

数学学習指導設計Ⅰ

「正負の数」

～数直線を用いた正負の数の乗法指導～

川田 雅訓

堀田 直希

山崎 耕佑

目次

正負の数の歴史について	p.3
単元設定の理由	p.5
指導案作成までの流れ	p.6
指導案	p.8
期待する授業例、および練り上げ	p.13
編集後記	p.22

* 正負の数の歴史について

負の数は中学校に生徒が上がり初めて習う、また、いままでに扱ったことのない内容である。そのため正負の数を学習していく上で、生徒は多くの困難を生じるのは目に見えたことであり、私達が想像していないようなところでつまづくことも予想される。そのため正負の数の歴史について学ぶということは、生徒に正負の数についての興味を与えるだけでなく、かつて正負の数について関わってきた先人達がどのような困難を生じたかを知ることにより、生徒も同様な困難を生じる場合があることを事前に知り、授業を計画することができる。

まず古代人の数についての捉え方について考えていく。例えば食べ物を分けるとき、1人1人に1つずつ配っていた。このときには“数”は存在しなかったといわれている。その後石などを用いて、石1つを“1”と考えるようになった。これが“数”の起源であり、集計数の概念の誕生である。物の数を数えるときに1,2と直接考えるのではなく、石などを用いて数え、石が10個たまると大きな石に置き換えたりしていた。現代における10進法の先駆けである。その他にも、例えば古代シュメール人やバビロニア人は60を1かたまりと考えたり（60進法）、古代マヤ人は20進法を用いていた。

次に“0”という数について扱っていく。“0”という数は、最初は存在せず、登場すると数の一つとして理解するのに時間がかかった。この理由については後にも記すが、「～がない」というのは理解できても「ないもの」を書き表す必要性があるのか、という問題が生じた。その一例として古代のエジプトでは、“0”の存在は知られてはいたが、発見はされなかった。

ここで数についての登場についてふれてきたが、ここからは負の数についての歴史を取り上げていくことにする。負の数は自然数にマイナスをつけたもの、0より小さい数として扱われてきた。中国では紀元前100世紀ごろ、数学書「九章算術」のなかで扱われているのが確認できる。またインドでは7世紀ごろ、正の数が“財産”、負の数が“借金”という形で取り扱われているのが確認できる。最初、負の数は実世界で見つけられないため、“無意味な数”としてみられてきた。

負の数について関わってきた人物を数人紹介していきたい。ディオファントス(~330)は、「“引かれる数”と“引かれる数”の積は、“加えられる数”である。」と述べたが、彼は負数の概念を欠いていた。(例えば $2x-10$ を考えた時に、 $2x<10$ となる場合は全て避けていた)。アル・フワリズミ(780?~850?)は著書“アルジャブル・ワルムカブラ”の中で、2次方程式を扱う上で負の根が存在することを知っていたといわれている。しかし当時、負の数が数学の世界でも認められていなかったために、それが用いられることはなかった。ヴィエト(1540~1603)の時代でも、負の数は方程式の根として認められていなかった。このころになると実用上の問題に対して方程式が立てられていたのだが、それに対しては正の根しか意味をもつものとして扱われなかった。そしてガルダノ(1501~1576)は著作“偉大なる術(アル

ス・マグナ)”の中で、3次方程式の解を解くうえで虚数を解くことにより、複素数を認めざるをえなかった。

ここでギリシア数学について少し着目してみる。パスカル(1623~1662)は「私は0から4を引くと0であることを分からぬ人はいない。」と述べているように、名を残した数学者でも負の数を理解するということは難しいことであった。しかしデカルト(1596~1650)が数や量を線分の長さに対応させる理論を広め、その後ニュートン(1642~1727)が同種の量の比という形で実数を定義するに至ったため、その後数は数直線上の点と同一視され、負の数が「与えられた方向と反対の方向をあらわすもの」という形で、数直線上に定義されるようになった。ここから負の数についての完全な解釈が始まる。

ギリシア世界ではどうしてここまで負の数について、解釈に困難を生じたのか。ギリシア世界では数は物の個数(基数)として捉われてきた。従って負数や実数の概念がなかったために、これらを数の概念に含めることは困難であった。また、個数を基本にしているので、演算を合理的に説明するのも困難が生じた。

ここまで述べてきたが、17世紀になるまで、なぜ数の概念を広げ、負数を広げることが困難だったか。それは数学者にとって、“負数を視覚的あるいは幾何学的表示を思いつくまでに、「仮想的な数」や、シュティフェルの言葉を借りれば、「不条理な数」として彼らに映じた”からであった。

参考文献：

・現代数学の流れ I

上野 健爾, 砂田 利一, 深谷 賢治, 神保 道夫著

・“カジョリ初等数学史”

