数学学習指導設計 I

中学校第二学年

単元名「図形と合同（四角形）」

テーマ：体系化に基づく創造･発展の考え方の育成

工学部応用数理工学科

J2　岡本　栞奈

小田　大元

久野真由美

堀田　優希

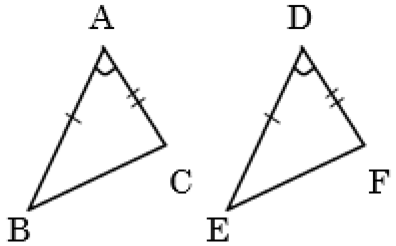
目次

1. 目標

三角形のそれぞれの合同条件をうまく利用させて、証明の考え方を育成する。
そして、その考え方を身につけて発展につなげる。

2. 三角形の合同条件の証明(１)

二辺とその間の角がそれぞれ等しい

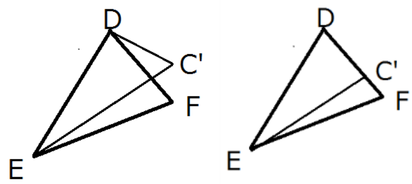


△ABC と△DEF において、
AB=DE、AC＝DF、∠A＝∠D
ならば
△ABC≡△DEF　　である。

[証明]

仮定により AB=DE であるから、

定理 14 △ABC と△DEF において AB=DE ならば、直線 DE に関して F と同じ側にある点C′を合同式　△DEC′≡△ABC　が成り立つように定めることができる。



この定理 14 により、直線 DE に関して F と同じ側にある点C′を

$$\triangle DEC' \equiv \triangle ABC$$

となるように定める。このとき点C′が F と一致することを証明すればよい。
まず、仮定により∠A＝∠D であるから

$$\angle EDC' = \angle A = \angle EDF$$

ゆえに、

定理 11　直線 OA の同じ側に点 B と点 C をとったとき∠AOB=∠AOC ならば、半直線 OC と半直線 OB は一致する。

この定理 11 により、半直線 DC′と半直線 DF は一致する。
すなわちC′は半直線 DF 上にある。
次に、仮定により AC=DF であるから

$$DC'=AC=DF$$

ゆえに、

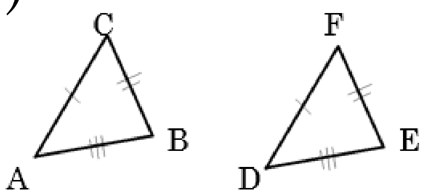
> 定理 10
> 半直線 OA 上に O と異なる点 C をとったとき、OC=OA ならば C は A と一致する。

この定理 10 により、C'は F と一致する。

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

以上より二辺とその夾角がそれぞれ等しければ二つの三角形は合同である。

3. 三角形の合同条件の証明(２)



三辺がそれぞれ等しい

△ABC と△DEF において

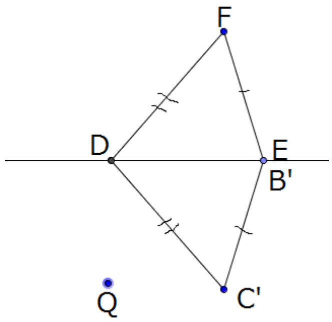
AB=DE,BC=EF,CA=FD ならば△ABC≡△DEF　である。

[証明]

直線 DE に関して F の反対側に点 Q をとり、△ABC と三点 DEQ に

> 公理 5
> △ABC と一直線上にない任意の三点 O,P,Q に対して、半直線 OP 上の点 B′と直線 OP に関して Q と同じ側にある点 C′ を合同式
> $$\triangle OB'C' = \triangle ABC$$
> が成り立つように定めることができる。

この公理 5 を適用して、半直線 DE 上の点 B′ と直線 DE に関して Q と同じ側にある点 C′ を



$$\triangle DB'C' \equiv \triangle ABC$$

となるように定める。そうすれば

$$DB' = AB = DE$$

であるから、B'と E は一致し、したがって上の合同式は

(1)　　　$\triangle DEC' \equiv \triangle ABC$

となる。ゆえに

$\triangle DEC' \equiv \triangle DEF$

であることを証明すればよい。過程により CA=FD、（１）により$C'D = CA$であるから$C'D = FD$、同様に$C'E = FE$ である。ゆえに、二辺夾角の合同定理によ

