

平成26年度

数学学習指導設計

J4

今田有咲

小林舞実

村上友里花

目次

- 1 単元と設定理由 P. 1
- 2 中学校指導要領の目標、内容(図形) P.2
- 3 証明の変遷 P. 3
数学のあけぼのを読んで
- 4 テーマ設定と問題設定 P. 6
 - 第一回
 - 第二回
 - 第三回
- 5 指導案完成 P. 16
- 6 引用・参考文献 P.19
- 7 感想 P. 1 9

1 単元と設定理由

○単元：平行と合同

○理由

- ・第2学年の本単元では、図形の基本的な性質について、平行線の性質や三角形の合同条件などを基にして考えることにより、既習の図形の性質や新たな図形の性質についての理解を深めることができるため。
- ・これから学ぶ図形問題や証明問題にもつながる単元であり、基礎を身につけさせておく必要があるため。
- ・筋道を立てて考えたり、基本性質を使って自分の考えを論理的に示したりすることを通して、数学的な見方や考え方を養うことができるため。
- ・本単元により、自分の考えを正確に、かつ簡潔でわかりやすく表現できる能力を養うことができる。

2 中学校学習指導要領

1 目標

- (2) 図形の相似，円周角と中心角の関係や三平方の定理について，観察，操作や実験などの活動を通して理解し，それらを図形の性質の考察や計量に用いる能力を伸ばすとともに，図形について見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす。

2 内容

B 図形

- (1) 図形の性質を三角形の相似条件などを基にして確かめ，論理的に考察し表現する能力を伸ばし，相似な図形の性質を用いて考察することができるようにする。
- ア 平面図形の相似の意味及び三角形の相似条件について理解すること。
- イ 三角形の相似条件などを基にして図形の基本的な性質を論理的に確かめること。
- ウ 平行線と線分の比についての性質を見だし，それらを確認すること。
- エ 基本的な立体の相似の意味と，相似な図形の相似比と面積比及び体積比の関係について理解すること。
- オ 相似な図形の性質を具体的な場面で活用すること。

3 証明の変遷

『数学のあけぼの』 A.K.サポー 著

『数学史の一章として最も魅力的でありながら、今日までほとんど世に知られていないものの一つに、太古の実際的・経験的知識で数学的性質をもつものが、定義と公理に基づく体系的、演繹的な学問に変貌していった時期のことがある。明らかに、演繹的数学は、実際的手段のみによって得られる知識が、もはや心理とは認められなくなる時に生まれる。そして高度の理論的考察は、実際的手段が確実に立証していると思われることに対してすら要求される。』

『演繹的数学の発展に関する解釈の内、主であった三つのタイプとして、第一にA・N・コルモゴロフの説、第二にファン・デル・ワルデンの説、第三にK・フォン・フリッツの説がある。これらの考え方は、どのどれかが他の二者の後だてになっているわけではないが、互いに排反しあうものではない。ただ、問題はそれらの説明がすべて抽象的な一般論の範囲にとどまっていた、具体性に欠けているところにある。』

●序章

太古の実際的、経験的知識で高い水準の数学的性質をもつもの
↓変貌
定義と公理に基づく体系的、演繹的な学問

演繹的数学

→実際的手段のみによって得られる知識が
もはや真理とは認められなくなるときに生まれる。

●歴史研究の考察：演繹的学問の経過

第一の説 A・N・コルモゴロフ
第二の説 ファン・デル・ワルデン
第三の説 K・フォン・フリッツ
↓
抽象的な一般論にすぎない。

I 第I部

●数学的証明の発展・証明性の概念の発展

・数学的証明としての具象化

初期のギリシアでの証明技術は、幾何学においても数論においても、元来、単純な具象化であったと思われる。

・古代科学の反図解的・反経験的傾向

ギリシアの学問には、ただの図解的な証拠以上のものを要求するという傾向があるが、これは前五世紀に生じたものである。この傾向のもつ反図解的性格は、偶数・奇数に関するいくつかの定理の証明(ユークリッドの中に残されているもの)から明らかにされる。それらの証明の中では数は線分によって表現されているが、この図解法によると、古い表現法(小石の勘定)ならば簡単に読み取れた偶奇の別は示されない。この反図解的傾向の生じた理由、ならびに、そのこととギリシアの演繹的学問の発展との関連という問題は、今までのところまだ答えられていない。

