数学学習指導設計Ⅱ
『相似な図形　相似な図形の証明』
Ｊ－３　レポート

工学部応用数理工学科

中島宏幸

原田千朝

堀尾祐太

森啓晃

目次

1.単元名

[相似な図形　相似な図形の証明]

・設定理由

数学学習において論証や論理的思考を養うことは重要なことである。命題の証明は過去の数学学習において重視されていた点であったが、時代の流れとともに数学学習の内容も異なっていき現代の数学学習では過去ほど重視されなくなっている。近年、日本の若者の数学離れが懸念されているが、その解決策として何が重要か話し合った結果、現在の数学学習では論理的思考が養われる機会が少ないことからその能力が養われにくい。そのため、生徒が数学の問題を解くさいに生徒が問題の解決の糸口を見つけることができない。これらより、数学は難しいと思いはじめそこから数学離れにつながるのではないかと考えた。そのため論理的思考を養う機会をもうける必要があると考えたためこの単元に設定した。

・単元の目標

(1)観察、操作や実験などの活動を通して、基本的な平面図形の性質を見いいだし、平行線の性質を基にしてそれらを確かめること。

ア、円周角と中心角の関係の意味を理解し、それが証明することができることを知る。

イ、円周角と中心角の関係を具体的な場面で活用すること。

(2)観察、操作や実験などの活動を通して、三平方の定理を見出して理解し、それを用いて考察することができるようになる。

ア、三平方の定理の意味を理解し、それが証明できることを知ること。

イ、三へ河野定理を具体的な場面で活用すること。

・指導要領における図形の証明問題の内容変化

年代ごとに学習指導要領や教科書を調べ、その年代において証明はどの学年で学ぶことになっているかどの内容をについて比較した。中学数学の内容で証明を扱っていなかった年などもあったが、最も証明に力をいれたと思われたのは昭和 33 年である。この年は日本が科学技術教育に力を入れた年である。そのため論理的思考を養う証明問題を多く扱ったのではないか考えた。証明の論述なども現代の教科書とは異なり、ゆえに、さらになどといった言葉を多く用いた論述を行っている。現代の教書ではほとんどが記号やアルファベットによる論述であり、日本語による説明は少ない。高度経済成長期においては証明問題よりも三角関数などの社会で実用性のある問題を多く扱ったため、証明問題の内容はそれほど扱っていない。また、この年から線分比、平行線などいった単語もでてきている。それ以降から現代にいたるまではそれほど内容の変化がなく証明の論述において日本語による説明が少なくなっているぐらいである。

(1)授業に対する新しい提案

・数学において論理的思考を養うことは大変重要なことであるが、従来の問題の様式では与えられた命題に対してある程度の解法がパターン化された内容である。そのためあまり論理的思考が養われないのではないかと考えた。一つの問題に対してさまざまな解法をもつ

問題を考えることで、自分では気づかなかったことに気づき図形に対して、また解決の糸口の見出し方についての視野が広がるのではないかと考えた。

2.指導計画

中学校 3 年

—相似な図形—

1.相似な図形・・・8 時

2.平行線と比・・・7 時

3.　相似な図形の面積と体積・・・4 時

—三平方の定理—

1.三平方の定理

2.三平行の定理の利用・・・5 時

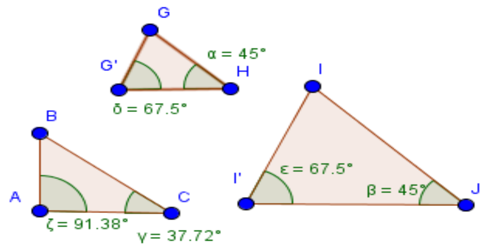
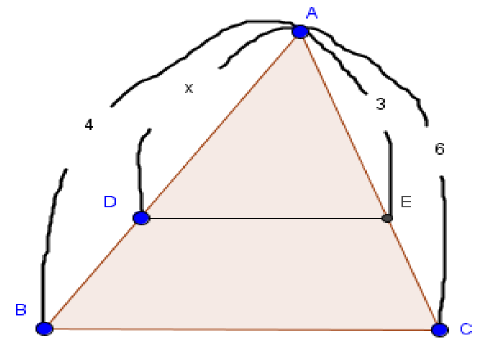
3.章の問題 A・・・1 時

