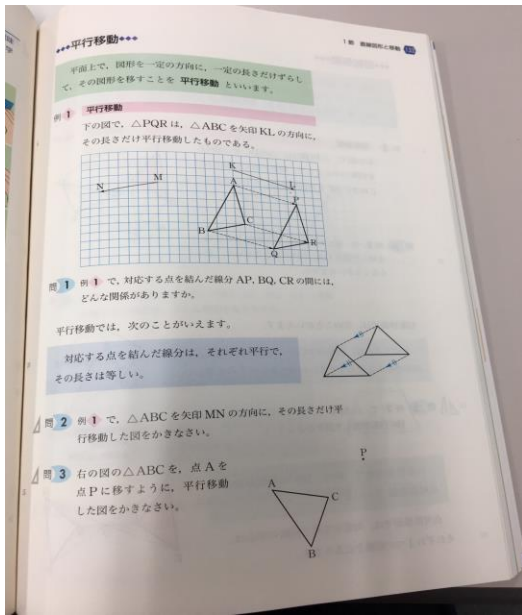
ア でかいた三角形と、67ページの三角形を重ねて、合同であることを確かめましょう。

3 辺の長さや角の大きさをきめて、右のページのア, ①, ②の三角形をかきましょう。また、そのかき方を説明しましょう。

最後にコンパスや分度器を使って合同な三角形を作図し、それぞれの描き方で合同な三角形が描けることを確認している。

小学校第五学年では、三角形の合同条件という文言はでてこないが、合同な三角形の描き方を3通り学んでいる。

中学校第一学年



図形の移動という単元名で、図形の平行移動、回転移動、点対称移動、対称移動を学ぶ。移動後の図を描くだけでなく、移動前と移動後の頂点を結んだ線分や、回転の中心と頂点を結んだ線分の間を考えている。ここでは小 5 でやった薄い紙を使う方法以外の、点を同じ位置関係で写し取る方法を学んでいると考えられる。しかし、移動前と移動後の図形の対応する角や辺の長さは等しいとはあっても、合同というワードは出てこなかった。

4. 学習指導要領解説

(1) 観察、操作や実験などの活動を通して、基本的な平面図形の性質を見だし、平行線の性質を基にしてそれらを確認することができるようにする。

ア 平行線や角の性質を理解し、それに基づいて図形の性質を確認説明すること。

イ 平行線の性質や三角形の角についての性質を基にして、多角形の角についての性質が見いだせることを知ること。

対頂角、同位角、錯角など一本の直線とそれに垂直な2本の直線の間には存在する。平面図形の基本的な性質を理解し、それに基づいて図形の性質を確認自分の言葉で説明する。

平行線の性質や三角形の角についての性質（内角の和は 180° であるなど）を基にして、多角形の角についての性質を見いだせることを知る。

三角形や四角形の性質を、論理的に筋道を立てた推論を行って調べることができるようにする。その際に、図形の観察をしたり、作図したりする操作を通して、その推論の過程を他者に分かりやすく自分の言葉で表現できるようにするのが狙い。

平行線や角の性質

論理的に筋道立てて推論する学習を対頂角や平行線の性質から始める。演繹的に導くことについてはこれまでも経験してきていることに留意し、形式的な証明の記述を要求するのではなく、自分の言葉で筋道立てて説明できるようにするのが大切。

測定に基づいて確認するだけでなく、根拠を明らかにし、それ基にして筋道立てて説明する活動を行うことによって、後の証明の学習につなげるように配慮する。

多角形の角についての性質

三角形の内角の和は 180° であることに着目して、多角形を基本の図形である三角形に分割することによって、その多角形の内角の和を求めることができるが、これは「既知のことに帰着して考える」という数学において大切な考え方の一つである。

(2) 図形の合同について理解し図形についての見方を深めるとともに、図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察し表現する能力を養う。

ア 平面図形の合同の意味及び三角形の合同条件について理解すること。

イ 証明の必要性と意味及びその方法について理解すること。

ウ 三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の基本的な性質を

論理的に確かめたり、図形の性質の証明を読んで新たな性質を見出したりすること。

小学校では平行四辺形や二等辺三角形について、角や辺に着目し実験、実測、観察などによって調べてきている。しかし中学校第2学年のこの単元では、論理的な筋道をたて、推論することによって図形の性質を調べられるようになることがねらいである。この「推論する」(何らかの論理規則に基づいて既知の事柄から未知の事柄を明らかにする)ということは、わたしは数学的思考そのものだと考える。

この単元では調べる過程やその結果を適切に表現できるようにすることも大きなねらいである。私は、計算のときなぜこう式変形できるのか理解していない子ほど途中式をばらばらに書いてしまう気がしている。計算問題なら、途中式が乱雑でも答えが合っていれば丸がもらえるときもある。しかし、この単元では論理的に、他者にも納得いくように説明するということが学習のメインであるため、生徒一人一人がどう考えたのか丁寧に見ていけることがこの単元の魅力でもあり、教えるのが難しい点だと感じた。

合同の意味と三角形の合同条件

ここでは、三角形の合同条件は考えて導く対象とするのではなく、三角形の決定条件を基に直感的、実験的に認める。今までに習った作図などの経験から理解することが大切である。

三角形の合同条件から、二等辺三角形の底角が等しいこと、直角三角形の合同条件を導くことができる。ほかにも三角形の合同条件は適用できる範囲が広く、問題の多様性や難易度の程度もさまざまである。生徒の理解度や発達の段階に応じた適切な取り扱いが必要である。このように、ひとつの規則、性質から、より限定された状況での新たな規則、性質を知ることができるのは数学のおもしろいところで、この単元には三角形の合同条件にはそのおもしろみが満載だが、一方、証明に苦手意識を持った中学生は多く、魅力が伝わりにくい単元だともいえそうだ。

数学的な推論

数学的な推論の必要性と意味及び方法を理解し、これを用いる学習は図形の領域だけでなく他の領域でも必要に応じて行われている。具体的な図形を通して推論の過程等を視覚的にとらえることなどから図形の領域が適している。

→図形の領域では視覚的にとらえることを大事にしている

→なぜ視覚的にとらえられたら数学的推論に適しているのか

数学的な推論…帰納、類推、演繹

帰納、類推はいくつかの場合についての観察、操作や実験などの活動を通して、それらを含んだより一般的な結果を出す際に用いられ、新たな事柄の発見のために大切である。演繹はその発見された事柄が正しいことを説明するために必要である。

→帰納、類推はなぜ同じように書かれているのか

→帰納、類推、演繹、その後はどうなるなか

証明の必要性和意味及び方法

命題は「仮定」と「結論」からなり、証明とは「仮定」と「結論」をはっきりさせた上で「仮定」から出発し、すでに正しいと認められている事柄を根拠にして「結論」を導くことである。また命題が正しくないことを証明するには、反例をあげればよい。証明の指導においては正しいことだけでなく正しくないことを説明できるようにすることも必要である。証明の必要性を理解するためには、観察・操作や実験などの活動によって帰納的に導かれたものと、演繹的に導かれたものの違いを理解することも大切である。その上で演繹的に説明する証明が必要であることを理解できるようにする。その際、証明は命題が例外無しに成り立つことを明らかにする方法であり、書かれた図は全ての代表として示されている図であることだ。また証明の過程においては根拠となる事柄を明らかにすることが必要である。証明の根拠となる事柄には、

- ・対頂角の性質
- ・平行線についての性質
- ・合同な図形についての性質
- ・三角形の合同条件

などがある。

三角形や平行四辺形

ここでは平行線の性質、三角形の合同条件などを基にして演繹的に考えることによって図形の性質や条件を考察し、論理的に考察し表現する能力を養うことが大切である。また三角形や平行四辺形について