・間接証明はどこで始まったか。

数学的間接証明の形式は、数学者の所産ではなく、またこれを初めて用いたのも数学者ではなく、むしろ南イタリアのピタゴラス学派が、前五世紀の初め頃やはりその地に住んでいたエレン学派の哲学者から、それを既存のものとして引き継いだものと思われる。

I 第2部

・プロクロスが手をつけずに残した唯一の問題

数学の全体がそのような無証明の前提のみに立脚せねばならぬ

→数学の歴史的展開の中で、いかに見いだされたか

・われわれにはピタゴラス学派で用いられた間接照明(初期ギリシアの演繹的数学で不可欠だった方法)が、エレア哲学まで遡るものであることが分かっている。

× 間接照明の方法は数学者が実地にあたって工夫したもの。
彼らによって後日エレア派の哲学者に伝えられたもの。

○ 演繹的数学の最初の代表者たちがエレア派の哲学系から間接証明を学んだのである。

・「最も古い数学的原理」は定義であった。演繹的学問としての数学の基礎づけは、歴史の展開の中では定義を定式化することによって始まったものと思われる。

●『数学のあけぼの』から学んだこと

ユークリッドの第8公理の「全体は部分より大なり」について考える。「全体は部分より大なり」という主張が当たり前のことであり、こんな単純な「真理」を公理に立てることがなぜ必要だったかは、誰しも尋ねたくなることである。そこでこの本では、このような当たり前のことがなぜ定式化されたのかについて、逆理のような逆説的推論を用いて、この公理に反論する思想家が何人か現れたため、と書かれている。

このように、『数学のあけぼの』を読んで、「全体は部分より大なり」といったような当たり前のことを、当たり前だと考えるのではなく、追求していくところに数学の本質があるのではないかと考えた。公理に反論するたくさんの意見をくつがえすような条件を集めて、誰もが納得するような真理に近づけようとするのが、数学の証明で必要とされることだと感じた。また、不確かなことを確信に変えることは容易ではないが、どんな不確かなことにも、根底にあるのは当たり前のことを見直すことから始まっていて、それらの過程が数学にとっては大事で、公理に反論する人を説得づけるうえで大切なものになってくることがわかった。これらのことから、私たちはこれから証明について探究していこうと考える。

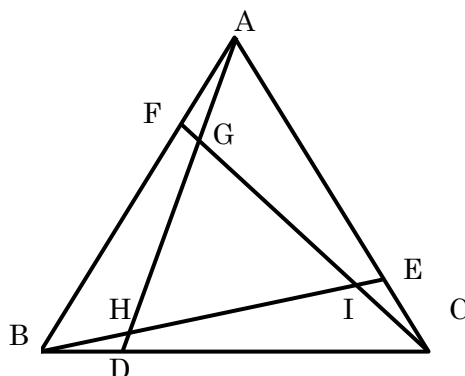
4 テーマ設定と問題設定

【テーマ設定】

証明の有用性に気づかせる

【問題設定】

三角形 ABC で、辺 BC、CA、AB に、それぞれ、点 D、E、F をとり、 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ となるようにします。このとき、直線 AD、BE、CF で囲まれた三角形はどんな三角形ですか。



【設定理由】

ただ証明するのではなく、図形を見つけるという証明の目的がみえる問題になっているため。

【この問題で身につけさせたい力、学ばせたいこと】

- ・ 図形から条件を見つける力
- ・ 与えられた力を活かす力
- ・ 証明の結果から命題を導く力

【授業でどのようにするか】

- ・ 不確かなことを確信に変えることによって必要性に気づかせる。
- ・ 図形の論証力を伸ばすには、証明をつくること(書くこと)だけでなく、証明を振り返ること(読むこと)も大切だと考えられる。
- ・ 証明を振り返ることで、その仕組みをとらえ直すことができ、証明の進め方の全体的な把握もできるようにする。