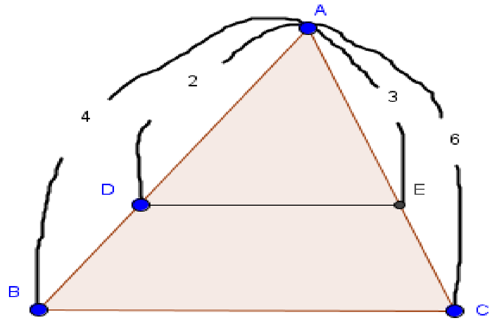
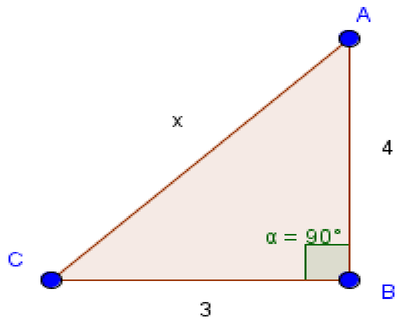
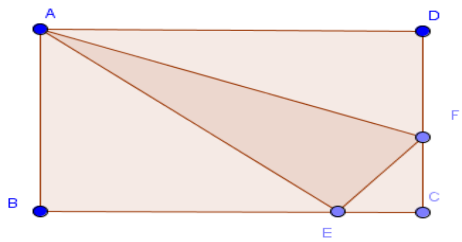
—円—

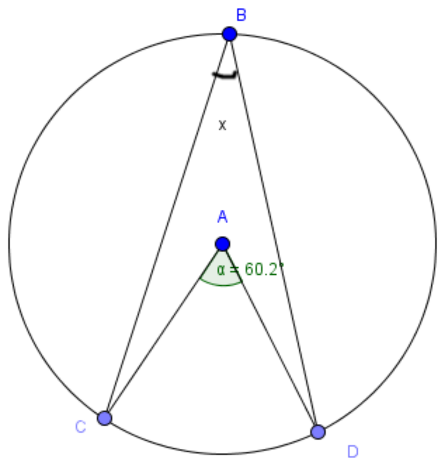
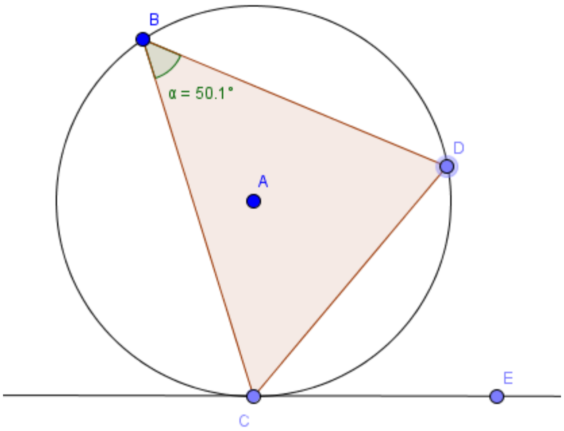
1.円周角の定理・・・8 時

2.円と直線・・・5 時

3.章の問題・・・1 時←本時

時	指導内容	指導目標	問題
1	相似な図形	相似な図形の理解	 相似な図形を選びなさい。
2	平行線と比	辺の比の理解	 DE//BC のとき x の値を求めなさい。

3	相似な図形の 面積と体積	相似比と面積・ 体積の関係	 △ADE と△ABC は相似である。△ADE : △ABC を求めよ。
4	三平方の定理	三平方の定理 の理解	 x の値を求めよ。
5	三平方の定理 の利用	三平方の定理 の活用	 長方形 ABCD において、辺 AB=3、辺 BC=4 である。辺 BC 上に点 D が重なるように折り返し、重なった点を E とする。BE の長さを求めよ。
6	章の問題		

7	円周角の定理	円周角の定理 の理解	 点 A は円の中心である。 x の値を求めよ。
8	円と直線	円と直線の関 係	 ∠DCE を求めよ。
9	章の問題		

3.指導要領の一覧

各年度の指導要領から目的と内容に当たる部分を抜き出し､それを表にまとめた｡そこから､平成 20 年度の指導要領を基準に内容、目標の変化について調べた。また、平成 20 年度との比較により、内容、目標の変更の意図を考察した。