- ・二等辺三角形の性質
- ・直角三角形の合同条件
- ・平行四辺形の性質
- ・平行四辺形になるための条件
- ・正方形、長方形、ひし形の性質

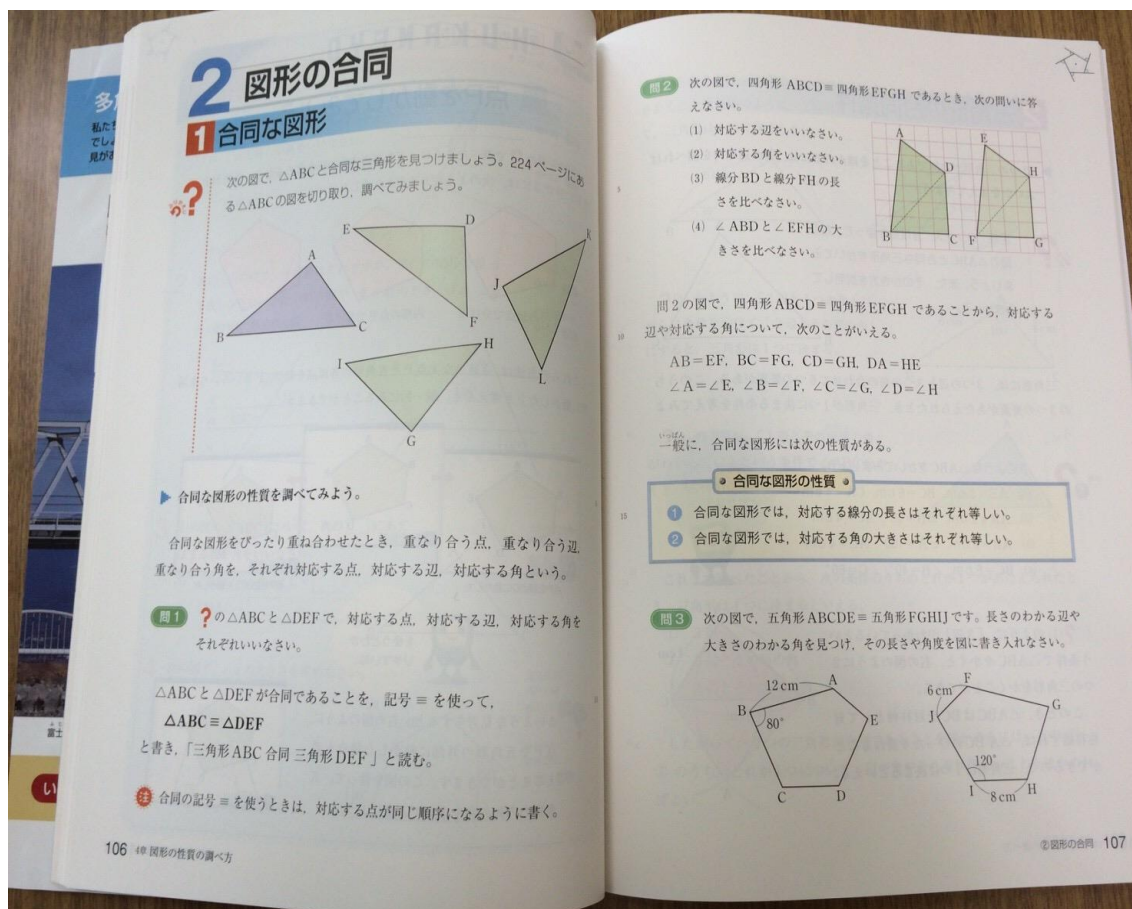
を扱う。また指導においては自分が納得したことを他の人にも納得してもらえるように説明することの大切さを強調し、証明の必要性和意味や方法について理解できるようにする。

証明を読んで新たな性質を見いだすこと

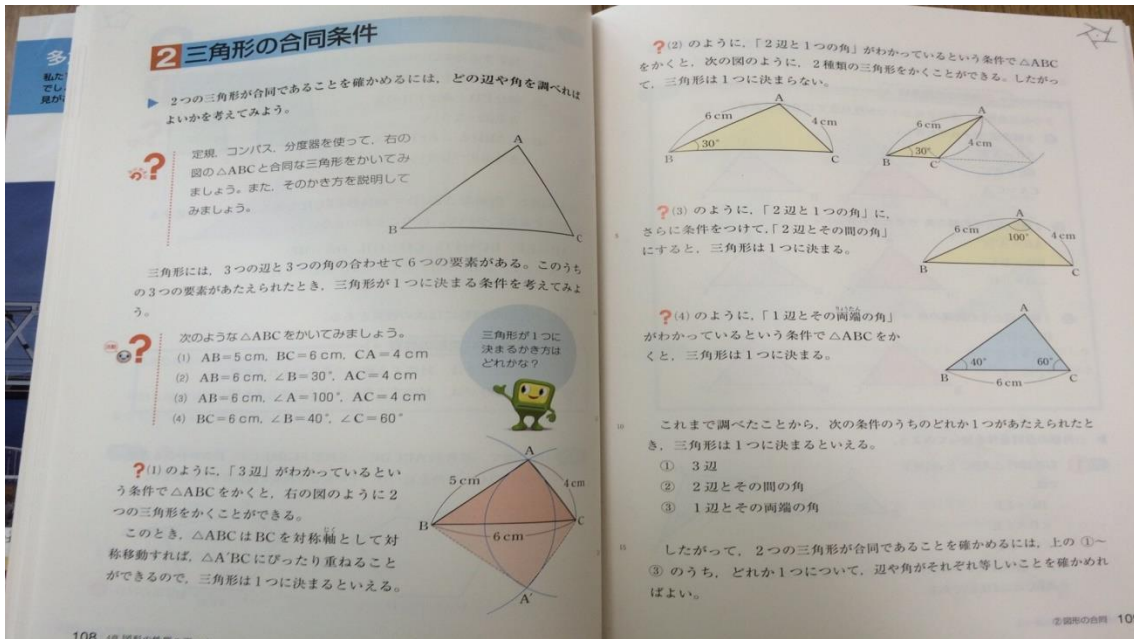
証明の学習において、証明を書くだけでなく読むことを通して論理的に考察し表現する能力を養うことが大切である。これはこの単元だけでなく、他の単元においても大切であると推測される。

