

2015 年度 数学学習指導設計Ⅱ

正の数・負の数

J2

吉川 奈佑

坂本 諒

山本 匠悟

1. 単元設定とその理由

【単元設定】

正の数・負の数（減法）

【理由】

正の数・負の数の四則計算は、中学校以降で学習する数学の内容を学習する上で、基礎となる単元である。それぞれの年度の学習指導要領がどのように教科書に反映されているか確認するために様々な出版社の教科書を閲覧していった。その際、正の数・負の数の単元の中で、数直線を有効的に用いた説明がされていないと我々は感じ、現在のものよりも、よりよい数直線の使い方を考えていきたいと思ったことがこの単元を設定した理由である。

2. 教材研究

(1) 学習指導要領の変遷

○ 学習指導要領の変遷

- ・ 昭和 33 年→昭和 44 年

＜数学に関する変更点＞

- ・ 整数を位取り記数法によって表すについての理解を深めることが加わった。

- ・ 昭和 44 年→昭和 52 年

＜数学に関する変更点＞

- ・ 第一学年の年間授業時数が 140 時間から 105 時間に減少した。
- ・ 確率・統計の単元は第二学年から履修することになり、集合・論理の単元は中学校では履修しないことになった。

- ・ 昭和 52 年→平成元年

＜数学に関する変更点＞

- ・ 確率・統計の単元が中学校では履修しないことになった。

- ・ 平成元年→平成 10 年

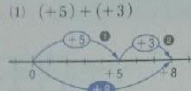
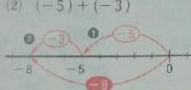
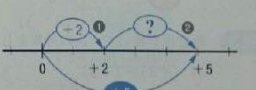
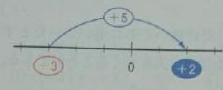
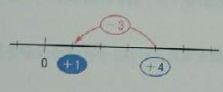
＜数学に関する変更点＞

- ・ 数学の年間授業時数がどの学年も 105 時間に統一された。

＜正の数・負の数に関する変更点＞

- ・ 内容を具体化し、特に負の数の必要性の理解に重きを置くようになった。

(2)教科書比較

定義・公式の証明・説明	考察
加法	
<p>数直線を使って、前ページでつくったたし算の式の計算を考えてみよう。 はじめに、同符号の2数のたし算を調べてみよう。</p> <p>例1 (1) $(+5) + (+3)$</p>  <p>① 0から正の向きへ5動く。 ② さらに正の向きへ3動く。 つまり、動いた結果は+8である。 $(+5) + (+3) = +8$</p> <p>(2) $(-5) + (-3)$</p>  <p>① 0から負の向きへ5動く。 ② さらに負の向きへ3動く。 つまり、動いた結果は-8である。 $(-5) + (-3) = -8$</p> <p>正、負の数の加法について、次のようにまとめることができる。</p> <p>• 正、負の数の加法 •</p> <p>① 同符号の2数の和は、絶対値の和に、共通の符号をつける。 ② 異符号の2数の和は、絶対値の大きい方から小さい方をひいた差に、絶対値の大きい方の符号をつける。 また、異符号で絶対値の等しい2数の和は、0である。</p>	<p><同符号の2数の足し算></p> <p>まず、同符号の2数のたし算について数直線を考えてみる。同符号のため、動く方向は同じになる。</p> <p><正・負の数の加法></p> <p>正負の数の加法を形式的にまとめている。</p>
減法	
<p>この計算を数直線上で考えると、 $+5$は、$+2$から正の向きへ3動いた位置にあるから、2回目の動きは$+3$であることがわかる。 つまり、次のようになる。 $(+5) - (+2) = +3$</p>  <p>2回目は、正の向きへ3動いた</p> <p>例1 $(+2) - (-3)$</p>  <p>$+2$は、-3から正の向きへ5動いた位置にあるから、2回目の動きは$+5$である。 $(+2) - (-3) = +5$</p> <p>例2 $(+1) - (+4)$</p>  <p>$+1$は、$+4$から負の向きへ3動いた位置にあるから、2回目の動きは-3である。 $(+1) - (+4) = -3$</p> <p>「$+5$をひく」ことは、「-5を加える」と同じである。 「-5をひく」ことは、「$+5$を加える」と同じである。</p> <p>• 正、負の数の減法 •</p> <p>正、負の数の減法では、ひく数の符号を変えて加えればよい。</p>	<p><正の数の減法：数直線></p> <p>まず、正の数の減法について数直線を用いて考えてみる。ここでは、2数の差を考えている。</p> <p><負の数の減法：数直線></p> <p>負の数の減法は、2数の距離を考えている。矢印の移動は、後ろの番号から前の番号へと動いている。</p> <p>言葉での説明にとどまっている。小学校時代に習った数直線の知識のみで解けるようになっている。</p>