年代	目標	内容
昭和		
26 年	・関係性を見出して問題を解決する。 ・相似や合同といった図形の測定を用いて区別できるようにする。 ・公理などを設けて証明を行うことは考えない。	・合同、相似の概念 ・合同、相似の条件 ・面積比、体積比
33 年	・図形を測定する能力を伸ばす。 ・図形の性質を明確に理解する。 ・論証の意義や方法を理解し、論理的に筋道を立てて考える能力を伸ばす。	・合同、相似の概念 ・合同、相似の条件 ・相似の図形を調べる ・図形の性質 ・相似比、面積比、体積比
44 年	・図形の性質を理解する。 ・図形の変換、縮図、立体図形の相似などを通して相似の概念を理解する。	・相似の概念 ・相似の条件 ・平行線、平行面、線分比の性質 ・立体図形の相似 ・相似比、面積比、体積比 ・縮図の活用
52 年	2 年 ・平行四辺形の性質を理解する。 ・図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解させ、 論理的に表現する能力を養う。 3 年 ・直角三角形や円の性質を理解する。 ・図形の性質の考察や計量に用いる能力を伸ばす。 ・図形について見通しをもって論理的に考察する能力を伸ばす。	2 年 ・相似の概念 ・合同、相似の条件 ・平行線の線分比の性質 ・三角形や飛行四辺形の性質 3年 ・図形の計量に関する性質 ・三平方の定理と応用 ・相似の活用 ・相似比、面積比、体積比
平成		
元	・基本的な平面図形の性質を理解する。	・平行線の性質

年	・図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解し、推論の過程を的確に表現する能力を養う。 ・図形の相似の概念を明らかにするともに、三角形の合同、相似の乗をもとにして、図形の性質を見出し、それを確かめる能力を伸ばす。	・合同、相似の条件 ・相似の概念 ・平行線と線分比の性質 ・三角形、平行四辺形の性質 ・相似の応用
10 年	・図形の相似、三平方の定理について観察、実験、操作を通して理解する。 ・図形の性質の考察、計量に用いる能力を伸ばす。 ・図形について見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす。 ・三平方の定理について理解し、それを用いることができる。	・相似の概念 ・図形の性質 ・平行線と線分比 ・相似の活用 ・三平方の定理と証明 ・三平方の定理の意味と証明
20 年	・三平方の定理について観察、操作、実験を通して理解する。 ・図形の性質の考察、計量に用いる能力を伸ばす。 ・図形にいて見通しをもって論理的に考察し表現することができる。	・相似の意味 ・相似の条件 ・図形の性質 ・平行線と線分比 ・相似比、面積比、体積比 ・相似な図形の性質を活用

4.指導要領の比較

現在との違い

昭和 26 年

・合同、相似がどういうものかという事について理解することに重点をおき、証明を行うことはしない。

昭和 33 年

・2 年生で相似を学び始める事と、「図形に対する直観的見かたや考え方を伸ばす」という部分が現在ではなくなっているのと、目的の範囲が具体的であり少し狭く感じた。

昭和 44 年

・現在は第 3 学年だがこのときは第 2 学年で学ぶことになっている。また、現在では「論理的に考察する、確かめる」となっているが、この年では、「理解を深める」という箇所が多い。

昭和 52 年

・相似の内容は第 3 学年だけでなく第 2 学年にも含まれている。第 2 学年で相似の意味や図形の性質などの基礎を学び、　第 3 学年では 2 学年で習ったことを用いて応用に取り組んでいる。

平成元年

・相似は、第 3 学年でなく第 2 学年で扱っており,作業を通して合同、相似を確かめるということは行わなかった。

平成 10 年

・特になし。

内容、目標変更の考察

昭和 26 年

・この年で証明を行うことはなく、高校の範囲として扱った。この年は、中学を卒業後働く生徒が現在と比較すると多く、証明を行う代わりに三角関数といった実用性のある知識を多く学ぶ必要があったと考える。

昭和 33 年

・この年の日本は経済成長期であり、科学技術教育に力を入れた年である。そのことから算数、数学の学習に必要である論理的思考を養うために、証明問題などといった内容を多く扱ったのではないかと考える。

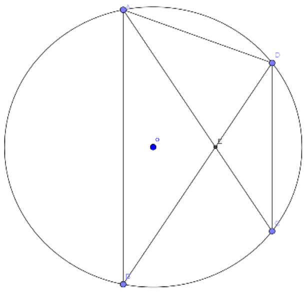
昭和 44 年

・この年は平行線、線分比、平行四辺形といった単語が扱われた。平行線、線分比の理解を深めることで、三角形の組み合わせによる図形の性質の理解をより深めるためのきっかけを作ったと考える。