5. 教科書分析

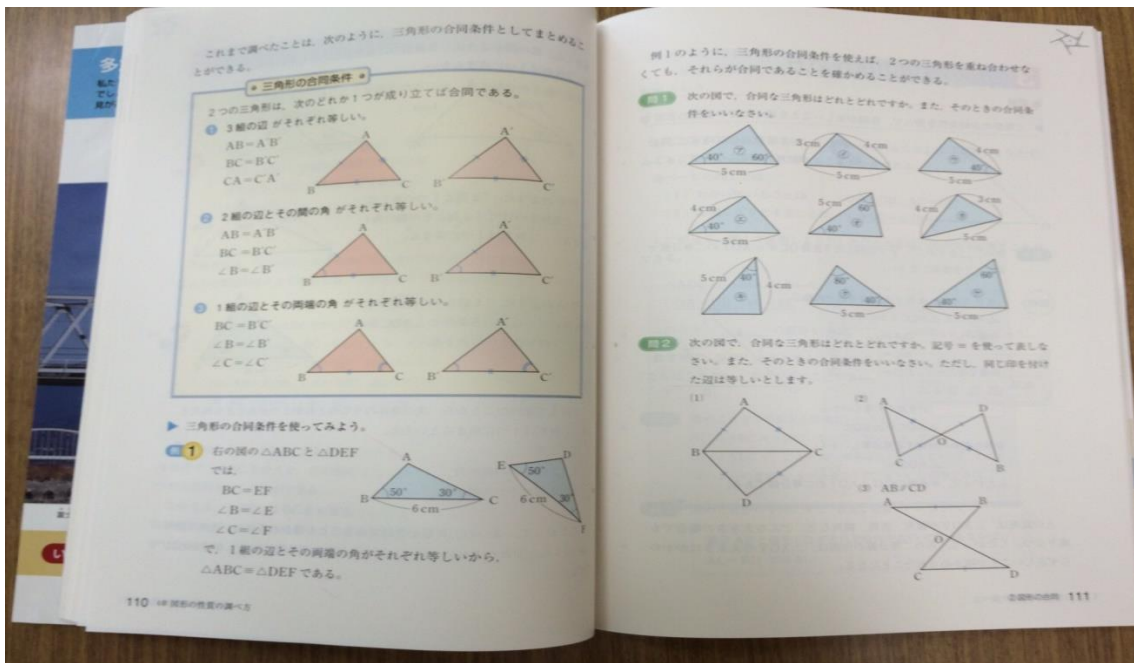
学校図書



三角形を切り取り重ね合わせることで合同の性質を見つけている。

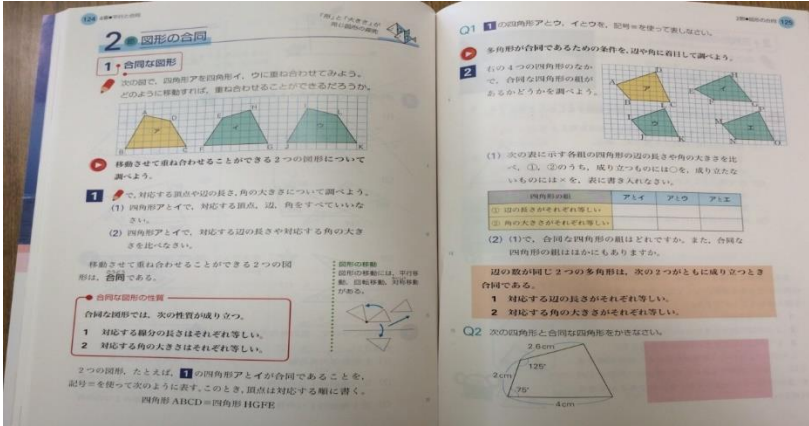


「三角形には、3つの辺と3つの角、合わせて6つの要素がある」
 ことを言い、教科書に示してある三角形と合同な三角形を書かせる。

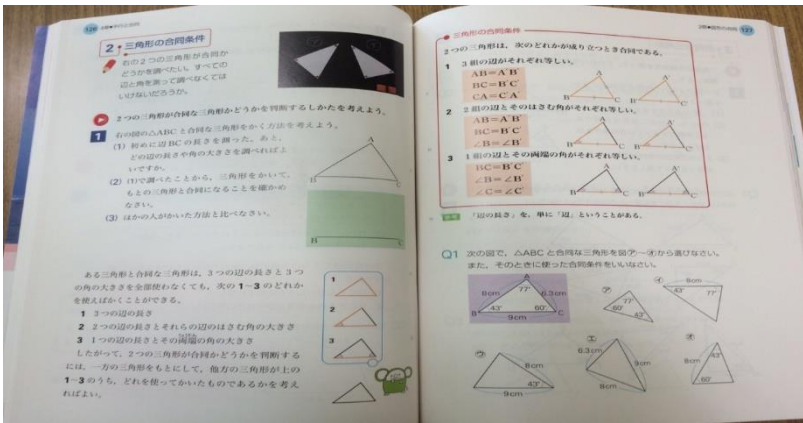


合同条件を確認し、重ね合わせなくても合同であることが言えることがわかる。

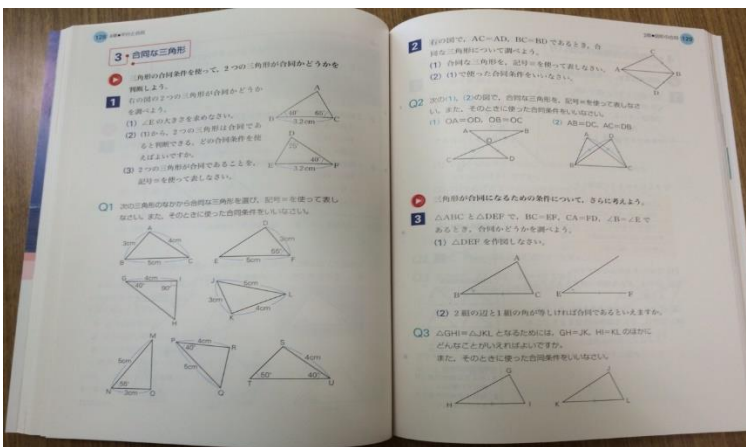
大日本図書



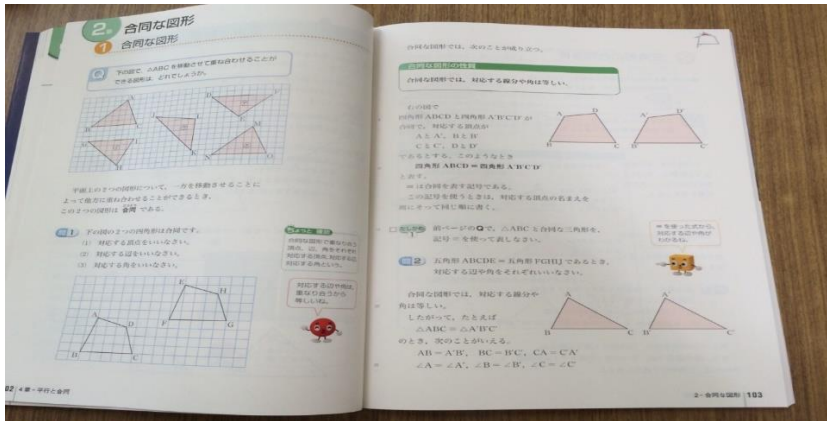
四角形をどのように重ね合わせたら重なり合うか調べている。「合同」の言葉が説明されている。



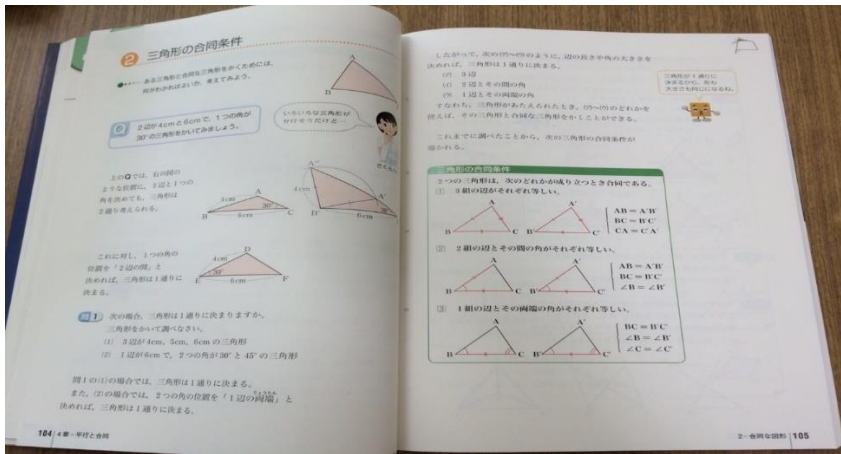
2つの三角形を比べ合同かどうか調べている。「すべての辺と角を測って調べなくてはならないだろうか」



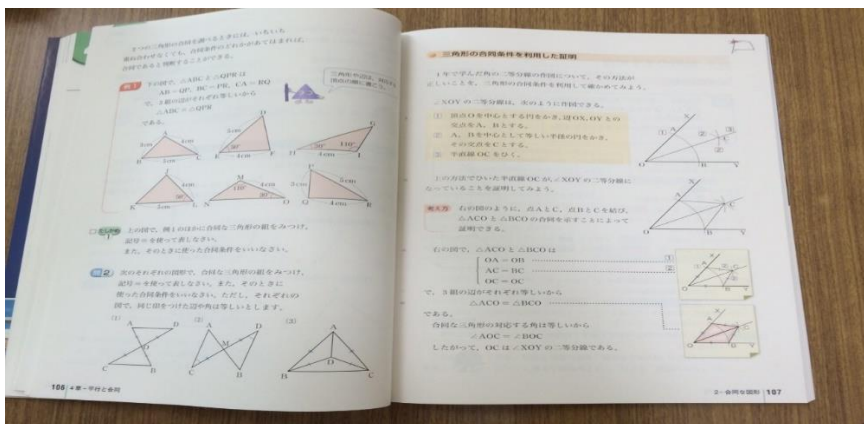
三角形の合同条件を使い、2つの三角形が合同かどうか判断する。



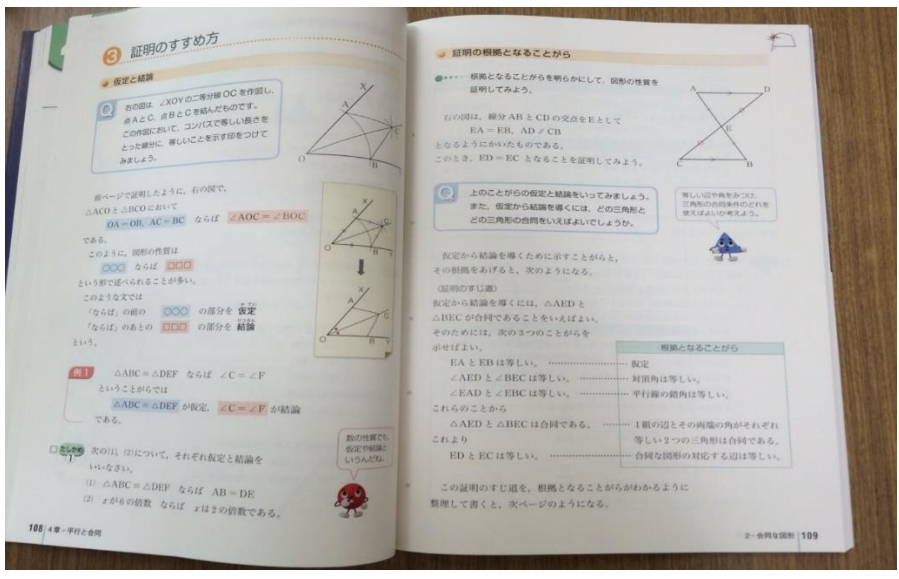
最初に平面上の2つの図形の一方を移動させて他方に重ね合わせることが出来ることを合同と説明していた。その次に合同な図形の性質として、対応する線分や角は等しいと説明していた。このとき図形は三角形に限定せず説明している。