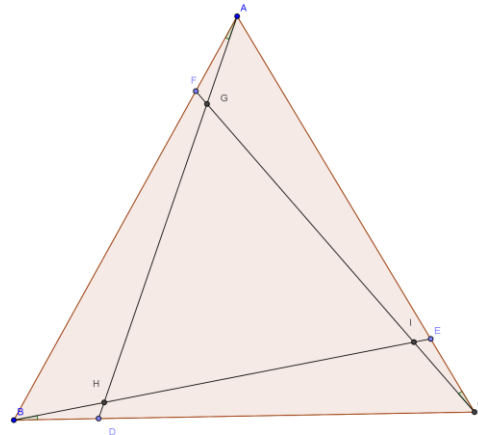
【有用性に気づかせるためになにをしたいか】

- ・ 友達が利用した図を見て証明方法を予想したり、ひとつの証明を複数の生徒に説明したり、既習事項をもとに考えるよさを感じ取ったりことを通して、子どもが自分の証明をよりよいものに修正していく活動が特に有効であると考えられる。
- ・ 復習としてさせるのではなく、掃除条件の学習場面でこの問題を考えさせることで、興味を引き付ける。

【第一回】

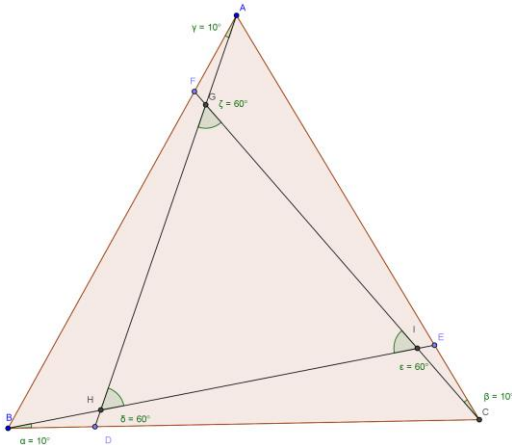
〈問題設定〉

三角形 ABC で、辺 BC、CA、AB に、それぞれ、点 D、E、F をとり、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ となるようにします。
 このとき、直線 AD、BE、CF で囲まれた三角形はどんな三角形ですか。



〈活動 A〉 具体的な度数を書き込む。

A1 : 度数を変えていく。

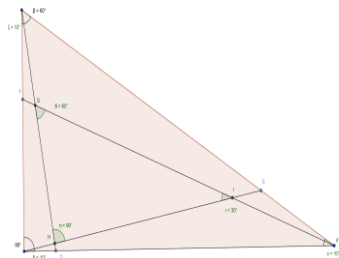
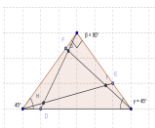


正三角形 ABC とし、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF = 10^\circ$ と考えると、
 三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE = 10^\circ + 50^\circ$

A2 : 三角形を変えていく。

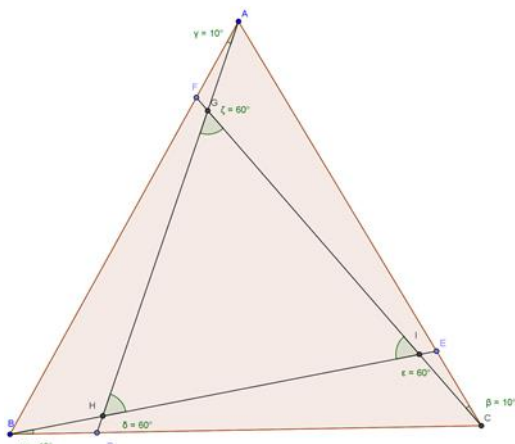
$\angle BAC = 90^\circ$ の二等辺三角形

$\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形



三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$

〈活動 B〉 任意の三角形を考える。



三角形 ABC において、
仮定より、 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$
三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$
よって、
 $\angle DGC = \angle BAC$
 $\angle BIF = \angle ACB$
 $\angle AHE = \angle ABC$
である。
したがって、2組の角がそれぞれ等しいため、
三角形 $ABC \sim GHI$ となる。

〈活動 C〉

四角形や五角形・・・

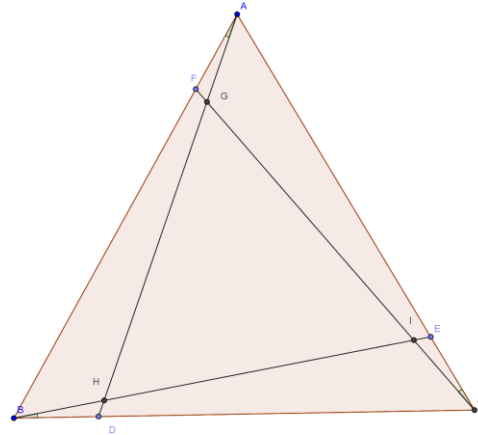
【反省】

- ・活動 A1、A2 は同じ支援でできるのか？
→A2 を活動 B にする。
- ・「具体的な」ということばは不適切。
→特定の三角形について角度を設定して考える。