加法

1 同じ符号の2つの数のたし算のしかたを、数直線を使って考えましょう。

(1) $(+3)+(+2)$ は、次のように考えます。

- ① 原点から正の向きに3進む。
- ② そこから正の向きに2進む。
- ③ その結果は、原点から正の向きに5進んだことになる。

だから、 $+3$ と $+2$ の和は $+5$ となり、
 $(+3)+(+2) = \square$

(2) たし算 $(-3)+(-2)$ を、右の図を使って行いなさい。

Q1 次のたし算を数直線を使って行いなさい。

<同符号の2数の足し算>

数直線において、式の左から順に示している。また、同じ方向に矢印が進むことが記載されており、始点は0である。

2 異なる符号の2つの数の加法を、数直線を使って考えましょう。

(1) $(+3)+(-5)$ は、次のように考えます。

- ① 原点から正の向きに3進む。
- ② そこから負の向きに5進む。
- ③ その結果は、原点から負の向きに2進んだことになる。

だから、 $+3$ と -5 の和は -2 となり、
 $(+3)+(-5) = \square$

(2) 加法 $(-3)+(+5)$ を、右の図を使って行いなさい。

<異符号の2数の足し算>

式を左から順番に数直線に表し、その差に着目している。矢印の方向は反対になる。

▶ 正の数、負の数の加法の規則を見つけよう。

1 同じ符号の2つの数の和について調べましょう。

2つの正の数の和の符号は+、絶対値は2つの数の絶対値の和になります。

(1) 2つの負の数の和の符号と絶対値はどうなりますか。

$(+3)+(+2)$ $=+(3+2)$ $=+5$	
$(-3)+(-2)$ $=-(3+2)$ $=-5$	

<異符号の2数の和の規則>

同符号の2数の和について絶対値を用いて説明をしている。

● 加法の規則

1 同じ符号の2つの数の和	符号……2つの数と同じ符号	絶対値……2つの数の絶対値の和	$(+3)+(+2) = +(3+2) = +5$ $(-3)+(-2) = -(3+2) = -5$
2 異なる符号の2つの数の和	符号……絶対値の大きいほうの数と同じ符号	絶対値……絶対値の大きいほうから小さいほうをひいた差	$(+3)+(-5) = -(5-3) = -2$ $(-3)+(+5) = +(5-3) = +2$
3 ある数と0との和	その数自身である。		$(+3)+0 = +3$ $0+(-3) = -3$

<加法の規則>

これまで挙げてきた例をまとめ、0が入ったときの和についても記載している。

<正・負の数の加法について>

ある数に正の数を加えると、和はもとの数より大きくなります。しかし、負の数を加えると、和はもとの数より小さくなります。



正の数、負の数の加法では、次の計算法則が成り立ちます。

$\bigcirc + \Delta = \Delta + \bigcirc$ 加法の交換法則
 $(\bigcirc + \Delta) + \square = \bigcirc + (\Delta + \square)$ 加法の結合法則

加法の交換法則、結合法則が成り立つので、加法は、数をどのよう組み合わせても、どのような順序でも行うことができます。

ここで、加法で使える法則を示し、より容易に解くことのできる解き方を学ぶ。これは、加法と減法の混じった式の計算という単元で応用をする。

減法

ひき算 $(+5) - (+2)$ は、右のようにひく数の符号を変えて加法になおすことができます。

$$\begin{aligned}
 (+5) - (+2) & \\
 = (+5) + (-2) & \\
 = +3 &
 \end{aligned}$$

・「+2をひく」ことは、「-2を加える」と同じです。

減法 $(+3) - (-2)$ は、右のようにひく数の符号を変えて加法になおすことができます。

$$\begin{aligned}
 (+3) - (-2) & \\
 = (+3) + (+2) & \\
 = +5 &
 \end{aligned}$$

・「-2をひく」ことは、「+2を加える」と同じです。

● 減法の規則

- 1 ある数から正の数または負の数をひくには、ひく数の符号を変えて加えればよい。
- 2 ある数から0をひいた結果は、その数自身である。

$$\begin{aligned}
 (+5) - (-2) &= (+5) + (+2) \\
 (+3) - (-2) &= (+3) + (+2) \\
 (-2) - 0 &= -2
 \end{aligned}$$