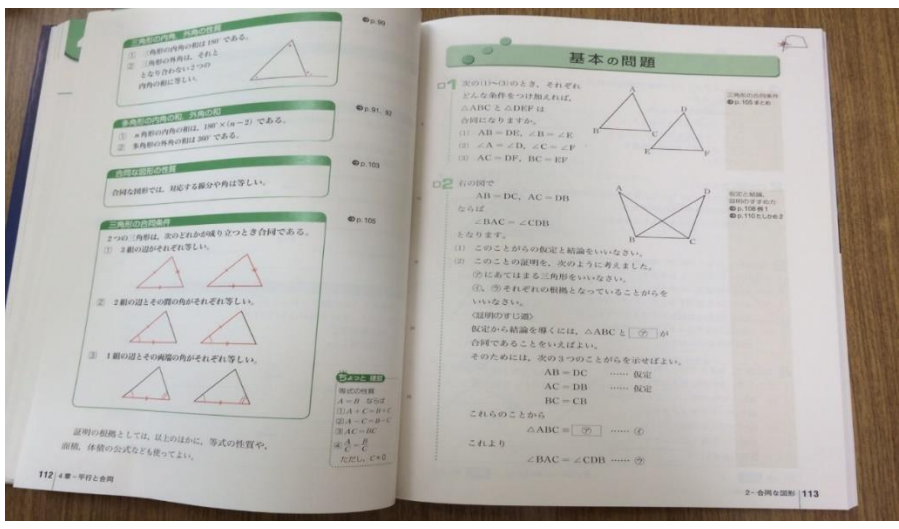
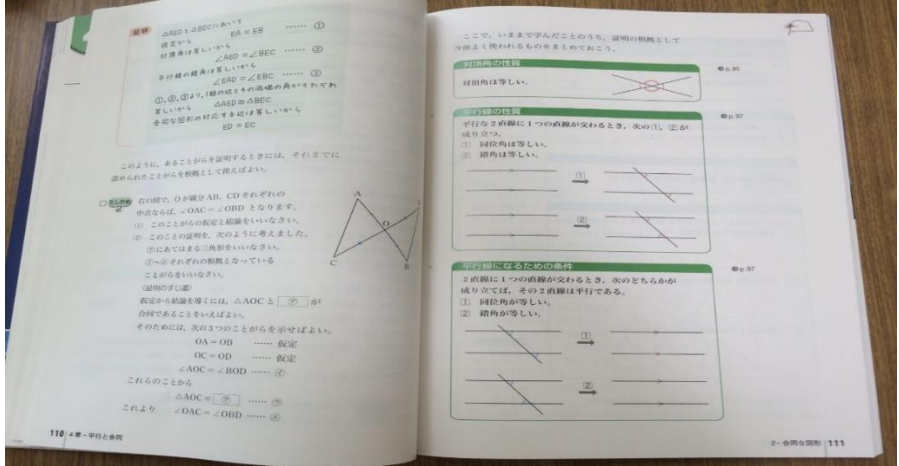
次に三角形を長さや角の大きさを指定して作図させて三角形の合同条件を確認させてから三角形の合同条件を導いていた。



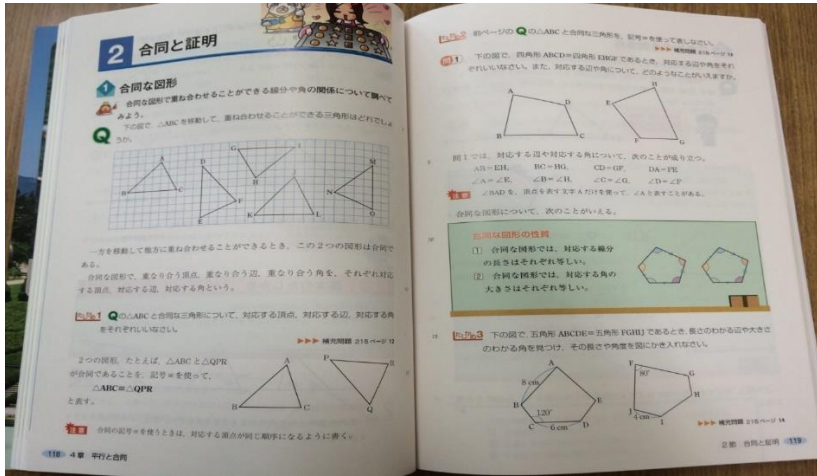
次のページでは実際に三角形の合同条件を用いて、複数の三角形の中から合同な組を見つけさせたほか、角の二等分線を証明させていた。



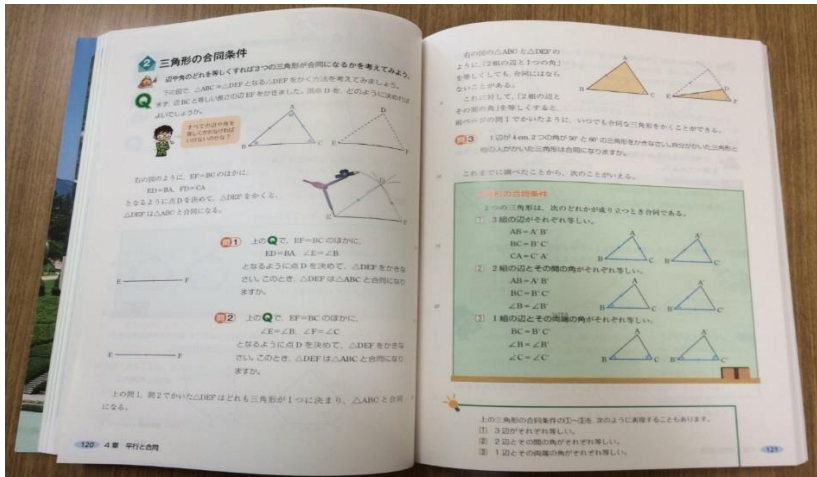
次に実際に証明をさせるために仮定と結論について説明していた。



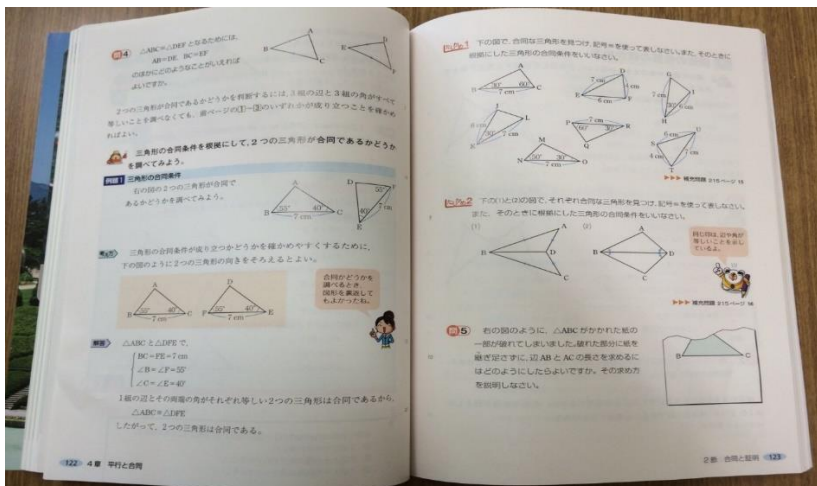
証明の根拠に・平行線の性質と条件・対頂角・三角形の内角と外角の性質・多角形の内角、外角の和などを説明していた。そのあとは練習問題と章末問題が掲載されていた。