り、△DEC′ ≡ △DEF を証明するには

(2) $\angle \mathrm{DC'E} = \angle \mathrm{DFE}$

であることをいえばよい。

直線 DE に関して Q と F は反対側に、C′と Q は同じ側にあるから、C′と F は反対側にある。すなわち、線分 FC′は直線 DE と交わる。その交点を P とすれば、P は （ⅰ）D と E の間にあるか、（ⅱ）線分 DE の延長線上にあるか、または（ⅲ）D,E のいずれかと一致する。

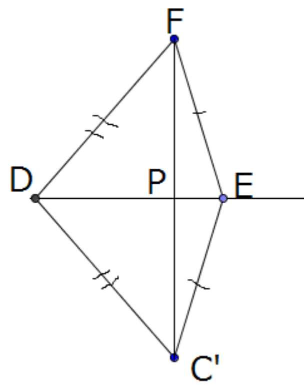
P が D と一致しないとき、$\mathrm{C'D} = \mathrm{FD}$であるから△DC′F は二等辺三角形であるから、

(3) $\angle \mathrm{DC'F} = \angle \mathrm{DFC'}$

である。P と E が一致しないときには、△EC′F が二等辺三角形であるから、

(4) $\angle \mathrm{EC'F} = \angle \mathrm{EFC'}$

（ⅰ） P が D と E の間にある場合、



定理４ ∠AOB が平角でないとき、半直線 OC が線分 AB と A と B の間の一点で交わるならば、点 C は ∠AOB の内部にある。

この定理４により、点 F は$\angle \mathrm{DC'E}$の内部にあり、

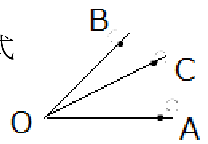
点C′は∠DFE の内部にある。したがって、

公理４

点 C が∠AOB の内部にあるとき、等式

∠AOB＝∠AOC+∠COB

が成り立つ。



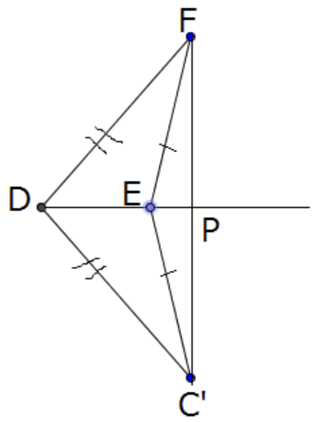
この公理４より、

$$\angle \mathrm{DC'E} = \angle \mathrm{DC'F} + \angle \mathrm{EC'F},$$

$$\angle \mathrm{DFE} = \angle \mathrm{DFC'} + \angle \mathrm{EFC'}$$

ゆえに、等式(3)と(4)を右辺と左辺をそれぞれ加えれば等式(2)を得る。

(ⅱ) P が線分 DE の延長上にある場合、E が D と P の間にあるか、D が E と P の間にあるか、のいずれかであるが、いずれの場合も同様であるから、E が D と P の間にあるとする。そうすれば、E は$\angle \mathrm{DC'F}$ の内部にあることになるから、



$$\angle \mathrm{DC'F} = \angle \mathrm{DC'E} + \angle \mathrm{EC'F},$$

したがって

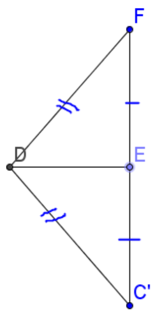
$$\angle \mathrm{DC'E} = \angle \mathrm{DC'F} - \angle \mathrm{EC'F}$$

同様に

$$\angle \mathrm{DFE} = \angle \mathrm{DFC'} - \angle \mathrm{EFC'}$$

ゆえに等式(3)から(4)を右辺と左辺をそれぞれ引けば等式(2)を得る。

(ⅲ)　P が E または D と一致する場合に等式(2)が成り立つことは$\triangle \mathrm{DFC'}$が二等辺三角形であることからあきらかである。



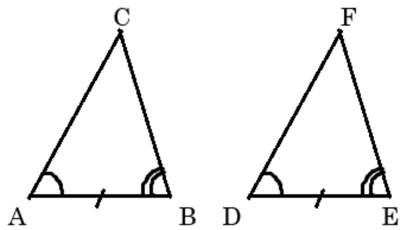
(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)より

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{DEF}$$

以上より、三辺がそれぞれ等しければ二つの三角形は合同である。

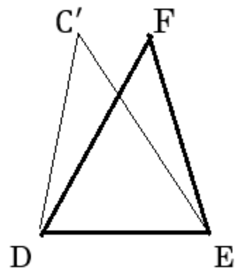
4.　三角形の合同条件の証明(３)