＜減法を加法に＞
 既習事項を用いるために、減法を加法になおす。
 (例) +2をひく → -2を加える
 -2をひく → +2を加える

＜減法の規則＞
 減法を加法になおす方法が記載されている。また、0をひくことについての記載もされている。

加法

$(-4)+6$ は、 -4 より6大きい数を求める計算になります。このことは、数直線上では、次のようになります。

したがって、
 $(-4)+6=2$
となります。

負の数をたす計算も同じように考えることができます。例えば、
 $5+(-6)$ は、 5 より -6 大きい数を求める計算となり、数直線上では、次のようになります。

したがって、
 $5+(-6)=-1$, $(-2)+(-6)=-8$
となります。

正の数・負の数の加法

同符号の2数の和
符号…2数と同じ符号
絶対値…2数の絶対値の和
 $(+3)+(+5)=+(3+5)$
 $(-3)+(-5)=- (3+5)$

異符号の2数の和
符号…絶対値の大きい方の符号
絶対値…2数の絶対値の大きい方から小さい方をひいた差
 $(+3)+(-5)=- (5-3)$
 $(-3)+(+5)=+(5-3)$

絶対値が等しい異符号の2数の和は0です。
また、0と正の数、0と負の数の和は、その数のままです。
 $(+5)+(-5)=0$
 $0+(+5)=+5$
 $0+(-5)=-5$

◆◆◆加法の計算法則◆◆◆

加法については、どんな正の数の場合にも、
 $2+3=3+2$ $(2+3)+4=2+(3+4)$
のように、
 $a+b=b+a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$
が成り立つことを知っています。これらを、それぞれ、
加法の交換法則 **加法の結合法則**
といいます。
これらの法則は、負の数をふくむ場合にも成り立ちます。

<足し算の定義>

式を言葉で表現することによって理解させようとしている。

<負の数を足す計算>

-6大きい→6小さい
よって、数直線を左に進む。

<正・負の数の加法>

符号と絶対値をもとに加法をまとめている。
絶対値が等しい異符号の2数の和0である。という記載がされている。

<加法の計算法則>

加法の計算法則は、加法と減法の混じった計算という単元で応用する。
法則を負の数を含む場合についても使えることを記載している。

減法

次の□にあてはまる数を答えましょう。

① $(+9) - (+3)$ は、 $+9$ より□小さい数を求める計算で、
 これは、 $+9$ より□大きい数を求める計算と同じです。

② $(-5) - (+7)$ は、 -5 より□小さい数を求める計算で、
 これは、 -5 より□大きい数を求める計算と同じです。

このことから、①、②の式を、たし算で表してみましょう。

$(+9) - (+3) = (+9) + \square$
 $(-5) - (+7) = (-5) + \square$

上の②から、正の数をひく計算は、
 $(+9) - (+3) = (+9) + (-3)$
 $(-5) - (+7) = (-5) + (-7)$

のように、負の数をたす計算になおすことができます。

正の数・負の数の減法

正の数・負の数をひくには、符号を変えた数をたせばよい。

<正・負の数の減法>

減法を加法に変換する方法を例題として記載している。

ここで、正の数・負の数の減法の解き方として符号を変えた数を足せばよい。という記載がされている。

加法

1 加法

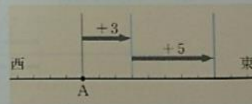
●●●●● 東西にのびる一直線の道路を歩く場面を利用して、正負の数のたし算を考えてみよう。

Q 地点Aから次のように歩くと、その結果は、Aからどちらの方向へどれだけ歩いたことと同じになっているでしょうか。
 (1) 最初に東へ3m歩き、続けて東へ5m歩く。
 (2) 最初に東へ3m歩き、続けて西へ5m歩く。