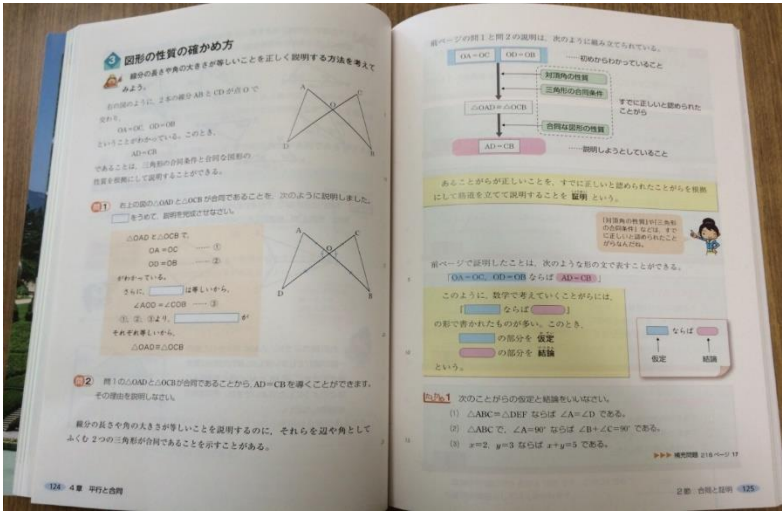
始めに三角形を重ね合わせて合同な三角形を探し、合同な三角形について説明し、その後合同な図形の性質を説明している。



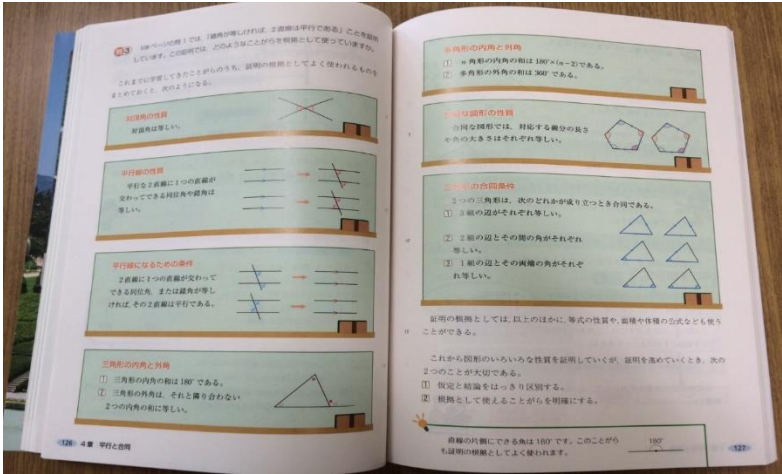
合同な三角形の作図の方法を考えて、その後三角形の合同条件を説明していた。



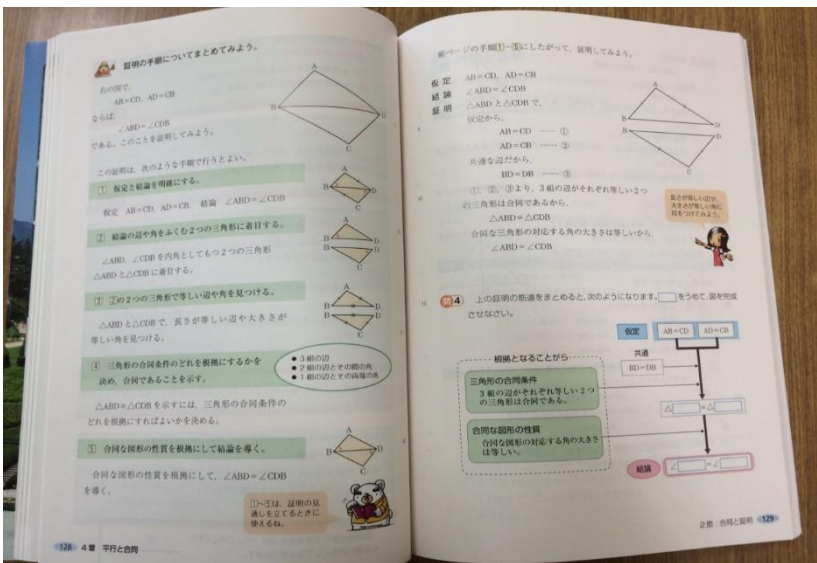
三角形の合同条件を根拠にして、2つの三角形が合同であることを調べていた。



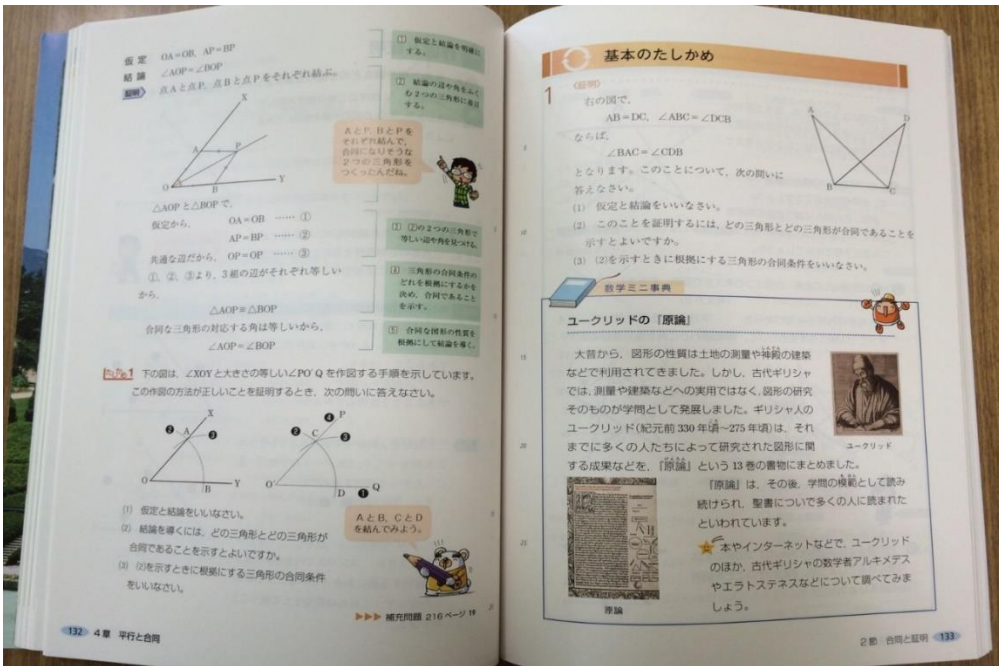
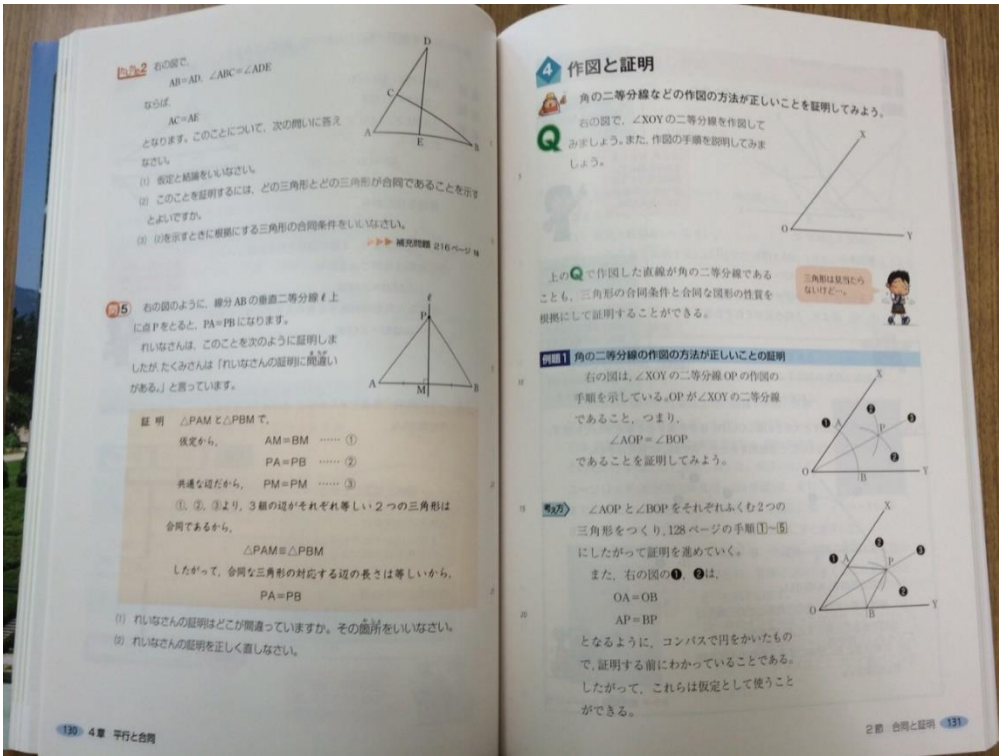
仮定・結論を説明し、証明の方法を大まかに解説していた。