一辺とその両端の角がそれぞれ等しい



△ABC と△DEF において
AB=DE,∠A=∠D,∠B=∠E ならば
△ABC≡△DEF　　である。

[証明]



AB=DE であるから、定理 14 (3 ページ参照)により、直線 DE に関して F と同じ側に点C′をとって

$$\triangle DEC' \equiv \triangle ABC$$

となるようにする。仮定により∠A=∠D であるから、

$$\angle EDC' = \angle A = \angle EDF$$

となる。ゆえに、定理 11 (3 ページ参照)より、半直線DC′と半直線 DF は一致する。同様に半直線EC′と半直線 EF は一致する。ゆえに△DEC′と△DEF は一致する。

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

以上のことから一辺とその両端の角がそれぞれ等しいと二つの三角形は合同である。

引用・参考文献

『幾何のおもしろさ』　数学入門シリーズ 7　 著者 小平邦彦　　岩波書店

5.　単元の設定理由

中学校第二学年単元「四角形」

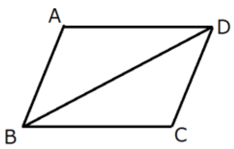
私達は当初、三角形の合同条件の証明することを目的としていましたが、自分達で実際に合同条件を証明した結果、中学生の授業でそれをすることは、少し難しいのではないかと考えました。だから、三角形の合同条件を用いた証明をしようと思いました。そこで三角形の合同の次の単元である四角形で応用することにしました。

6.　具体的な内容

「平行四辺形の性質」

平行四辺形に対角線を一本引いたときにできる三角形の合同を証明しようとすると、すべての合同条件を用いて証明でき、尚且つ、平行四辺形の性質を学ぶことができるから、この内容にしました。

7.　問題作成

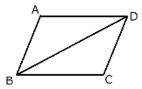


平行四辺形 ABCD に対角線 BD をひく。
△ABD≡△CDB を証明しなさい。

この問題で証明しようとすると、３つの合同条件のどれを使っても証明できる。また、これから平行四辺形の性質も確認することができるので選んだ。

8.　指導案(仮)①

生徒の対応を考えてみる。



△ABD≡△CDB の証明

①　二角相等

（ⅰ)∠ABD=∠CDB(錯角),∠ADB＝∠CBD(錯角),BD は共通

（ⅱ)∠ABD＝∠CDB(錯角),∠BAD=∠DCB(向かい合う角),AB=CD(向かい合う辺)

(ⅲ)∠BDA=∠DBC(錯角),∠BAD＝∠DCB(向かい合う角),AD=CB(向かい合う辺)

②　二辺相等

(ⅰ)AB=CD(向かい合う辺),AD=CB(向かい合う辺),∠BAD＝∠DCB(向かい合う角)

(ⅱ)AB=CD(向かい合う辺),BD=DB(共辺),∠ABD＝∠CDB(錯角)

(ⅲ)AD=CB(向かい合う辺),BD=DB(共辺),∠ADB＝∠CDB(錯角)

③　三辺相等

AB=CD, AD=CB, BD=DB

パターンとしては①～③に分かれると思われる。

難しいと思われる点

- BD=DB が気づきにくい
- 平行四辺形について覚えているか(対辺と対角が等しいということ)
- 三辺相等が気づきにくい

これらの予想される生徒の対応を元に授業を作っていきたい。

指摘された点

活動 A,B,C で書く

9.　指導案(仮)②

指導案(仮)①を指摘されたところを直す。

最終目標：　△ABD≡△CDB を証明

活動 A　平行四辺形 ABCD において等しい辺や角、平行な辺を見つける。
(平行四辺形の性質の確認)

↓

活動 B　△ABD≡△CDB の証明
(条件 1 つ使用)

↓

活動 C　他の条件を使う。

指摘された点

一般と特殊にわけて支援を考える。

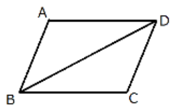
支援はシナリオで書く。

10. 指導案(仮)③

指導案(仮)②で指摘されたところを直す。

問題

△ABD≡△CDB の証明



活動 A

平行四辺形 ABCD において等しい辺や角、平行な辺を見つける。

支援

平行四辺形の性質について教える。

例:「向かい合う辺の長さが等しくて平行ですね。」

活動 B

△ABD≡△CDB の証明　(合同条件の 1 つを使って)