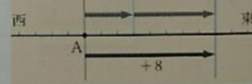


例1 上のQの(1)での2回の移動とその結果を、正負の数を使って表してみよう。

1回目の移動は +3m
 2回目の移動は +5m
 と表せる。



2回続けて移動すると、右の図のようになり、結果は+8mと表せる。

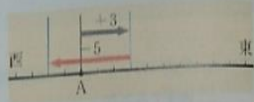


例1の結果の+8mは、次のたし算の式で求められる。
 $(+3) + (+5) = +8$

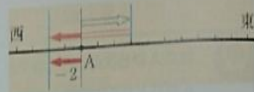
2- 加法と減法

例2 前ページのQの(2)の結果を、正負の数を使って表してみよう。

1回目の移動は +3m
 2回目の移動は -5m
 と表せる。



2回続けて移動すると、右の図のようになり、結果は-2mと表せる。



<加法>

東へ Xm 、西へ Ym といった表現を用いている。
 \Rightarrow 東西にのびる一直線を歩く場面を用いて、正の数・負の数の加法を考えさせようとしている。

<正の数の加法：数直線>

正の数と正の数の加法においては、2つの移動距離(数の大きさ)を合計したものが解になることを記載している。

正の数と負の数が混ざった加法においては、図のように最初に東へ Xm 、西へ Ym 進んだ結果、東に対して Zm 進んだというような表現をしている。

例3 同符号の数の加法

(1) $+4$ と $+6$ の和

$(+4) + (+6)$
 $= +(4+6)$
 $= +10$

(2) -4 と -6 の和

$(-4) + (-6)$
 $= -(4+6)$
 $= -10$

例4 絶対値の等しい異符号の数の加法

-5 と $+5$ の和

$(-5) + (+5)$
 $= 0$

絶対値の等しい異符号の2つの数の和は、0である。

例5 異符号の数の加法

(1) $+9$ と -4 の和

$(+9) + (-4)$
 $= +(9-4)$
 $= +5$

(2) -10 と $+4$ の和

$(-10) + (+4)$
 $= -(10-4)$
 $= -6$

例6 (1) $(-0.8) + (-1.5)$
 $= -(0.8 + 1.5)$
 $= -2.3$

(2) $(-\frac{5}{3}) + (+\frac{1}{4})$
 $= (-\frac{20}{12}) + (+\frac{3}{12})$
 $= -(\frac{20}{12} - \frac{3}{12})$
 $= -\frac{17}{12}$

整数のときと同じように考えて計算すればいいわ。

・同符号どうしの加法については、どちらも二つの数の合計が解になることを数直線で示している。

絶対値の等しい異符号の2つの数の和は0になる、と記載されているが、以後絶対値に着目した考え方はなかった。

異符号の加法の説明では絶対値に着目した説明がされていたにも関わらず、ここでは絶対値に触れられていない。

<正・負の数の加法：分数、小数>
 分数や小数を含む数の計算にも触れられているが、数直線を用いた説明はなく、解答が示されているのみだった。

問1 次の計算をしなさい。

(1) $16 - 25$

(2) $-31 - 11$

もっと練習!

(1) $1.3 - 2.5$

(2) $\frac{3}{8} - \frac{5}{6}$

加法と減法の混じった式でも同じように考えられる。

たとえば $4 - 7 + 9 - 5$ という式は、加法だけの式になおすと

$$4 - 7 + 9 - 5$$

$$= (+4) - (+7) + (+9) - (+5)$$

$$= (+4) + (-7) + (+9) + (-5)$$

減法を加法になおす

となるから、 $4 - 7 + 9 - 5$ は、下の4つの数の和を表している。

$$+4, -7, +9, -5$$


これらの数を、 $4 - 7 + 9 - 5$ の式の項という。

減法の計算を加法になおすという工夫された計算方法が記載されている。

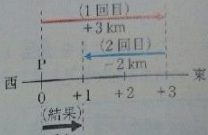
加法

たし算のことを **加法** という。加法の結果が和である。

$(+3)+(+2)$ は小学校で学習した $3+2$ と同じだね。



例題 1 (正の数)+(負の数)
 $(+3)+(-2)$ を求めてみよう。
 みささんの班の2回の移動とその結果を考える。



正の数、負の数の加法について、次のことがいえる。

正の数、負の数の加法

① 同符号の2数の和
 { 符号 …共通の符号
 絶対値…2数の絶対値の和
 $(+3)+(+2)=+(3+2)$ $(-3)+(-2)=-(3+2)$

② 異符号の2数の和
 { 符号 …絶対値の大きい数の符号
 絶対値…絶対値の大きい方から小さい方をひいた差
 $(+3)+(-2)=+(3-2)$ $(-3)+(+2)=-(3-2)$