昭和 52 年
・2 学年に分けたことによって、2 年生で基礎を学び 3 年生でその応用を学ぶことになり、合同・相似の内容の理解を深めることに重点をおいたと考える。
平成元年
・ここでは、実際に相似な図形を扱い問題を解くことで相似に関する理解をより深めたのではないかと考える。
平成 10 年
・特になし。

5.本時の学習に向けた教材研究

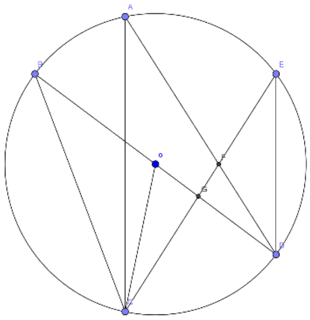
本時の問題は、円に内接する図形の相似の証明である。円周角や中心角、錯角に注目して、二組の図形が相似であることを証明していく。私たちがもともと考えていた問題は以下のとおりである。



[問題]

中心 O の円の内部に左図のような図形がある。
AF=２FC、BF=２FD、AB//DC とする。
相似の三角形を自分で見つけて証明せよ。

この最初に考えていた問題では、生徒の自発的な活動と多様な解決が期待できるが、与える図形がシンプルなためまとめの問題としては簡単すぎる。また、生徒によって解答が様々出るので、授業のまとめがしにくい。そこで線を付け加えることで図形を複雑かつ証明する三角形を指定し、今まで既習した内容をより活用できるような問題に設定しなおした。



[問題]

中心 O の円の内部に左図のような図形がある。
AB//DC とするとき、△OGC と△FGD が相似であることを証明せよ。

この問題の難しさは、証明する二組の三角形がちょうちょう型ではあるが、円 O に内接してないため、この三角形に対して直接円周角を用いて角が等しいことをつかえないところにある。そこでこの問題では主にこれまでにやってきた「円周角と中心角の関係」「錯角」「内角と外角の関係」を用いて角が等しいことを証明していくことで、問題解決することができる。

△OGC と△FGD について
対頂角より　∠OGC＝∠FGD　・・・①

中心角と円周角の関係より　２∠FED=∠OCG　・・・②
円周角より　∠HAF＝∠DEF
錯角より　∠HAF＝∠EDF
∠GFD は∠FED と∠FDE の外角なので　∠GFD＝∠FED＋∠FDE
∠FED=∠FDE より　∠GFD＝２∠FED＝２∠FDE　・・・③
よって①②③より
二組の角がそれぞれ等しい
ゆえに　△OGC　∽　△FGD

基本的に教科書で扱われている相似の証明問題は等しい角が見やすいものが多く、証明の順序さえ覚えてしまえば機械的に解くことができてしまう。そこで今回の問題のように証明する図形だけではなく、それ以外の図形にも注目して角が等しいことを見つけることが求められる。

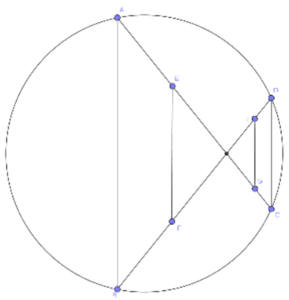
これより、図形を多様な視点から見る力や、論理的思考力の育成につながる。

また、本問題では他の三角形との関係にも目を向けることでさらに、以下のような新たに命題をたてることができる。

△BGC と△FGD…（＃）、△BCH と△EDF…（＊）は相似（証明略）である。
これと△OGC と△FGD…（&）が相似であることより、（＃）の相似な三角形から（＊）の相似な三角形を引くと（&）も相似であるという関係が得られる。

これより、
「（相似な三角形）－（相似な三角形）はいつも相似な三角形になるのか」
という命題がたてられる。

[反例]



△ABI と△DCI…（１）、△EFI と△HGI…（２）は相似（証明略）

（１）－（２）をしたときに残った図形は相似な三角形とはならないので命題は**偽**である。

この命題を考えることで、普段は与えられた図形に対して考えることが多いが、いつもとは逆の視点から、どのようなときに相似な三角形になるのかを考え書く作業をすることになる。さらに、今まで既習した図形の性質をより活用し、論理的に説明する活動ができる。