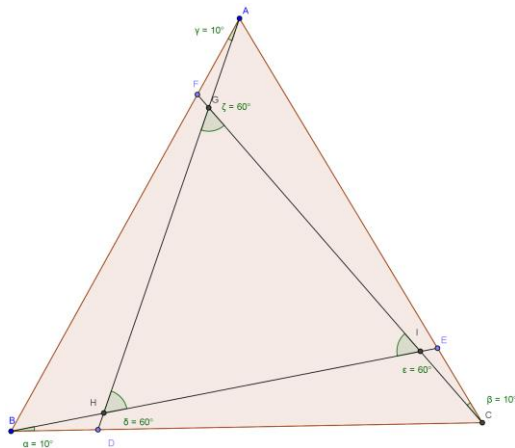
【第二回】

〈問題設定〉

三角形 ABC で、辺 BC、CA、AB に、それぞれ、点 D、E、F をとり、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ となるようにします。
 このとき、直線 AD、BE、CF で囲まれた三角形はどんな三角形ですか。



〈活動 A〉 特定の三角形について角度の設定を考える。

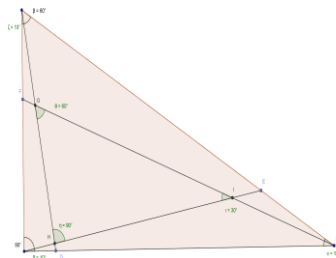
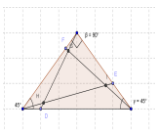


正三角形 ABC とし、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF = 10^\circ$ と考えると、
 三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE = 10^\circ + 50^\circ$

〈活動 B〉 特殊な三角形で考える。

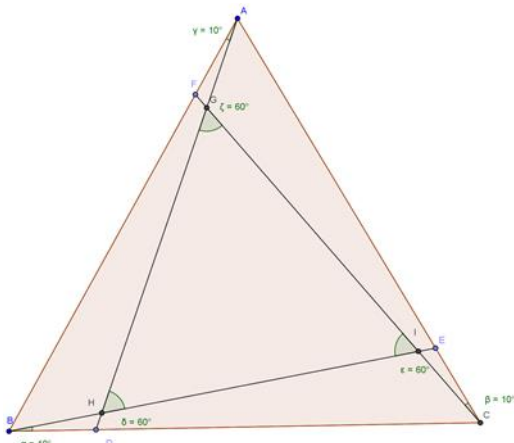
$\angle BAC = 90^\circ$ の二等辺三角形

$\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形



三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$

〈活動 C〉 任意の三角形で考える。



三角形 ABC において、
 仮定より、 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$
 三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$
 よって、
 $\angle DGC = \angle BAC$
 $\angle BIF = \angle ACB$
 $\angle AHE = \angle ABC$
 である。
 したがって、2組の角がそれぞれ等しいため、
 三角形 $ABC \sim GHI$ となる。

〈活動 N〉

四角形や五角形・・・

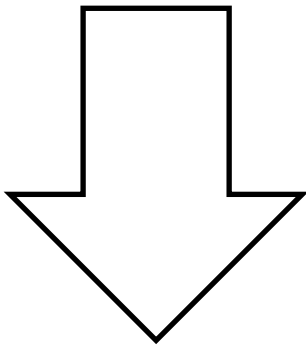
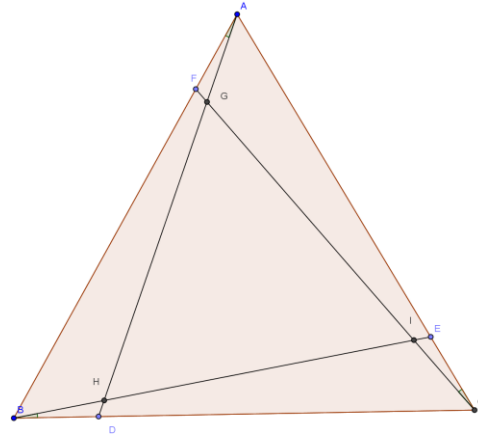
【反省】