正の数、負の数の加法でも、次の計算法則が成り立つ。

加法の交換法則 $a+b=b+a$
加法の結合法則 $(a+b)+c=a+(b+c)$

加法では、交換法則や結合法則が成り立つから、いくつかの数を加えるときには、数の順序や組み合わせを変えて、どの2数から計算してもよい。

< 足し算 >

既習事項を例として足し算=加法と説明している。

< (正の数) + (負の数) >

数直線を用いて考えるように表記している。

その後の問題でも、「数直線を用いて和を求めなさい」と表記されている。

< 正・負の数の加法の説明 >

同符号の2数の和と異符号の2数の和について符号と絶対値の観点からの説明が記載されている。

< 交換・結合法則 >

正・負の数の加法においても交換・結合法則が成り立つことが記載されている。


減法

ひき算 $(+5)-(+2)$ は $(+5)+(-2)$ と加法に直すことができる。

ひき算のことを **減法** という。減法の結果が差である。

加法に直す
 $(+5)-(+2)=(+5)+(-2)$
 ひく数の符号が変わる

+2をひくことは-2をたすことと同じだね。



正の数、負の数の減法について、次のことがいえる。

正の数、負の数の減法

減法は、ひく数の符号を変えて、
 $(+2)-(+3)=(+2)+(-3)$
 加法に直してから計算する。
 $(+2)-(-3)=(+2)+(+3)$

< 減法 >

既習事項を用いてひき算=減法と説明している。

また、減法は加法に直すことができることも説明している。

< 正・負の数の減法の説明 >

減法については、ひく数の符号を変えて加法に直し計算することを数直線を用いて説明している。

3.指導案

【問題】 次の計算をしなさい。

① $(+4.32) - (+11.9)$

② $(+4.32) - (-11.9)$

【支援】① $(+11) - (+4)$ という問いを、数直線を用いて解いてみよう。

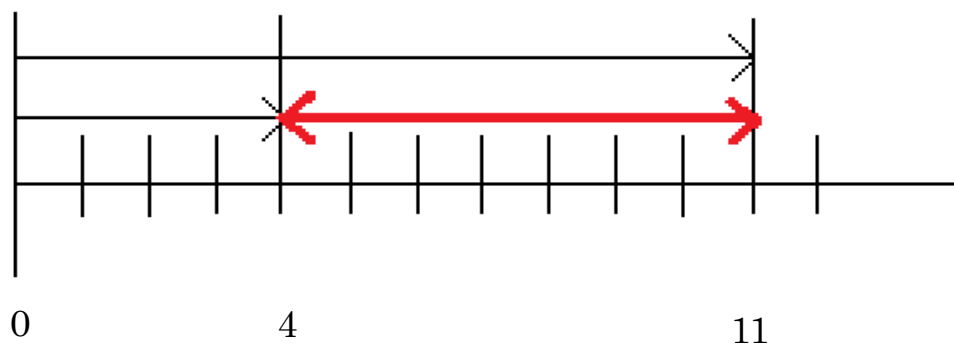
【自力解決 A】 数直線を用いて①を解く。

① $(+11) - (+4)$

《予想される解き方1》



《予想される解き方2》 (教師の望む解き方)