このように、これらの問題では図形に対する多方向からの視点と、論理的に表現する力を、養うことが可能になる。

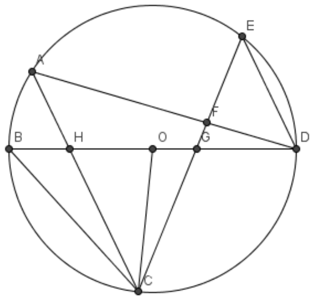
6.本時の展開

[問題の提示]

先生：それではみなさん、初めに板書を写してください。

＊問題文と図を板書する。

問題



中心 O の円の内部に左図のような図形があり、AF=2FC、BF=2FD、AB//DC、BD は円の直径である。このとき、△ OGC と△ FGD の相似の証明をせよ。

＊板書をノートに書き写すことによって問題把握をさせたい。

・この図の中にある図形を使って簡単に今までの相似の復習をする。例えば、△ ACF と△EDF はどの相似条件を使って相似を証明することができるか？
円周角の定理や対頂角、また AC//ED より錯角の関係などを用いることで簡単に証明することができる。他にも簡単に証明できる相似な三角形の組はあるが、今回は△ OGC と△ FGD に注目する。

一般 角が等しくなるときの条件を確認しよう

特殊 注目する角がどういう関係か示そう。

[自力解決 A]証明に必要な角が等しいことを証明する。

・注目する角と角が円周角,同位角,錯角,対頂角の関係にあるとき、その二つの角は等しくなる。
いま、▵ OGC と▵ FGD のそれぞれの頂角がどの角と等しいのかに注目する。
中心角と円周角の関係より∠COG=2∠CAD
円周角は等しいので∠CAD=∠CED
また、AC//ED より錯角は等しいので∠CAD=∠FDE
ここで、∠DFG は▵ DEF の外角であるので∠DFG=∠CED+∠FDE
∠CED=∠FDE=∠CAD であるので、∠DFG=2∠CAD
よって、∠COG=∠DFG
また、対頂角は等しいので∠OGC=∠FGD

一般 論理的に証明する流れを確認しよう。

特殊 今回の相似の証明の流れを確認しよう

[自力解決 B]▵ OGC と▵ FGD の相似の証明をする。

・▵ OGC と▵ FGD において
中心角と円周角の関係より ∠COG=2∠CAD ……①
円周角は等しいので ∠CAD=∠CED
また、AC//ED より錯角は等しいので ∠CAD=∠FDE
よって ∠DFG=∠CED+∠FDE=2∠CAD ……②
①、②より ∠COG=∠DFG ……③
対頂角は等しいので ∠OGC=∠FGD ……④
③、④より 2 つの角が等しいので ▵ OGC∽▵ FGD

$\boxed{\text{一般}}$ 相似な三角形から相似な三角形をとったとき、残りの図形の関係はどうか？
$\boxed{\text{特殊}}$ △ BCO と△ EDF は相似になるだろうか？

[自力解決 C](相似な三角形)－(相似な三角形)は相似な三角形になるか確かめる。

・ここで少し視点を変えてみる。△ BCG と△ EDG は相似だとすぐに分かる。
相似な三角形△ BCG、△ EDG からいま相似を証明した△ OGC、△ FGD を取り除いて
残った△ BCO と△ EDF は相似になるだろうか？

・△ OGC∽△ FGD を利用して△ BCO∽△ EDF を証明する。
△ BCO と△ EDF において
△ OGC∽△ FGD より ∠COG=∠DFG
よって ∠BOC=180° －∠COG=180° －∠DFG=∠EFD ……①
また、円周角の定理より ∠CBO=∠DEF ……②
①、②より 2 つの角がそれぞれ等しいので <u>△ BCO∽△ EDF</u>

・△ OGC∽△ FGD を利用せず△ BCO∽△ EDF を証明する。
△ BCO と△ EDF において
OB=OC より△ BCO は二等辺三角形である。
よって ∠CBO=∠BCO ……①
円周角の定理より ∠CBO=∠CAD=∠DEF ……②
また、AC//ED より錯角は等しいので ∠CAD=∠EDF ……③
①、②、③、より ∠CBO=∠DEF、∠BCO=∠EDF
よって 2 つの角がそれぞれ等しいので <u>△ BCO∽△ EDF</u>
以上のことより、相似な三角形△ BCG、△ EDG から相似な三角形△ OGC、△ FGD
を取り除いた残りの三角形△ BCO と△ EDF も相似であることが証明できた。