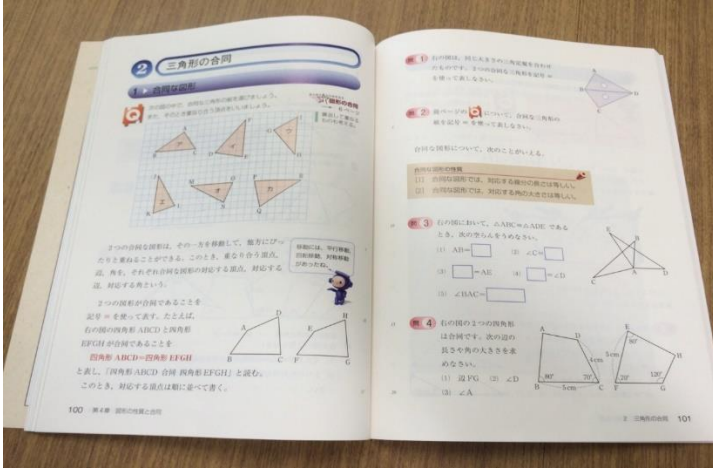
証明で用いられる図形の性質などについて説明していた。



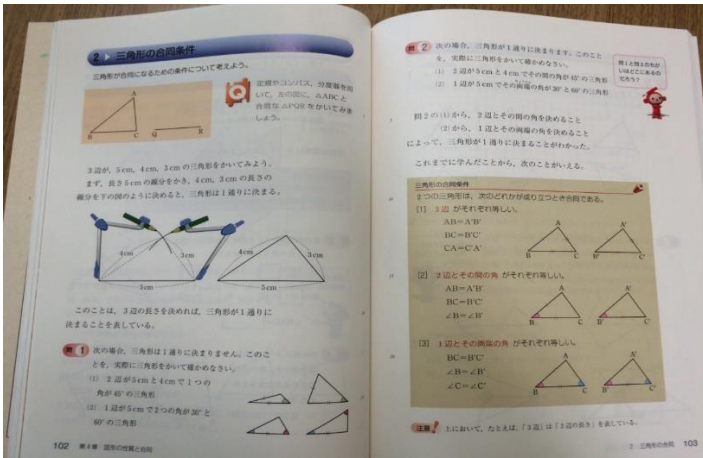
証明方法について説明していた。



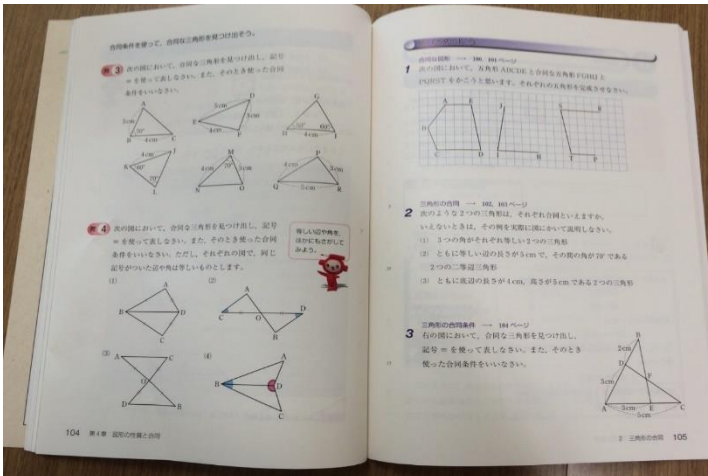
実際に証明を行い、その後作図が正しいことを証明していた。



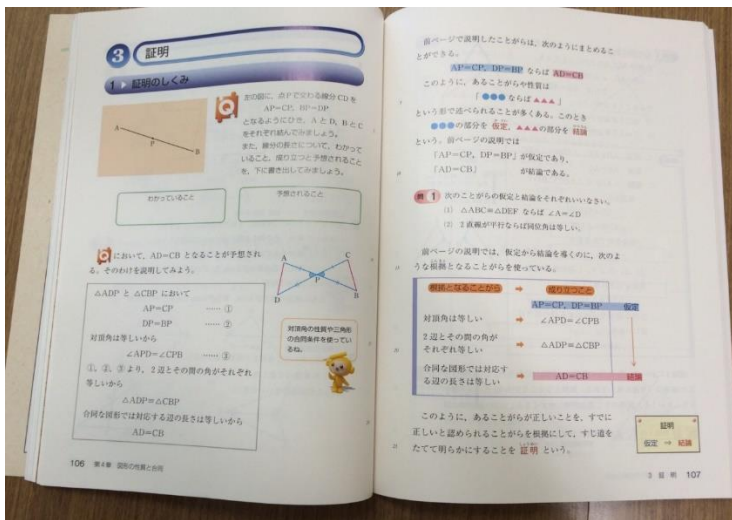
合同な図形とは何かを説明し、その後に合同な図形の性質について説明していた。



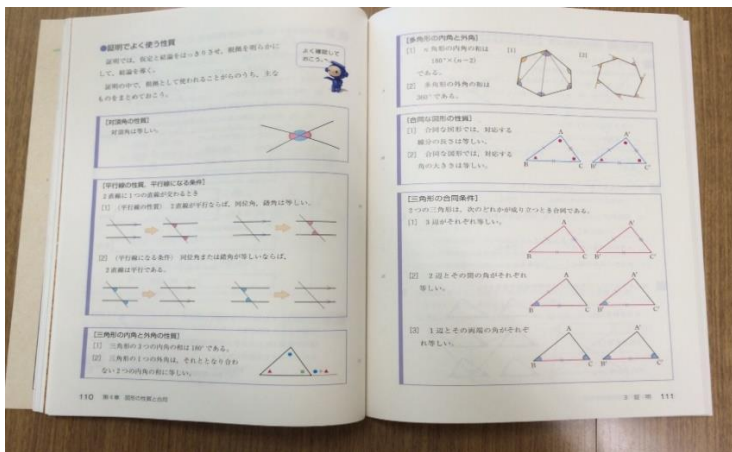
三角形を作図する方法を用いて、三角形の合同条件を説明していた。



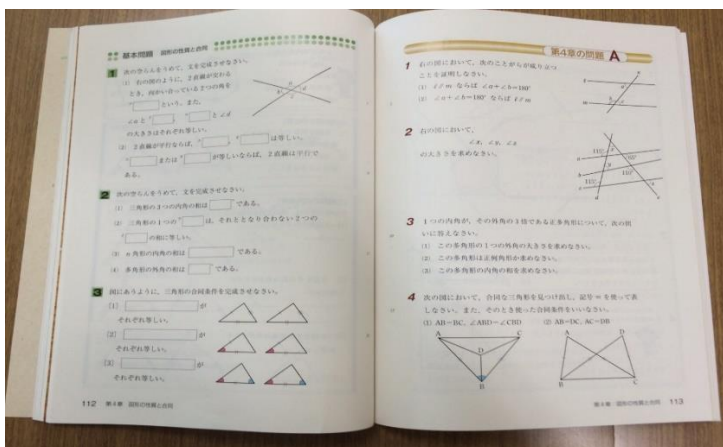
合同条件を用いた問題があった。



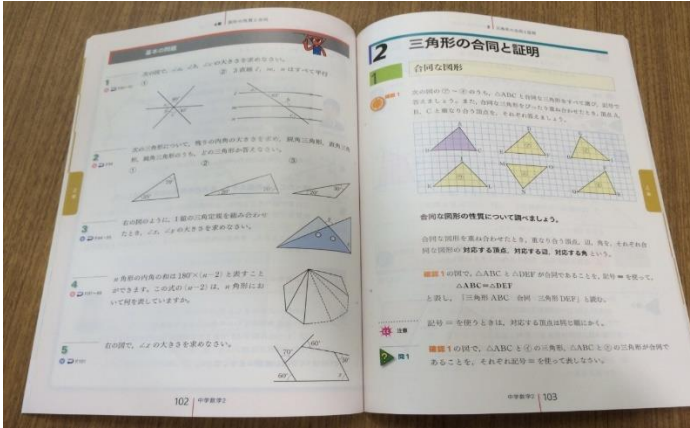
証明の仕組みと証明方法について説明していた。