支援

一般的

使う条件を教える。

例:「∠ABD=∠CDB,∠ADB＝∠CBD,BD を使ってみよう。」

特殊

一般的な支援に加え、使う合同条件も教える。

例:「一辺とその両端の角が等しいが使えそうですね。」

活動 C

活動 B で使っていない条件を使って証明

一般的

「活動 B で使っていない活動 A で見つけたものを使って
証明してみよう。」

特殊

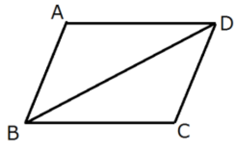
「全部で 7 つの証明の仕方があります、やれるだけやって
みましょう。」

指摘された点

B への支援で書いたところを A への支援だと言われた。
(支援がずれていた)
B から C への支援が次は他の条件を使って見ようでいいと
思うと言われた。
特殊と一般を分けるのは難しいから 1 つにしてみよう。

11. 指導案(仮)④

指導案(仮)③で指摘されたところを直す。



平行四辺形 ABCD において
△ABD≡△CDB を証明しなさい。

期待する活動 A
平行四辺形 ABCD において等しい辺や角、平行な辺を見つける。

活動 B への支援
どの合同条件を使うか明確にさせる。

期待する活動 B
△ABD≡△CDB の証明 （合同条件の１つを使って）

活動 C への支援
他の合同条件を使ってみよう。

活動 C
活動 B でつかっていない条件を使って証明

シナリオ

時間	学習活動･学習内容
	T「今日は平行四辺形を三角形の合同条件の証明の点から見ていきたいと思います。」 問題を提示する T「まず平行四辺形 ABCD から△ABD と△CDB について等しい辺や角を見つけてみましょう」 T「見つけたものを発表しましょう」 S「AB と CD がいっしょです」 T「なぜそれがわかったんですか？」 S「平行四辺形の向かい合う辺は等しいからです」 S「∠ABD と∠CDB が同じです」 T「どうしてですか？」 S「錯角で等しいです」
１５分 くらい	T「それでは今言った条件を使って証明してみましょう」

３０分くらい ３５分	(証明が終わった子がちらほらいるなら) T「できた人は自分が使っていないほかの合同条件で証明できないか考えてみましょう」 (できていない子がいたら支援する) (全員活動 B 終了) T「自分で考えた証明を発表してもらいましょう」 「まずは S1 くん、S２さん、S3 くん前に出て書いてください」 (書き終わる) (i)　合同条件が３つでたとき S1「はい、私は二辺とその間の角が等しいを使いました」 S2「私は一辺とその両端の角が等しいをつかいました」 S3「僕は三辺が等しいで証明しました」 T「そうですね」 (ⅱ)　でなかったとき S1「はい、私は二辺とその間の角が等しいを使いました」 S2「私は一辺とその両端の角が等しいをつかいました」 S3「僕も S1 くんと同じで二辺とその間の角が等しいで証明しました」 T「これは三辺が等しいでも証明することができます。 (説明する)」

	T「この証明から言えることは証明ができるということだけでなく 平行四辺形の性質をいうことができます。」 T「みなさんが証明に使ったもののなかにあります どれだと思いますか？」 S４「向かい合う辺がひとしいことかな？」 S５「辺が平行なことかな？」 T「辺が平行なことは定義です 教科書を開いて確認してみましょう」 (確認させる) T「次回は対角線がそれぞれの中点で交わる性質を確認しましょう」 （次回から本格的に平行四辺形の性質に入っていく）

指摘された点

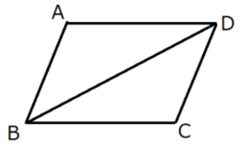
C への支援にもう一言ほしい(何でそれをさせたいかわかるように)

活動はもっと具体的に、生徒がノートに書くことも書く

12. 指導案(完成版)

指導案(仮)④で指摘されたところを直し指導案が完成した。

問題



平行四辺形 ABCD において
対角線 BD をひく。
△ABD≡△CDB を証明しなさい。

時間	シナリオ
3 分	T「今日は平行四辺形を三角形の合同条件の証明の点から見ていきたいと思います。」 問題を提示する T「まず平行四辺形 ABCD から△ABD と△CDB について等しい辺や角を見つけてみましょう」