[練り上げ](相似な三角形)−(相似な三角形)はいつも相似な三角形になるだろうか？

＊命題は偽である。それを証明する反例をあげる。

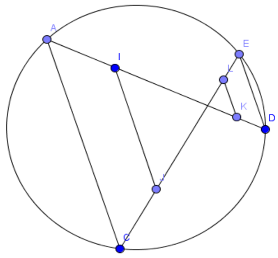
先生：では、(相似な三角形)−(相似な三角形)はいつも相似な三角形になるでしょうか？みんなでいろんな分け方を考えて確かめてみましょう。

生徒：先生、いつも成り立ちます。

生徒：あ、成り立たない分け方を見つけました。

先生：それでは、成り立つときと成り立たないときの分け方を黒板に書いてみてください。そして、成り立つときと成り立たないときの特徴は何なのか確認してみましょう。

反例



線分 AD と EC の交点を F とし、AC と平行な線分 IJ、LK を引く。

このとき、相似な三角形△ACF、△EDF から相似な三角形△IJF、△LKF を取り除いた残りの図形は台形であり、またそれぞれの台形は相似ではない。

しかし、辺の比に気を付けて線分 IJ、LK を引き相似な三角形△IJF、△LKF を取り除けば、残りの台形も相似にすることができる。

先生：このように、(相似な三角形)−(相似な三角形)はいつも相似な三角形にはなりません。よって命題は偽であることが分かりましたが、どのように三角形を取り除けば命題が真になるのかをそれぞれ考えてみてください。

＊反例を示し命題が真ではないことを確認する。

その後どういうふうに三角形を取り除けば命題が真になるのかを発展問題としてあたえ、生徒の発想の展開へとつなげる。

7.個人の感想・反省

中島宏幸

教師が授業を行う前に指導案を作成しそれにそって授業を行うことは知っていたが、ただ指導案を作ればよいのではなく、過去から現代までの学習指導要領や教科書を比較し、現代にかけて数学教育がどのように変化しているのか、またどのようなことに要点を置いているのか等の情報を手に入れた上で数学教育における改善点を見出し、それを克服できるような授業計画をしていかなければならないことを学んだ。今回はグループでの作成であったため皆に助けてもらえた面が多くあったが、これからは一人で作成できるようにならなければならないので、これからの教職に関係のある授業や実習でより多くの知識・経験を身につけていきたい。

原田千朝

今回この講義を受けてみて、授業を行う前の準備がいかに大変で重要であるかを学ぶことができました。講義を受けるまで、授業はただ教科書にそって行うものだと考えていましたが、生徒にとってよい授業を行うには教科書の内容だけでなく、問題設定や生徒への支援、練り上げが大切であることに気付きました。1つの指導案を作ることは思っていた以上に大変で時間を要するものでしたが多くのことを学ぶことができました。自分が教師になった時にそれらを活かせるように頑張っていきたいです。

堀尾祐太

今回 1 から初めて指導案を作成してこんなにも 1 時間の授業をつくるのは大変なことなのかと思いました。ただ、授業を作り上げるというのはこれほどいろんなことが考えられていて、決して教科書の通りやればいいというわけではないというのがよくわかりました。ここまで考えてこそ、教員という人を育てる立場にある人の 1 つの責任なのだと感じました。半年間にわたってこの講義を受けさせていただいて、今まで 1 番教員の仕事の要となる授業ということに関して考えるすごくいい時間でした。一生懸命考えて毎回たくさんのことを指摘していただいて、わかっていたけど自分たちはまだまだなんだと改めて思いました。だからこそさらにこれからもっと勉強していきたいです。今回ここで半年間指導案を作るために考えてきたことは大切にして活かしていきたいです。

森啓晃

今回初めて指導案の作成に取り組んで、教員になるということがいかに大変なのかということを再確認できた。作成するにあたって教科書や指導要領の年度ごとの比較、生徒がどのような活動をするか、期待する活動はどのようなものかなど多くの過程をふんで、また多くのアドバイスをもらいながら、なんとか作り上げることができた。まだまだ未

完成な部分はあると思うが、教育実習などで指導案を作成する際により良いものをつくれるように努力したい。時間を設けて班で集まることは難しかったが、その短い時間でも班員でさまざまなことを話し合い、作り上げたという経験も後に活かすことができるだろう。半年という短い時間でしたが班員の皆さんありがとうございました。