- ・活動はこれでよいため、支援について考えていく。

【第三回】

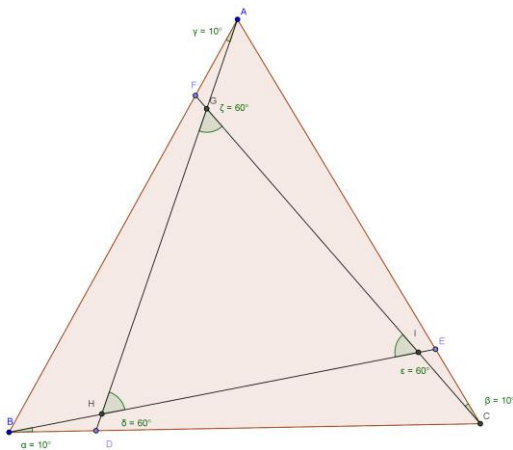
〈問題設定〉

三角形 ABC で、辺 BC、CA、AB に、
それぞれ、点 D、E、F をとり、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ となるようにします。
このとき、直線 AD、BE、CF で囲まれた
三角形はどんな三角形ですか。

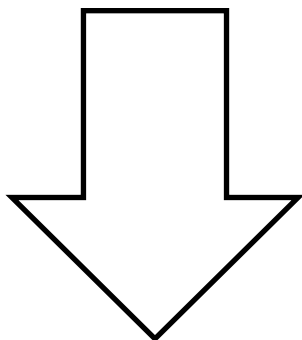


活動 A への支援
より一般的な支援
→角度を設定してみよう。

〈活動 A〉 特定の三角形について角度の設定を考える。



正三角形 ABC とし、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF = 10^\circ$ と考えると、
三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE = 10^\circ + 50^\circ$

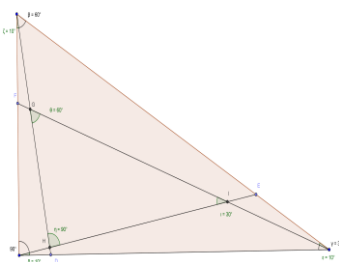
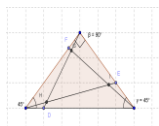


活動 B への支援
より一般的な支援
→他の三角形でも考えてみよう。
より特殊な支援
→二等辺三角形や直角三角形で考えてみよう。

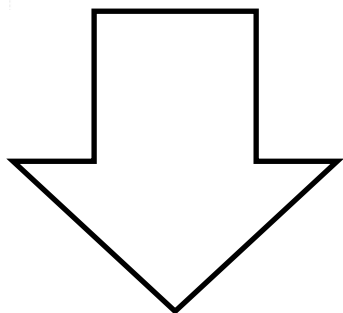
〈活動 B〉 特殊な三角形で考える。

$\angle BAC=90^\circ$ の二等辺三角形

$\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形

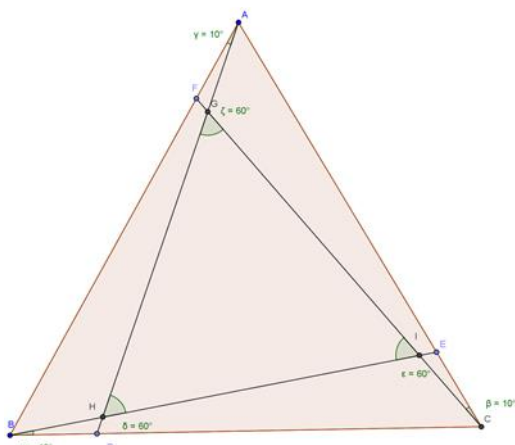


三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$

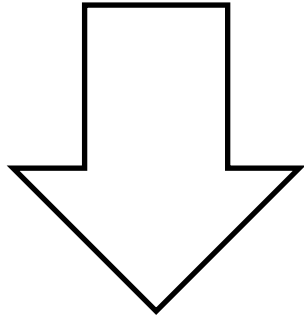


活動 C への支援
 より一般的な支援
 →相似条件が使えないか。
 より特殊な支援
 →三角形の外角の和の性質を用いて証明
 してみよう。

〈活動 C〉 任意の三角形で考える。



三角形 ABC において、
 仮定より、 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$
 三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$
 よって、
 $\angle DGC = \angle BAC$
 $\angle BIF = \angle ACB$
 $\angle AHE = \angle ABC$
 である。
 したがって、2組の角がそれぞれ等しいため、
 三角形 $ABC \sim GHI$ となる。