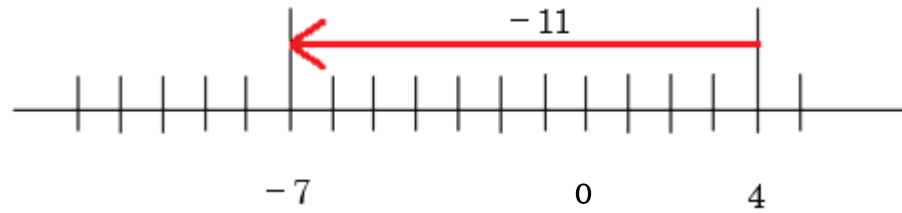
【支援】①、②の式を簡潔化し、数直線を用いて解いてみよう。

【特別な支援1】絶対値に着目してみよう

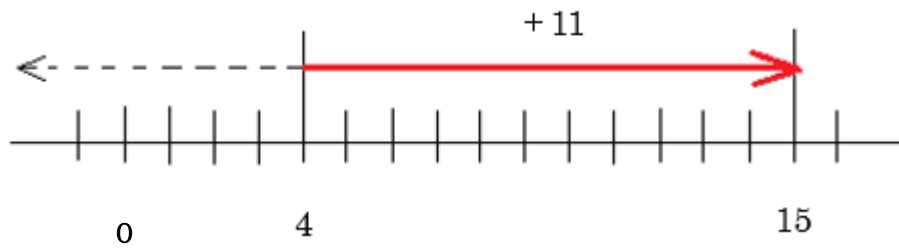
【特別な支援2】数の差に着目してみよう

★【自力解決 B①】 用具的理解で数直線を用いて解く。

① $(+4) - (+11)$



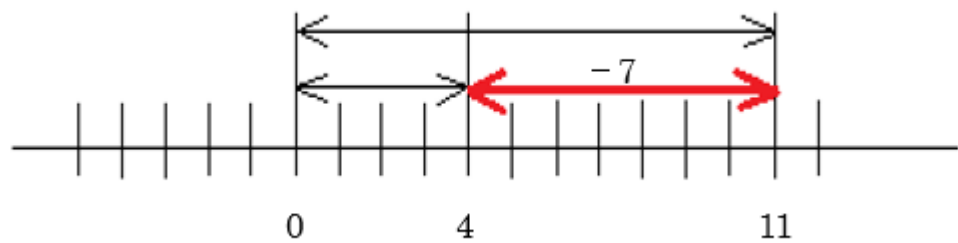
② $(+4) - (-11)$



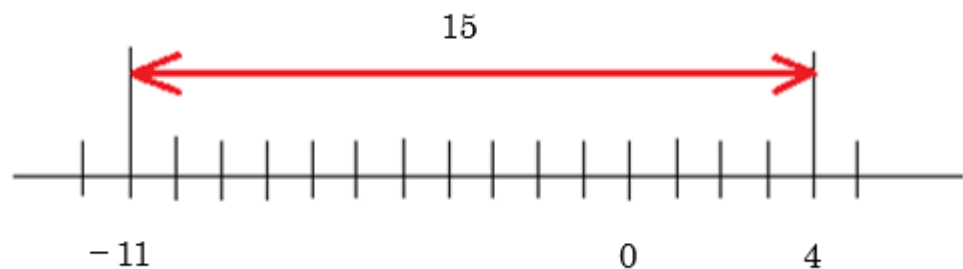
【支援】絶対値や数の差に着目して数直線を書いてみよう。

★【自力解決 B②】 絶対値や数の差に着目して数直線を用いて解く。

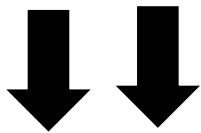
① $(+4) - (+11)$



② $(+4) - (-11)$

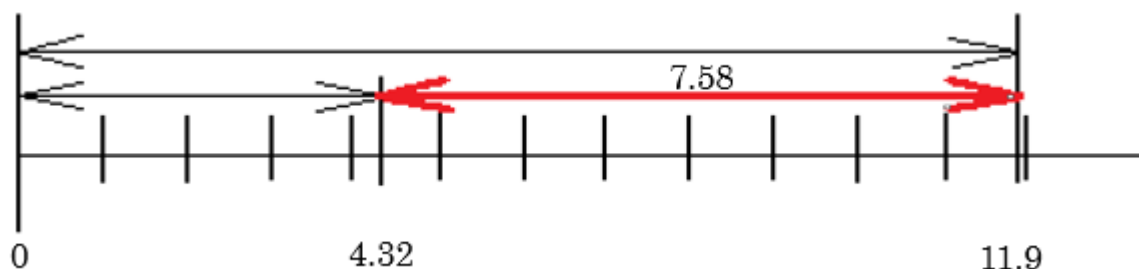


【支援】最初に提示した問題を解いてみよう。

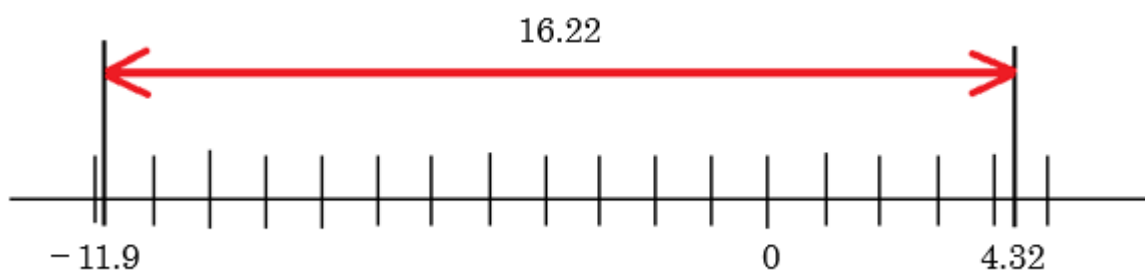


【自力解決 C】 実際に、小数を含む①、②の問いを、数直線を用いて解いてみる。

① $(+4.32) - (+11.9)$



② $(+4.32) - (-11.9)$



【練り上げ】 (★が達成された時点で行う。)