小倉金之助 補訳

・ <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1625-01.pdf>

“数概念について” 早稲田大学理工学術院 足立恒雄 pdf

* 単元設定の理由

正負の数は中等教育の数学で行う初めての単元であり、そしてそれは高等教育、さらには大学で学ぶうえでの基礎の基礎となる単元である。それだけではなく、例えば気温などのように、現代では負の数は私達の身の周りに深く関わってきている。しかし“負”という概念は中学生になる生徒達にとっては未知の領域であり、それこそ概念からしっかり教えていかなければならない。

今回正負の数の乗数を扱っている理由として、加法、減法は他に取り扱っている例があるため、そして除法は乗法を学び、そこから得た知識で理解することができるためである。

除法につながるということ、そして生徒にとって視覚的に情報がまとめられるという2つの意味で、今回生徒に乗法を教えるために用いたのが、数直線による指導である。これは生徒が正の数の乗法を学んだときに既に学習した内容であり、これを用いることによって、生徒が負の数の乗法に関しても理解しやすいのではないかと考えた。

(正の数) \times (正の数)=(負の数)となるのは分かっているが、(負の数) \times (負の数)=(正の数)、また(正の数) \times (負の数)=(負の数)となるのは、生徒にとっても理解しがたいことであり、そもそも“マイナス”という言葉はまだ学習して間もない時期に乗法を学習するのであれば、生徒が混乱しやすいのは目に見えていることである。だからこそしっかりと乗法の意味から指導していかなければならない。

* 指導案作成までの流れ

<第1回>

内容：問題設定、教科書比較(正負の数の乗法に関する部分)

扱っていく問題を正負の数の乗法について理解に関する問題を取り扱っていかうと考えていた。問題に関しては、

「東西にのびる道を、Bさんは西へ向かって秒速3mで走っていて、いま、地点Oを通過しました。いまから3秒後と2秒前にBさんはOからみてどの地点にいるのでしょうか。」

という問題。(下図参照)



図：問題に対する数直線

このような問題を扱おうとした理由は、様々な教科書を比較した際、正負の数の乗法についてほとんどの教科書がこのような問題を扱っていたためである。しかし、これでは本当に分かりやすいのか、そして基礎を学ぼうと、これから扱うであろう除法やその他様々な問題を理解できるか不安に思うため、違う問題に設定していくことになった。

<第2回>

内容：問題設定(変更1回目)

問題を以下のように設定した。

- ・ $(-2) \times (+3)$
- ・ $(+2) \times (-3)$
- ・ $(-2) \times (-3)$

このような通常の演算を扱うことで、生徒に同数累加としての乗法の関係ではなく、正負の除法や比例関係につながる乗法の理解につながるのではないかと考えた。しかし、これでは正負の数の乗法を扱うことがはじめての生徒に対し、乗法の表記、特に負の数に関する表記そのものに困難を感じるのではないかと、様々な困難が予想されたため、より実用的な問題から正負の数の乗法を扱っていくことにした。

<第3回>

内容：問題設定(変更2回目)

問題を以下のように設定した。

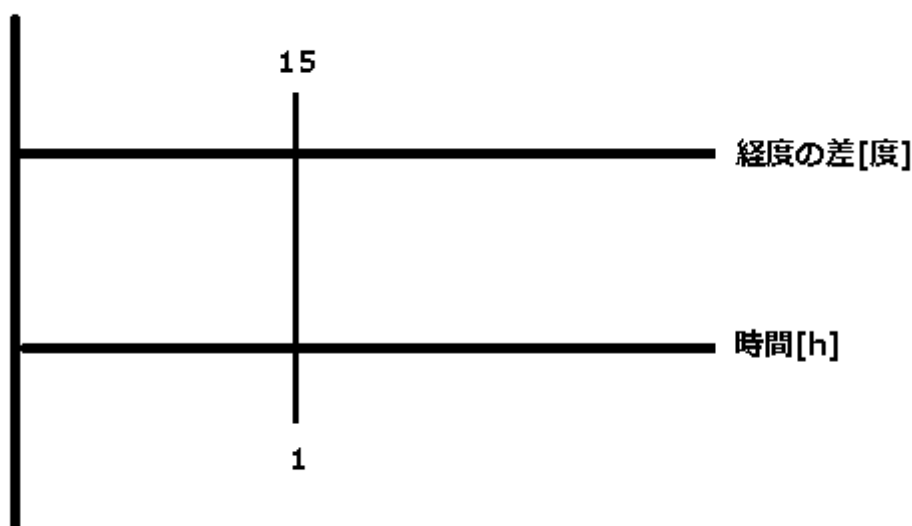
日本の経度は東経 135° である。日本と海外との時差は経度が 15° ずれるごとに1時間ずれる。例えば日本と中国の時差は、中国が東経 120° であるために、日本が正午のときに中国は午前11時と1時間早い。これは、