期待する活動 A
平行四辺形 ABCD において等しい辺や角、平行な辺を見つける。
例: AB=CD,AD=BC,BD=BD
∠BAD=∠BCD,∠CBD=∠ADB,∠ABD=∠CDB

活動 B への支援
どの合同条件を使うか明確にさせる。
「二辺とその間の角を使って証明してみよう。」

期待する活動 B

△ABD≡△CDB の証明　(合同条件の 1 つを使って)

例:

平行四辺形の向かいあう辺が等しいので

　AB=CD　…①

　AD=CB　…②

平行四辺形の向かいあう角が等しいので

　∠BAD=∠DCB　…③

よって①②③から二辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ABD≡△CDB

活動 C への支援

「他の合同条件を使ってみよう。

　他の等しい辺や角をつかってみよう。」

期待する活動 C

活動 B でつかっていない条件を使って証明

例:

共通な辺で

BD=BD　…①

錯角は等しいので

∠ABD=∠CDB　…②

∠ADB=∠CBD　…③

よって①②③から一辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ABD≡△CDB

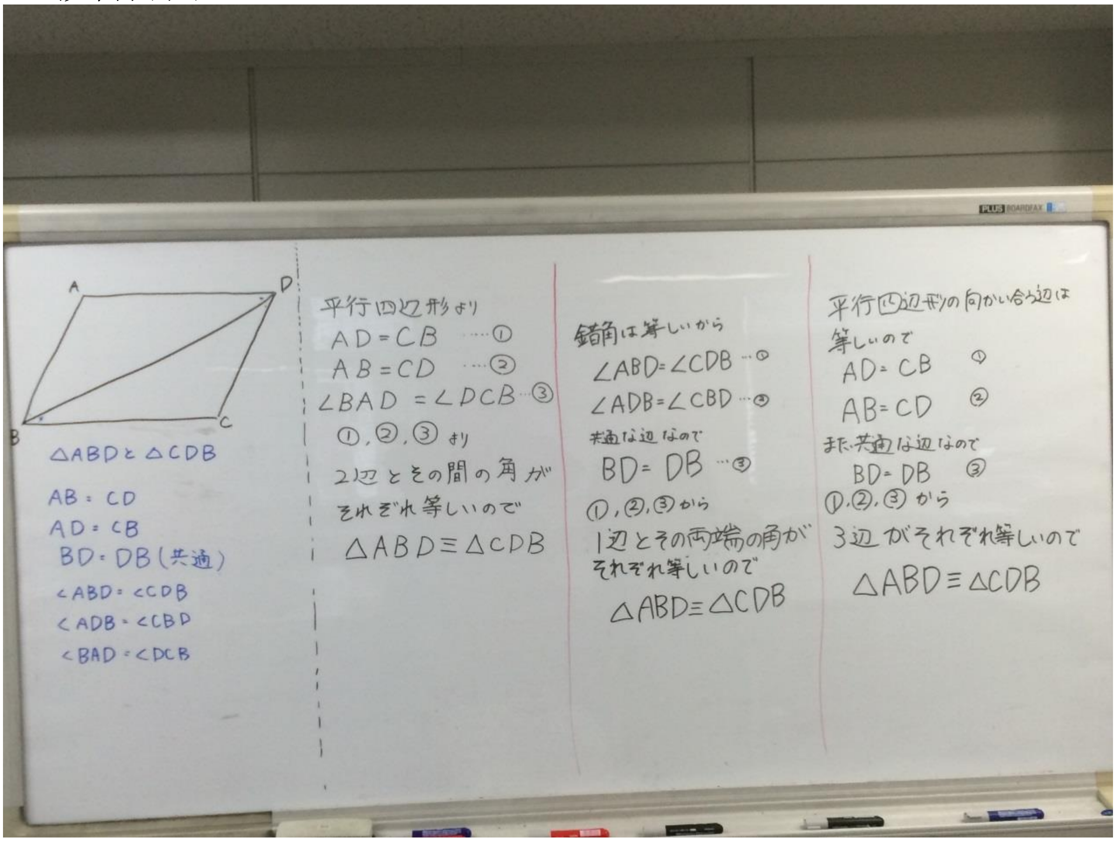
13. 授業展開

時間	シナリオ
	T「今日は平行四辺形を三角形の合同条件の証明の点から見ていきたいと思います。」 問題を提示する
3 分	T「まず平行四辺形 ABCD から△ABD と△CDB について等しい辺や角を見つけてみましょう」
10 分	T「見つけたものを発表しましょう」 S「AB と CD がいっしょです」 T「なぜそれがわかったんですか？」 S「平行四辺形の向かい合う辺は等しいからです」 S「∠ABD と∠CDB が同じです」 T「どうしてですか？」 S「錯角で等しいです」 T「それでは今言った条件を使って証明してみましょう」 ・ ・ ・ (証明が終わった子がちらほらいるなら) T「できた人は自分が使っていないほかの合同条件で証明できないか考えてみましょう」 (できていない子がいたら支援する)