さらなる活動への支援
→多角形でも同じように考えられるか。

〈活動 N〉

四角形や五角形・・・

【反省】

- ・活動 A への支援において、より一般的な支援ではなくより特殊な支援を考える。
- ・活動 B への支援において、なぜ他の三角形でも考えるのかという、次の活動の価値を示さしているといい。
- ・活動 C への支援において、より一般的な支援とより特殊な支援は対応していないといけない。子どもは別のものとして考えてしまう。

●導入部分

指導内容	時間	学習活動・学習内容	指導上の留意点
		<p>T「今日の授業は、三角形の証明について考えましょう。」</p> <p>三角形 ABC で、辺 BC、CA、AB に、それぞれ、点 D、E、F をとり、$\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ となるようにします。このとき、直線 AD、BE、CF で囲まれた三角形はどんな三角形ですか。</p> <p>T「まずは、$\triangle ABC$ を正三角形として考えてみましょう。正三角形にはどんな性質がありますか。」</p> <p>S「すべての角が等しい。」 「すべての辺が等しい。」 「60 度になる。」</p> <p>T「では、それらの性質を使って、$\angle BAD$ に具体的な角度を設定してみましょう。」</p> <p>T「どうになりましたか？」</p> <p>S1「10 度に設定しました。中の三角形は正三角形になるかも…。」</p> <p>S2「私は 20 度で設定したけど、中の三角形は正三角形になると思います。」</p> <p>T「なんでそうなったの？」</p> <p>S1「外角の性質を使ったら、$\triangle GHI$ のそれぞれの角が 60 度になるよ。」</p> <p>T「そうですね。ではもう少し深く考えてみましょう。」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・問題提起をする。 ・黒板に図を貼る。

●練り上げ

T: それでは、今までのことから、三角形 GHI はどんな三角形になるでしょう？
(答えがでるまで聞く)

S: 相似になります。

T: どの三角形と？

S: 三角形 ABC と相似になります。

T: そうだね、ではなぜ相似の三角形になると思いますか？

S: 具体的な角度を設定すると同じ角度の三角形 ABC と三角形 GHI になりました。

T: そうですね。他にはありませんか？

S1: 二等辺三角形や直角三角形でも同じことになりました。

S2: そして、最後の証明からどんなパターンでも見つけられることがわかりました。

T: そうですね。

【反省】

- ・「そうですね」という言葉かけはいい。
- ・「そうですね」とならないからこそ練り上げが必要である。
- ・自力解決のときの支援が、発問につながるようにする。
- ・「できた人に発表してもらいます。」はいい発言ではない。
- ・活動 B から活動 C への支援が大事。

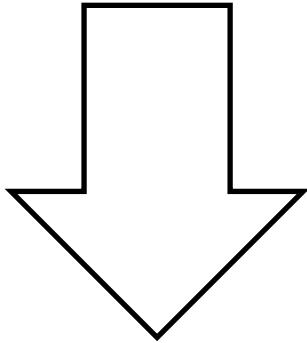
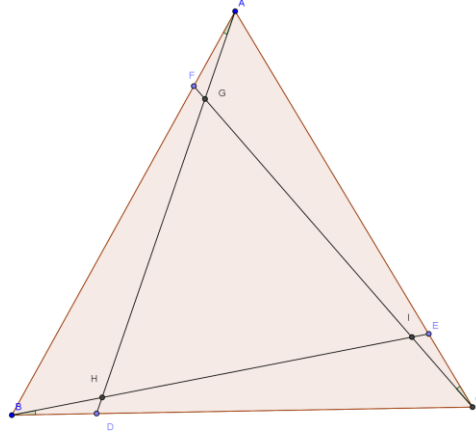
5 指導案(完成)