$$(\text{目的となる位置の経度}) 120^\circ - (\text{日本の経度}) 135^\circ = -15^\circ$$

となるため、1時間早くなる。

→これを用いて様々な問題を解かせる。

※時間が早いのを(-)と表現し、時間が遅いのを(+)と表現させるようにする。



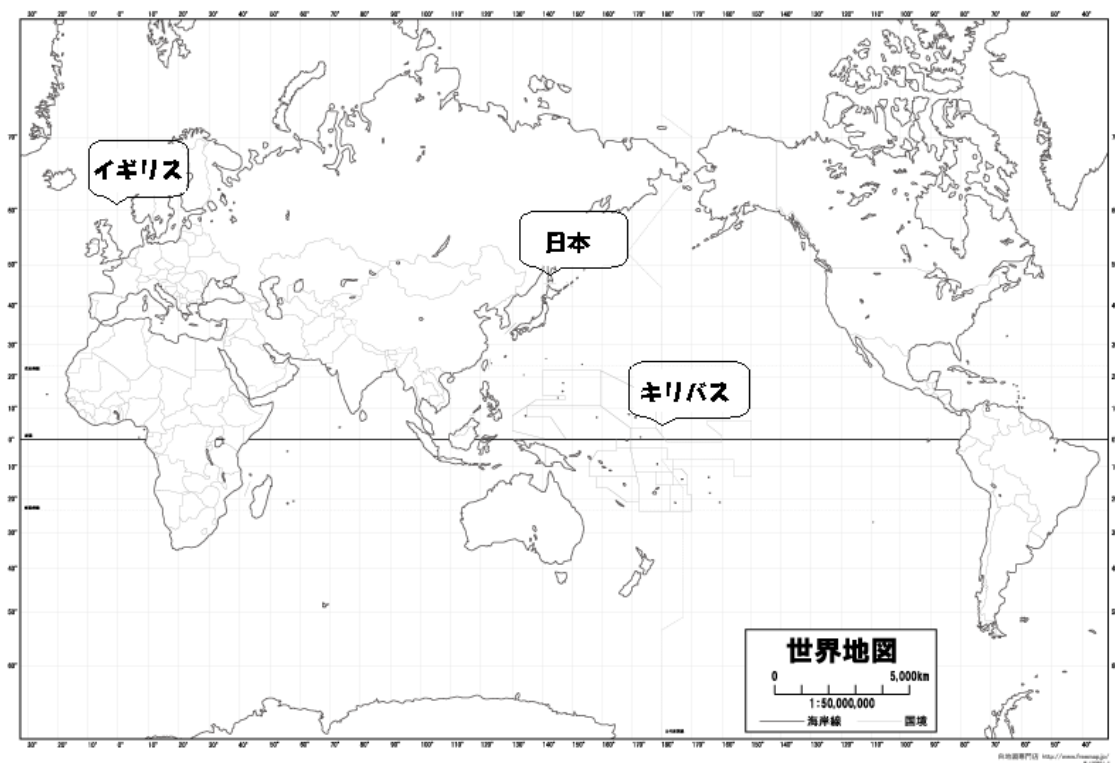
これを参考に以下のような問題設定とし、指導案を作成していくことにした。

* 指導案

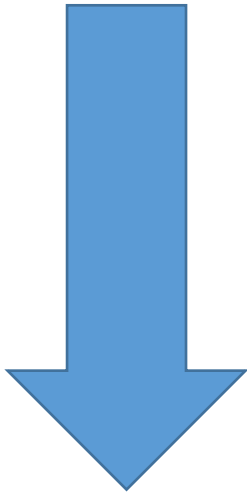
<問題設定>

日本(東経 135°)からみてイギリス(0°)の時差を求めよ。ただし時間が早いものを+、時間が遅いものを-として表現せよ。

例えば日本からみてキリバス(180°)の時差は(+3時間)と表現できる。



図：世界地図の例



<活動 A への支援>

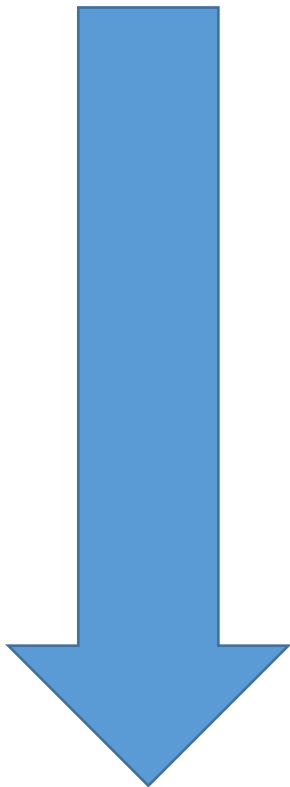
経度差と生じる時差が比例関係であることのヒントを出し、問題文の日本とキリバスの経度差と時差の関係から、1 時間分の時差が生じる経度差を考えさせる。