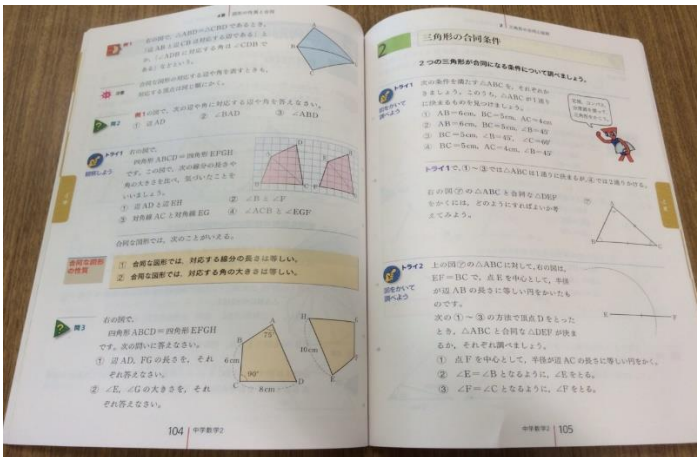
証明でよく用いる図形の性質について説明していた。



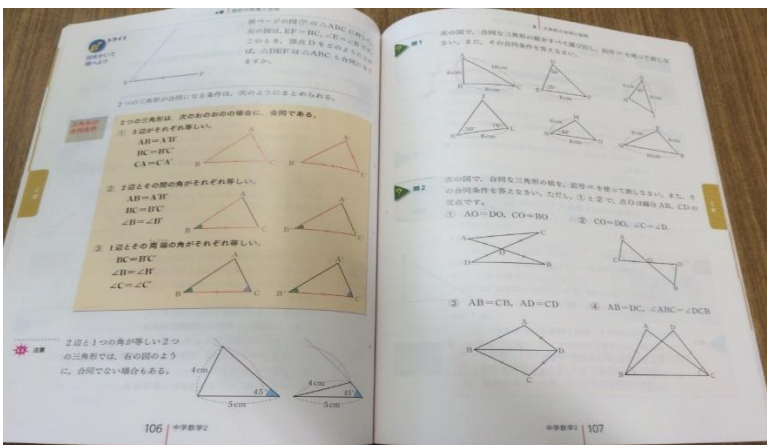
問題演習や章末問題があった。



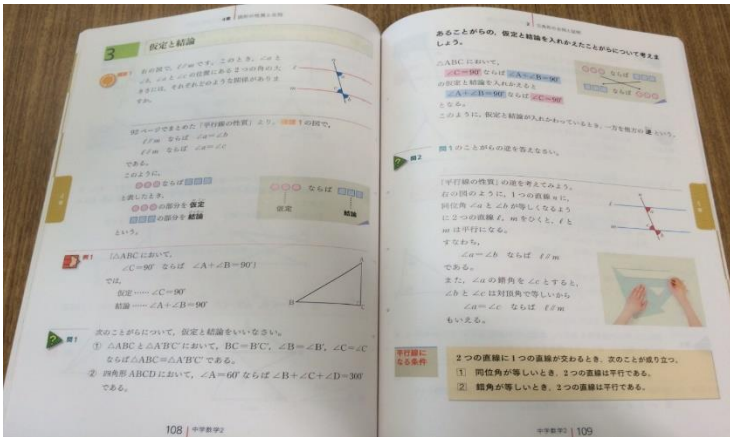
合同な図形の性質について説明していた。



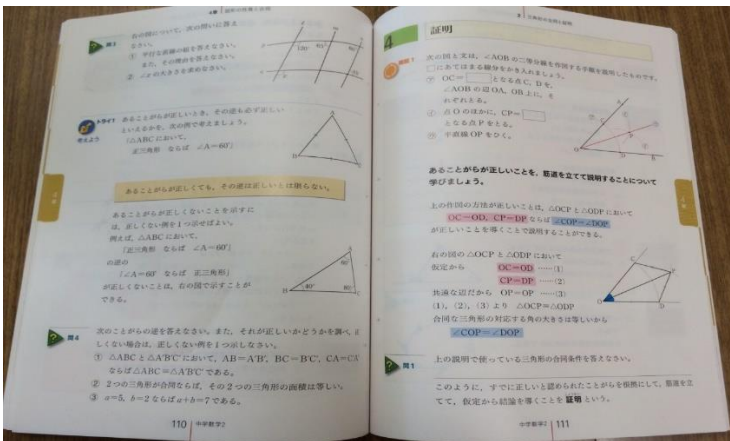
合同な図形の条件について説明し、2つの三角形が合同になる条件について調べる問題があった。



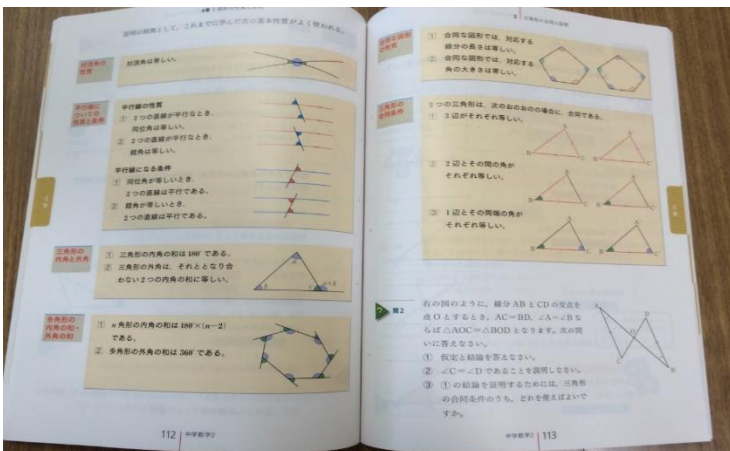
三角形の合同条件について説明し、その後三角形の合同条件を用いた問題があった。



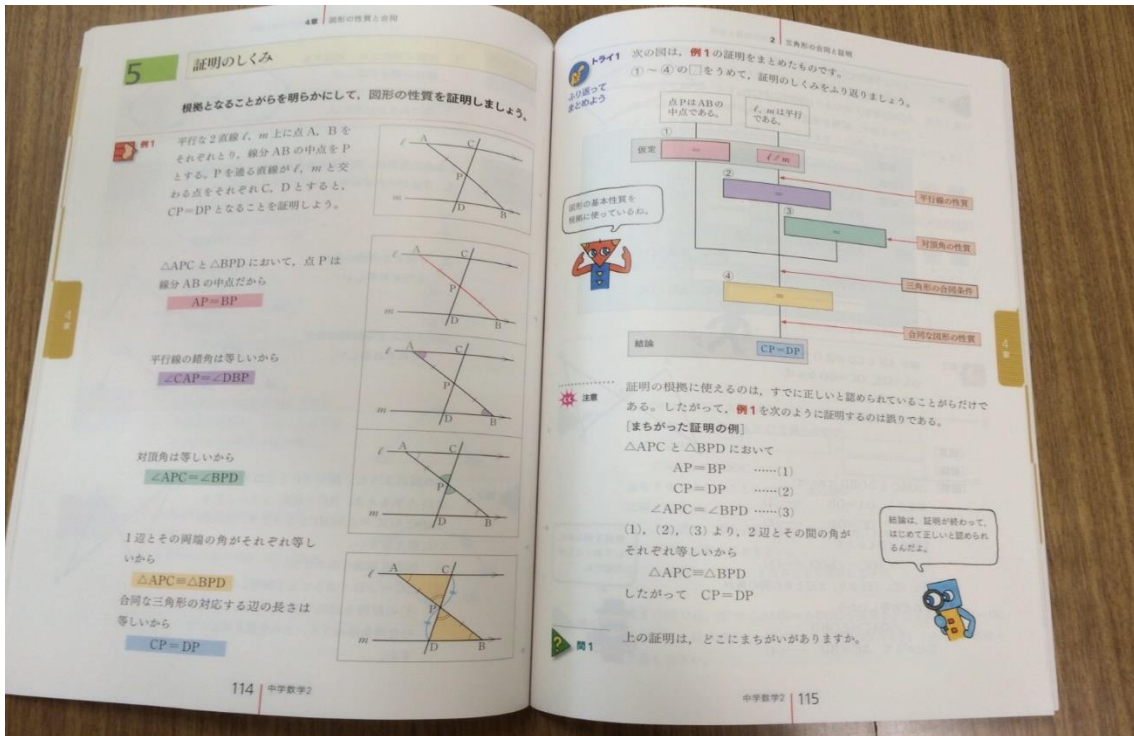
仮定と結論について説明し、その後逆についても説明し、それらを用いた問題があり平行線の性質について説明していた。