※予め、活動 A、B②を行っている生徒を指名し、板書させておく。

※問題①の解答を確認。その後、活動 A を説明させ、数直線を用いた考え方を共有しておく。

※ 1 $(+4.32) - (+11.9) = | +4.32 | - | +11.9 | = 4.32 - 11.9 = -7.58$

※ 2 $(+4.32) - (-11.9) = 4.32 + 11.9 = 16.22$

説明後、※ 1 ※ 2 (活動 B②の問題①②の回答)の式をどのように数直線に表したか、問うことで値の差を考えた数直線の使い方であることを確認する。

時間配分	シナリオ
～15分	(S1が黒板に①の数直線と答えを書く。) T:「どんな数直線になりましたか?説明してください。」 S:「 $(+11) - (+4)$ は11と4の差を求める式なので、このような(予想される解き方2)数直線になりました。この数直線から $(+11) - (+4) = 7$ であることがわかりました。」
～20分	T:「そうですね。引き算は、引かれる数と引く数の差を求めることでしたね。では、①'、②'の式を数直線で表すとどうなるでしょうか。①の考え方を基に考えてみてください。」
～30分	(S2、S3が黒板に①'、②'の数直線と答えを書く。)
～35分	T:「では、どんな数直線になりましたか?説明してください。まずS2さんから」 S2:「 $(+4) - (+11)$ は①と同じで4と11の差を求める式です。しかし、①と違ってこの式は、4が引かれる数、11が引く数です。そのため、答えはマイナスになることがわかります。よって数直線は①と同じですが、 $(+4) - (+11) = -7$ 」 S3:「 $(+4) - (-11)$ は4と-11の差を求める式です。絶対値に注目して $ +4 = 4$ 、 $ -11 = 11$ より②'の式の数直線はこのようになり、 $(+4) - (-11) = 15$ であることがわかりました。」
～45分	T:「そうですね。では、この考え方をういて①、②を解いてみましょう。」 (①、②は教師が書くまたは次回にまわす)
～50分	

<板書計画>



感想

今回、正の数・負の数の減法について数直線を考えたが、考えれば考えるほどいかに自分が形式的な覚え方をしている、教えることが難しいのかを痛感した。実際に教えるために指導要領や歴史や教科書を調べたが、少ない範囲でも違いが非常に多く、課題を再認識された。まだまだ改善の余地があると考えるため、これからも精進していきたい。

吉川 奈佑

中学の数学の基礎となる正の数・負の数をテーマにして、学習指導要領・各教科書を調べることで、これまでの講義と違って専門性の高い講義に取り組むことができた。自分自身が理解していることでも、指導案を作るために問題を考え、生徒に期待する活動とそれに対する支援を考えること、それをどのように説明するかは難しいことだと感じた。これから教育実習で授業を行うことになるが、この講義で学んだことをしっかり活かしていけるように日ごろから数学に関することに注意を払っていくようにしたい。

坂本 諒

今回は、中学以降の数学を学習する上で、最も基礎の単元にあたる正の数・負の数をテーマにして、指導案を作成した。最終的な目標はこの指導案を完成させることにあったが、この目標を達成するために国立教育研究所のデータベースインデックス (<https://www.nier.go.jp/guideline/>) で今までの学習指導要領を調べたり、その調べた学習指導要領がどのように教科書に反映されているのかを確認するため教科書センターへ赴いて教科書を閲覧してみたりした。情報量が多かったこともあり、正直なところ、情報集めとそれらをまとめる作業にはとても苦労したが、正の数・負の数を学習していく上での数直線の適切な使い方を説明した、よい指導案が完成できたと思う。

この講義では、生徒の数学に対する理解を高めるような授業展開を考える力が身についたと感じた。ただ、当然私はまだまだ未熟であり、今回の指導案も今後改善していく必要が出てくると考えられる。3回生に上がると実際に学校へ赴き授業等をおこなう教育実習が始まるだろう。その際には、本講義で学んだことが活かしていくことが行くことができればと思う。

山本 匠悟