(式)

$$(180 - 135) \div 3 = 15 [^\circ]$$

<期待する活動 A>

時差が 1 時間生じるのに、経度差が 15° であることに気づく。



<活動 A→活動 B への支援>

・一般的な支援

地図を見せ、日本から見てキリバスとイギリスが東西逆であることのヒントを出し、負の数の表記に気づかせる。

・特殊な支援

身近な場所（例えば中国、東経 120° 地点）を提案し、負の数の表記に気づかせる。

(例)

中国との時差は

$$(式) (135 - 120) \div 15 = 1 [時間]$$

である。また、中国は日本より時間が遅れていることから、日本からみて中国との時差は、 (-1) 時間、と表記することができる。

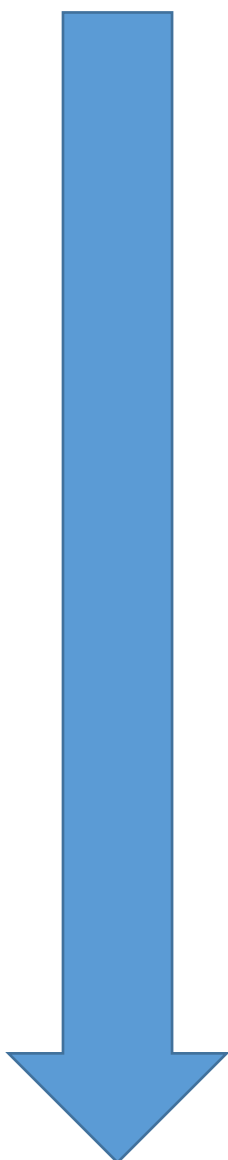
<期待する活動 B>

日本からみてイギリスとの時差が(-9時間)と表記することができる。

日本とイギリスとの時差は、

$$(式)(135-0) \div 15 = 9[時間]$$

であり、また、イギリスは日本よりも時間が遅れていることから、日本からみてイギリスとの時差は、(-9)時間、と表記することができる。



<活動 B→活動 C への支援>

- ・一般的な支援

数直線の二重線がそれぞれ何を表すのかを考えさせる。

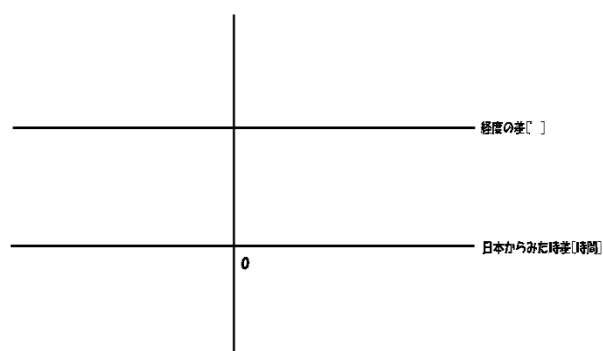
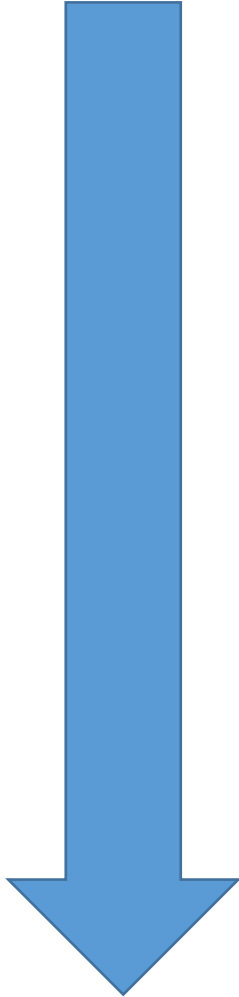