	(全員活動 B 終了)
30 分	T「自分で考えた証明を発表してもらいましょう」 「まずは S1 くん、S２さん、S3 くん前に出て書いてください」
35 分	(書き終わる) (ii)　　合同条件が３つでたとき S1「はい、私は二辺とその間の角が等しいを使いました」 S2「私は一辺とその両端の角が等しいをつかいました」 S3「僕は三辺が等しいで証明しました」 T「そうですね」 (ⅱ)　でなかったとき S1「はい、私は二辺とその間の角が等しいを使いました」 S2「私は一辺とその両端の角が等しいをつかいました」 S3「僕も S1 くんと同じで二辺とその間の角が等しいで証明しました」 T「これは三辺が等しいでも証明することができます。 (説明する)」 T「この証明から言えることは証明ができるということだけでなく 平行四辺形の性質をいうことができます。」 T「みなさんが証明に使ったもののなかにあります

	どれだと思いますか？」 S４「向かい合う辺がひとしいことかな？」 S５「辺が平行なことかな？」 T「辺が平行なことは定義です 教科書を開いて確認してみましょう」 (確認させる) T「次回は対角線がそれぞれの中点で交わる性質を確認しましょう」 （次回から本格的に平行四辺形の性質に入っていく）

板書計画



14. 感想

当初は、三角形の合同条件を授業で証明するというのが目標でした。しかし、自分たちで合同条件について学び、証明してみた結果、中学生には難しすぎるという結論に至りました。ムダなことをしたなとそのときは思いましたが、今となれば自分が将来教師になるにあたって貴重な知識の 1 つになったと思います。

また、今回一番印象に残っていることは、「当たり前のことを当たり前として考えない」ということです。これは証明するにあたってとても大切なことである上に、1 人の教師として大切なことであると思います。教師にとっては当たり前のことかもしれないが、初めてそれに触れる生徒にとっては当たり前ではないからです。この授業を通して、教えるという難しさを改めて痛感することができました。

岡本 栞奈

この授業を通して学んだことは、教師の一方的な説明だけでは授業が成り立たないということだ。しっかり生徒一人一人が自分の知識から次の問題を解けるように授業を組み立てることが必要だと感じることができた。もし、私が当時このような問題でこのような授業展開で受けていたら、自分で考える力は今より確実にあったと思う。また教えられる側から教える側に変わったのだということもこの授業を受けるにつれて思うようになった。教える側では感覚は通用しないから、しっかりとした理由や根拠が必要なので今の私にはまだまだ勉強が必要だと改めて感じることができた。この授業で学んだことを忘れずに教師になったときやっていきたいと思う。

小田 大元

私のこの授業をやってよかったなと思えたのは三角形の合同条件の証明をやれたことです。時間をかけた分、理解が深まりました。結果的には単元は違うところになりましたがいい問題が作れたと思います。三角形の合同条件の証明は自分が教員になったときにわかりやすく教えられたらいいなと思います。
また、私はこの授業ではじめて指導案というものを作りました。4 人で作ってもとても時間がかかるものを、今後 1 人でできるのかが不安になりました。しかし、指導案というものがよくわかっていない最初のころから比べたらかなり成長できたと思います。生徒への支援や、板書計画など多くのことを考えました。この授業で学んだことを生かして今後につなげたいとおもいます。

久野 真由美

生徒に数学を実際に指導するにあたって、まず自分が数学を理解しなければいけないと思った。図形の証明を今まで難しく考えていなかったが、調べれば調べるほど難しくなっていき、時々わからなくなって嫌になることがあったが、グループワークの話し合いの中で教えあい、理解できたと思う。理解できればできるほど楽しくなり、生徒を指導する目標であったが、自分の楽しみが大きくなった。
グループの皆さんに頼りすぎた所があったが、この様な今までに履修したことのない講義を受けることができて、いい経験になりこれからも役立てていけると思う。

堀田 優希