○本時のねらい

ただ証明するのではなく、図形を見つけるという証明の目的が見える問題を考えることで証明の有用性に気づかせる。

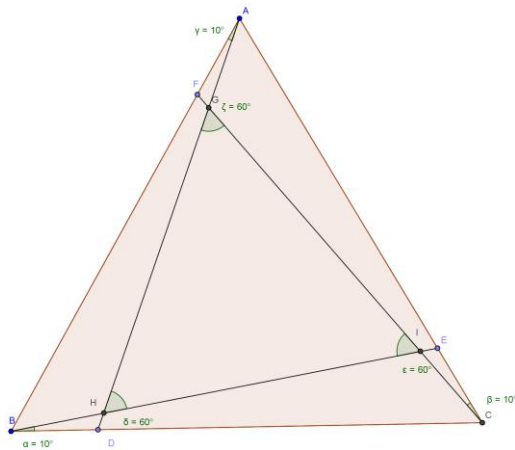
○問題設定

三角形 ABC で、辺 BC、CA、AB に、それぞれ、点 D、E、F をとり、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ となるようにします。
 このとき、直線 AD、BE、CF で囲まれた三角形はどんな三角形ですか。

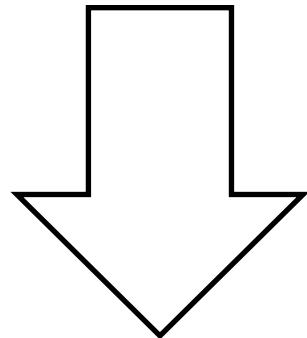


活動 A への支援
 より特殊な支援
 →角度を設定してみよう。

〈活動 A〉 特定の三角形について角度の設定を考える。



正三角形 ABC とし、
 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF = 10^\circ$ と考えると、
 三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD = 10^\circ + 50^\circ$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE = 10^\circ + 50^\circ$

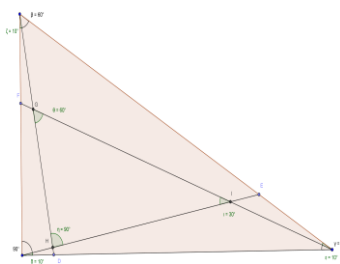
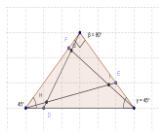


活動 B への支援
 より一般的な支援
 →他の三角形でもうまくいくかな。
 より特殊な支援
 →二等辺三角形や直角三角形で考えてみよう。

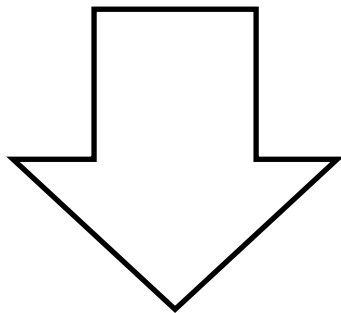
〈活動 B〉 特殊な三角形で考える。

$\angle BAC=90^\circ$ の二等辺三角形

$\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形

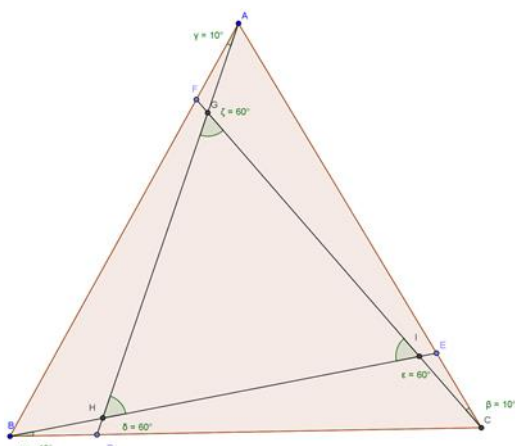


三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$

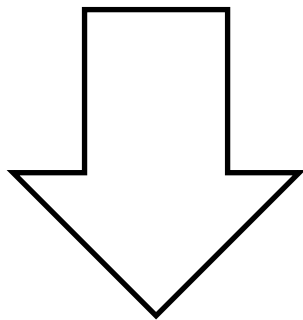


活動 C への支援
 より一般的な支援
 →どんな性質が使えるかな。
 より特殊な支援
 →三角形の外角の和の性質を用いて証明してみよう。

〈活動 C〉 任意の三角形で考える。



三角形 ABC において、
 仮定より、 $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$
 三角形の外角の性質より、
 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$
 $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$
 $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$
 よって、
 $\angle DGC = \angle BAC$
 $\angle BIF = \angle ACB$
 $\angle AHE = \angle ABC$
 である。
 したがって、2組の角がそれぞれ等しいため、
 三角形 $ABC \sim GHI$ となる。