図1：一般的な支援を与えた後に生徒がかくと予想される数直線



・特殊な支援

経度差 15° を 1 としてみることにヒントを出し、考えさせる。

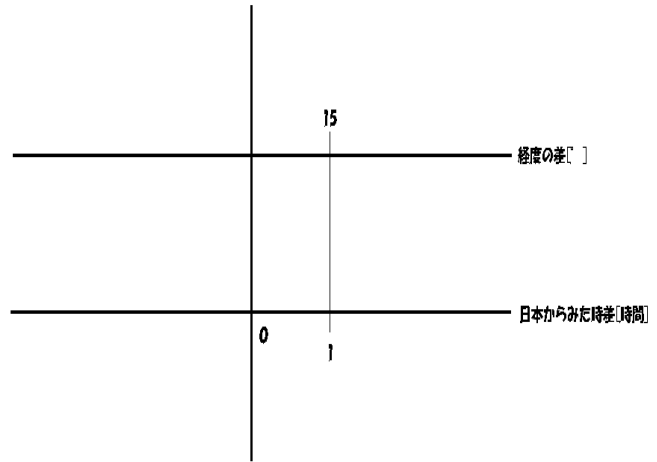


図 2 : 特殊な支援を与えた後に生徒がかくと予想される
数直線

期待する活動 C

数直線上に経度差と時差の関係を表すことができ、負の数の乗数について理解することができる。

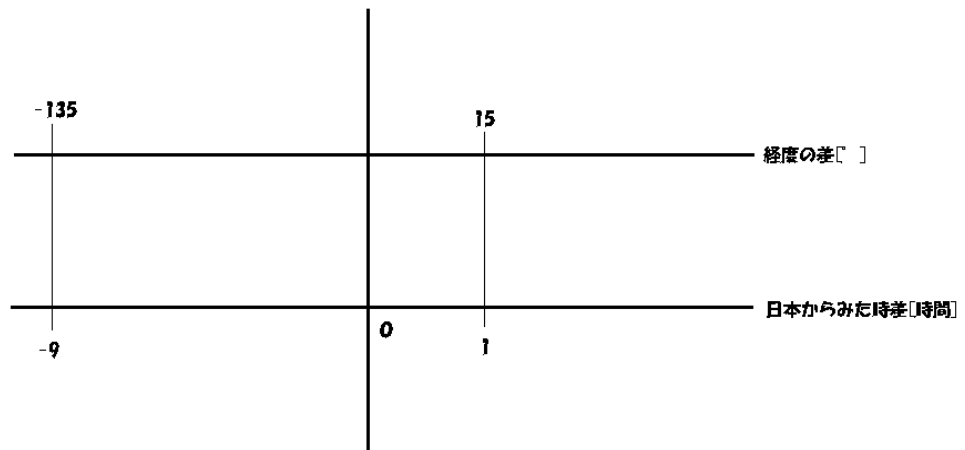


図 3 : 活動 C について生徒がかく数直線の例

上の数直線の図の(-135)の値は、(日本の経度)-(イギリスの時差)で表される値である。

*期待する授業例、および練り上げ

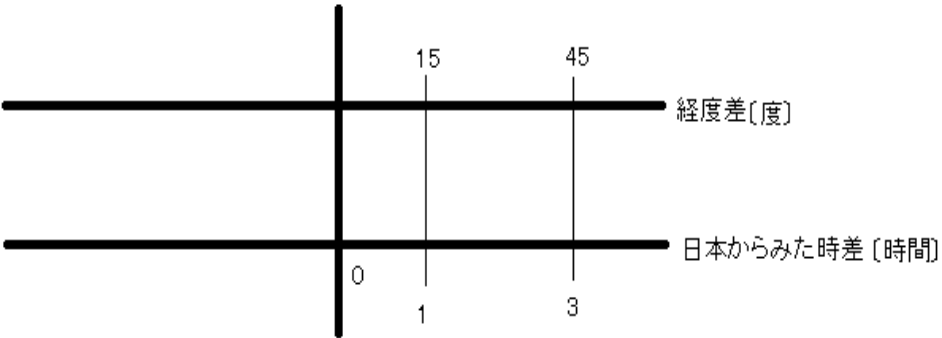
<期待する授業例>

T	今日は正負の数の乗法について扱っていかうと思います。 ということで、日本とイギリスの時差を求めてみましょう。 (問題を提示する)
T	まず1時間分の時差が生じるときの経度差はどれくらいになるでしょうか。 日本とキリバスの関係から考えてみましょうか。
S	キリバスってどこですか。
T	地図で確認してみましょうか。 (地図でキリバスの位置を確認させる)
S	経度 180° のところにあります。
T	そうですね。ではそのことを用いて、1時間分の時差を求めてみましょうか。
S	日本とキリバスの経度差は $180 - 135 = 45 [^\circ]$ 時差は3時間ですので、1時間分の時差は $45 \div 3 = 15 [^\circ]$ なので時差が1時間のときの経度差は $15 [^\circ]$ です。
T	その通りです。それでは日本とイギリスとの時差は何時間でしょうか。
S	$(135 - 0) \div 15 = 9$ なので、9時間です。
T	そうですね。ここでもう一度地図を見てみましょうか。 今日本からみたキリバスの時差は(+3時間)と表記していますね。 なぜ時間が+で表されるのでしょうか。