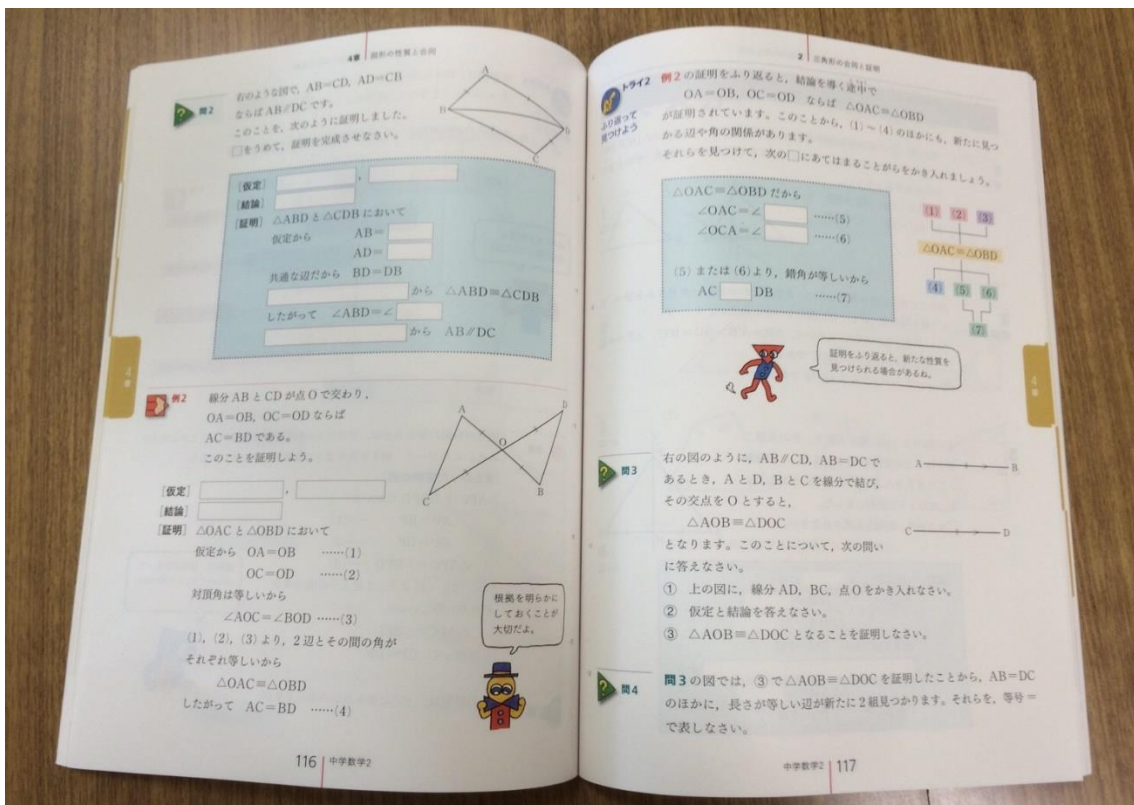
仮定と結論、また逆を用いた問題があり、証明とはどのようなものかを説明していた。



証明でよく用いる図形の性質などについて説明していた。



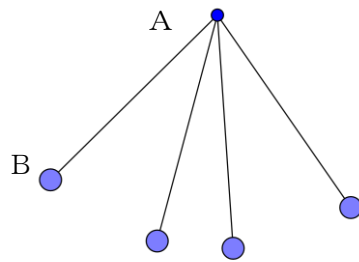
証明の仕組みと方法について説明していた。



穴埋め形式の証明問題があった。

6, 問題作成

点 **A** に糸の先端を固定し、点 **B** で振り子を静かに離した。点 **B** と同じ高さまで振り子が到達した点を点 **C** とするとき、 $\angle ABC = \angle ACB$ が成り立つことを証明せよ。



7, 指導案

【問題の提示】

先生：それでは皆さん、初めに板書を写してください。

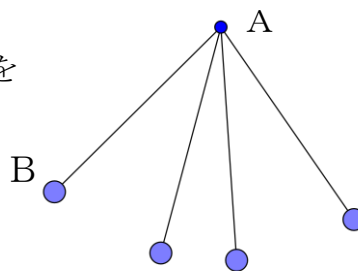
*問題文と図を板書する。

【問題】

先ほど実演したように振り子には同じ振れ幅で振れる性質があり、下図にまとめると点 A に糸の先端を固定し、点 B で振り子を静かに離した。点 B と同じ高さまで振り子が到達した点を点 C とするとき、 $\angle ABC = \angle ACB$ が成り立つことを証明せよ。

また点 B とは違う高さから静かに離したとき、同じことが言えるか？

*振り子で実演をして、問題に適した簡略図形を板書する。



*板書を書き写すことによって問題把握をさせたい。

↓
【特殊】 $\angle ABC = \angle ACB$ のとき何が言えるか

【自力解決 A】

$\triangle ABC$ について、辺 $AB =$ 辺 AC であり、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形であることが分かる。

↓
【一般】 二等辺三角形を半分に折る。

【特殊】 半分にするにはどんな条件が必要か

【自力解決 B】

$\triangle ABC$ は二等辺三角形であることを、半分に折って証明する。その時に折り目として AO を導く。

↓
【一般】 証明に必要な合同条件の確認。

【特殊】 振り幅が等しいということは $BO = CO$ となる。

【自力解決 C】

$\triangle ABO$ と $\triangle ACO$ に関して、 $AB = AC$ (ひもの長さは変動しない)、
 $AO = AO$ (共通) また条件より、 $BO = CO$ 従って、異なる三つの辺がそれぞれ等しいので $\triangle ABO \cong \triangle ACO$ が成り立つ。よって $\angle ABC = \angle ACB$ が成り立つ

↓

【練り上げ】問題を写すと同時に、振り子の簡略図を書いて、そこにひもの長さを書き入れる。(予めひもの長さを測っておく)、振り子のひもの長さが途中で変化することはないので、 $AB=AC$ が成り立つ。
 $\triangle ABC$ について、 BC の中点を点 O として補助線 AO を図に書き入れ、自力解決 C へ導く。

【シナリオ】

T : 問題を写してください。

T : ひもの長さは、10 cm です。ひもの長さは途中で変わらないよね。
そうすると、どんなことが言えるかな？

↓

↓ 先生が振り子の簡略図を板書しそれを生徒が写す。

↓

S : 辺 AB と辺 AC が等しいことが分かります。

T : そうだね。さらに、辺 BC の中点を点 O として補助線 AO を書くと
どうなるかな？

(自力解決 C へ進む。さらに、できる人には証明を書かせる。)

8, 個人の感想

若林 直広

ひとつの指導案を作り上げることに本当に様々な知識がいるということを知りました。何を学んできた子供たちなのか、学習指導要領は何を求めているのか、どういう歴史があり公式や定理が成り立っているかなど、上げ上げ始めるときりがありません。今回の授業でたくさんのことを学ぶことができました。

神山 峻輔

今回の授業を通して学んだことは、数学の授業は様々な知識の上に成り立っているということです。自分たちのグループは三角形の合同の証明についての授業を作った。このときに教科書の知識だけでなく、今まで習った知識や単元全体の目標を考えて作らなくてはならないことを学んだ。今回の授業で数学の授業を作りあげることが大変であるだけでなく、楽しさややりがいを感じることでよかった。

中林 晋兵

普段何気なく受けていた授業であるが、今回の授業を通して、教員が一つの授業、一つの単元、一つのクラスを作るためにたくさんの時間を費やし、様々な知識を盛り込んでいるということがほんの少しではあるけれど認識することができた。単に今教えようとしている単元の知識だけではなく、ほかの学年での既習事項に配慮し単元全体の目標設定が重要であることを学んだ。