さらなる活動への支援
 →多角形でも同じように考えられるか。

〈活動 N〉

四角形や五角形・・・

○期待する授業の展開

教師(T)と生徒(S)の発言	上記の流れの位置	時間
<p>T「では次は、任意の三角形で考えてみましょう。今までのことを踏まえて、どのような性質を使えばいいか考え、証明してみましょう。」</p>	<p>活動 C への支援 (より一般)</p>	<p>20分</p>
<p>T「今までの活動を通して、三角形 GHI についてどんなことに気が付きましたか。」</p> <p>S4「三角形 ABC と同じ形になります。」</p> <p>S5「相似になります。」</p> <p>T「ではこれを証明するためには、どの相似条件を使いますか。」</p> <p>S6「三組の角がすべて等しいという相似条件を使うことができます。」</p> <p>T「この相似条件を成立させるには、どの性質を使えばいいですか。」</p> <p>S7「三角形の外角の性質です。」</p>	<p>活動 C への支援 (より特殊)</p> <p>活動 C</p>	<p>30分</p>
<p>T「どんな証明になりましたか？ S4 さん説明してください。」 (S8 を前にだし、証明を書かせる。)</p> <p>S8「三角形 ABC において、 仮定より、$\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$ 三角形の外角の性質より、 $\angle BIF = \angle CBE + \angle BCF$ $\angle CGD = \angle ACF + \angle CAD$ $\angle AHE = \angle BAD + \angle ABE$ よって、 $\angle DGC = \angle BAC$ $\angle BIF = \angle ACB$ $\angle AHE = \angle ABC$ です。 したがって、2 組の角がそれぞれ等しいため、 三角形 ABC の GHI となります。」</p>		<p>35分</p>
<p>T「このように三角形の相似条件を見つけ、証明することができましたね。三角形だけでなく多角形でも同じようになるのでしょうか。また考えてみてください。」</p>		<p>45分</p>

6 引用・参考文献

A.K.サボー『数学のあけぼの』

7 感想

今田有咲

今回この授業を通して、指導案を作るために必要な様々な考え方や研究の仕方を学ぶことができた。ただ教科書通りに授業をするのではなく、児童に何を学ばせたいか、そのためにどんな工夫をすればよいかをしっかりと考えなければならないと思った。また、誘導的に教えるのではなく、あくまで児童中心の授業にするための支援が大切だと感じた。特に苦労した練り上げの部分では、スムーズに進む授業展開しか考えられなかったことが反省である。今回学んだことをこれから先も活かしていきたいと思う。

小林舞実

一つの指導案を、多くの時間をかけて作るのは初めてで、非常に良い経験になった。ただ教えるだけでなく自分自身もその教材について深く追求していくことで、わかっているようでわかっていたことなども浮き彫りになってきて、教材研究の重要性を実感した。証明を何のためにするのか、教える側が理解することによって、生徒に証明の有用性を気づかせる授業へとつながっていくと思った。また、一方的な授業にならないように、自力解決の時間を設けることに重点を置いて考えたが、教師の発言や発問は自力解決へと導く上で非常に重要で、それを考えることに苦労した。この授業で学んだことを今後に活かしていきたい。

村上友里花

今回の数学学習指導設計を通して、ひとつの授業に対して何時間も時間をかけて考えることの大切さを学んだ。ただ時間をかけて考えるだけでは意味がなくて、生徒が「どうしてこのようになるの？」や「どうしてこうするのか？」などの疑問を予想しながら授業構成を組んでいくことの難しさを感じた。特に自力解決の時間を大切にして、活動Bから活動Cに向かうところの部分の流れや練り上げを試行錯誤しながら考えた。また、昨年の夏に教育実習を経験して、小学生に算数を教えた。そのときは指導案の時点では時間の流れや授業をよく練って挑んだが、児童の反応予想をちゃんと考えきれていなかったため、結局、時間内に伝えたい内容をしっかりと教えきることのできない結果となってしまった。今回の相似の授業指導案では生徒の反応予想を考える前に、自分だったらどんなところに疑問を持つか、自分が中学生だったときのことを思い出したりしながら考えた。考えても考えきれないほど、今田さんと小林さんと三人で考えていると数学に対しての気持ちも強くなり、半年の期間ではあるが充実した時間になった。これらの経験を忘れることなく、今年度の教育実習に生かしていきたいと考える。