S	日本からみて東側にあり、時間が早いからです。
T	そうですね。同じように考えると日本からみたイギリスの時差はどれくらいになるでしょうか。
S	…。
T	それでは例えば中国との時差を考えてみましょう。地図で中国の位置を確認してみましょう。
S	中国の経度は東経 120° です。なので、日本と中国との時差は、 $(135 - 120) \div 15 = 1$ [時間] よって 1 時間です。
T	そうですね。では、日本からみた中国の時差はどうなりますか。
S	中国は日本からみて西側にあるので、時間が遅れています。なので、(-1 時間)ですか。
T	そうです。同じように考えると日本からみたイギリスの時差はどれくらいになるでしょうか。
S	(-9 時間)です。
T	そうですね。何か気づいたことなどはありますか。
S	キリバスと日本との経度差は 45° で時差は 3 時間、イギリスと日本との経度差は 135° で時差は 9 時間。 経度差を 3 倍すると時差も 3 倍されていることから、経度差と日本からみた時差が比例関係にありそうです。
T	比例関係ならば数直線をつかって表せそうですね。 試しに数直線をかいてみましょう。
S	数直線がうまくかけません。

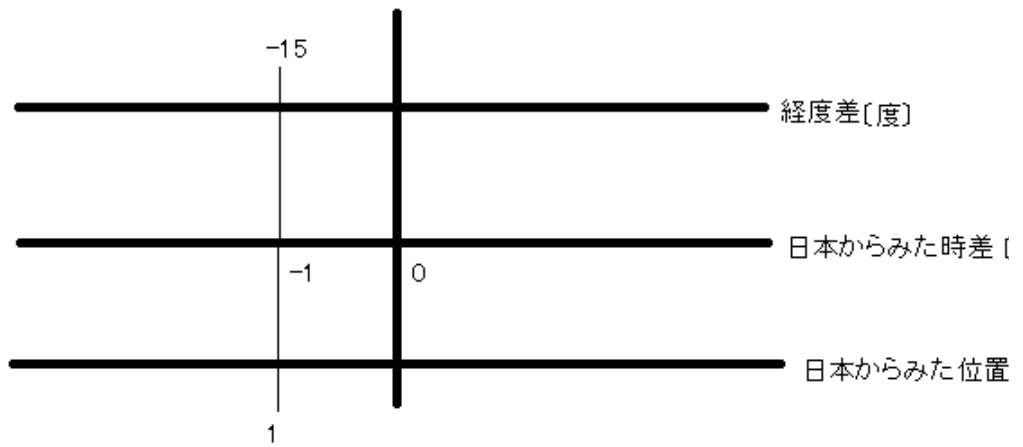
T	それではまず、数直線の2つの直線がそれぞれ何を表すかを考えてみましょう。
S	(考え中) 経度差と日本からみた時差との関係はどうでしょうか。
T	それでやってみましょう。 まず数直線をかいてみてください。
S	(図1のような数直線にかく)
T	では、いま何を”1”としてみますか。
S	…。
T	日本からみたときの経度差 15° が1時間の時差ですね。
S	そうでした。 (図2のような数直線にかく)
T	そこに日本とイギリスとの時差の関係を書きこんでみましょう。
S	(図3のような数直線にかく)
T	そうですね。では、このことから何がいえるでしょうか。
S	(考え中) $15 \times (-9) = -135$ ですか？
T	そのような式で表せますね。では今日はここまでにして、次回、正負の数の乗法の計算について学習していきましょう。

<練り上げ>

T	今までのことから日本からみたキリバス、中国それと、イギリスの経度差と時差を確認しましょう
S1	日本からみてキリバスは経度差+45度で時差+3時間です
S2	日本からみて中国は経度差-15度で時差-1時間です。
S3	日本からみてイギリスは経度差-135度で時差-9時間です。
T	経度差 15 度で時差 1 時間であるのでキリバスも中国もイギリスも比例関係になっていますね。 二つの数量が比例関係であるので数直線で表すことができます。 1 時間で 15 度であることを示した上で S1 はキリバス、S2 は中国、S3 はイギリスが数直線のどのあたりにくるかな？
S1	
S2	

S3	
T	
S1	
S2	<p>これらの数直線から時差が基準の1に対してキリバスは×3、中国は×(-1)、イギリスは×(-9)ですね</p>
S3	<p>比例関係なので日本からみたそれぞれの経度差はどのように計算できる？</p>
S3	<p>15 度 × (+3 時間) = +45 度</p>
T	<p>15 度 × (-1 時間) = -15 度</p>
S3	<p>15 度 × (-9 時間) = -135 度</p>
T	<p>このことから正の数に負の数をかけると負の数になることがわかりますね またこのような演算をよりわかりやすくするには数直線だと考えやすいですね</p> <p>次に海外旅行を考えてみよう。まず中国についてイギリスにいきます そこで日本から中国が1離れている位置にあるとしましょう とすると数直線がもうひとつ必要になります。どうかけるかな？</p>

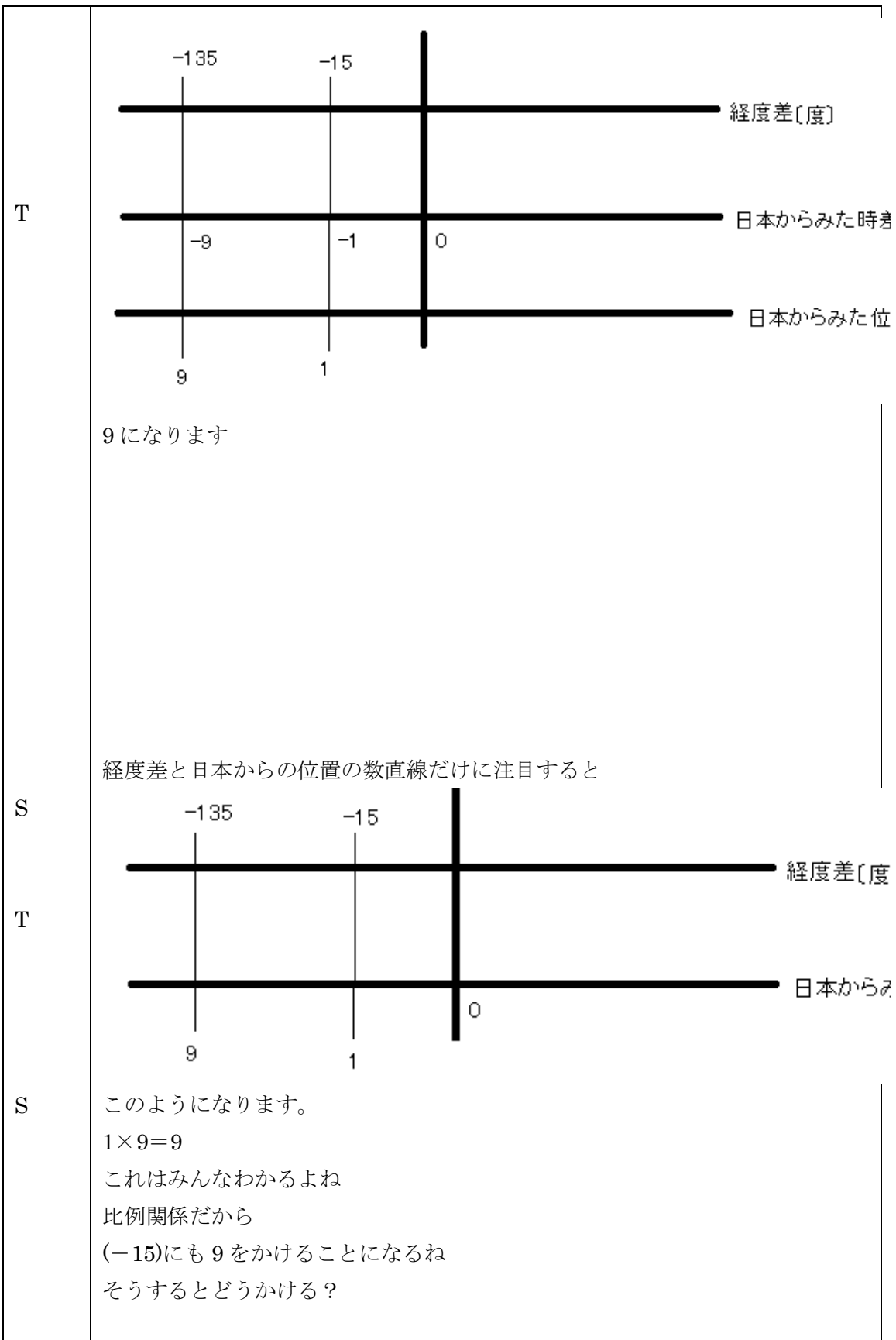
S



T

S

今日本から中国までの距離が 1 ということは日本からイギリスの距離はどうなるかな？



$$(-15) \times 9 = -135$$

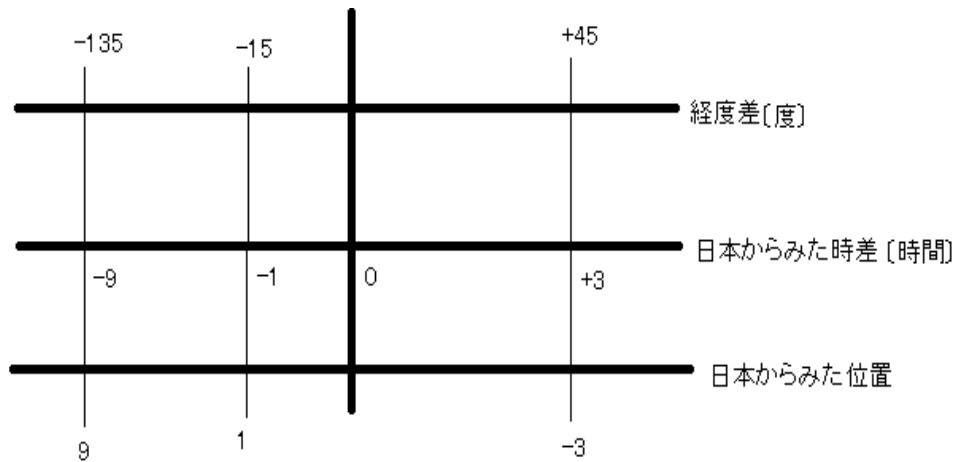
負の数×正の数=負の数になります。

次は中国からキリバスにいったらどうなる？

T
S

第3の数直線でその位置を1としたときキリバスの位置はどうなる

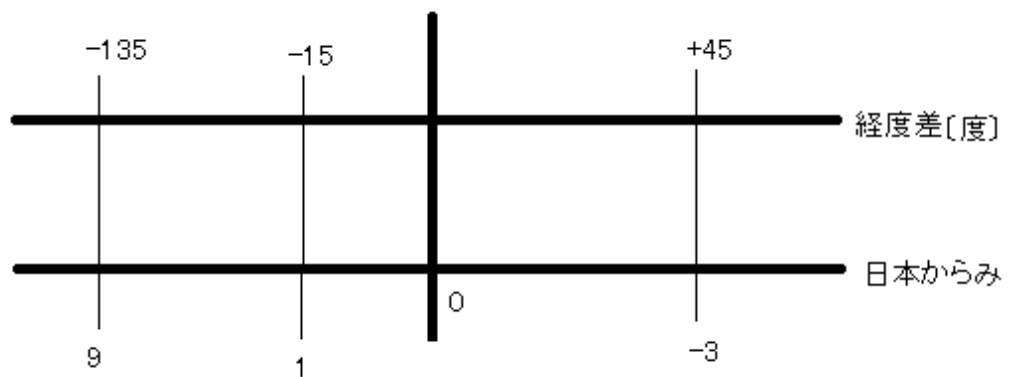
今中国の位置を1としたときキリバスは日本からみて逆の位置なので-になるの
のわかりますね



T

S

さっきと同じように経度差と日本からの位置の数直線だけを考えてみて



T

そうですね。日本からみた中国とキリバスの位置、経度差の関係を式で表してみよう

$$1 \times (-3) = -3$$

$$-15 \times (-3) = +45$$

	負の数×負の数=正の数になります
--	------------------

	さまざまな国で試してみよう
--	---------------

* 編集後記

この講義を通して他人に自分の理解している内容はとても難しく相手の立場にたつだけでなく、伝えられる授業はこんなにも大変だと学びました。自分自身教えるとき、“なぜ？”という言葉を持ちながらすごしていきたいです。

川田 雅訓

中学最初の単元である政府の数に関して自分はそこまで難しいものだとは考えたことがなかった。正負の数の乗法に関して自分はただ暗記していただけだったと今回の指導設計を通してわかった。負の数というものは何なのか、生徒一人一人がどのように理解しているのか、そこからどのように導けばいいのか、なぜ正と負をかけると負になるのか、負と負をかけると正になるのかそこまで深く考えたことがなかった。しかし乗法を数直線にもっていくことで正負の数の乗法を理解することができた。自分は習ったことがなかったでとてもためになった。また指導案をつくった時生徒がどう考えるかを想定すること、またすべて教えることは簡単でも生徒全員が自らの力で解けるようにヒントを与える難しさを感じた。

今まで教えるということのを浅はかな考えだったとわかり、また教師の魅力を改めて知ることができた。

堀田 直希

正負の数は私達の日常生活において、当たり前のように存在している。その重要性というの言うまでもないだろう。だからこそ生徒には新しく難しい分野ではあるがきちんと学んでほしいし、私達教える側の人間もきちんと教えていくべきだと考えるいい機会になった。

私達が普通に生活していて頻繁に用いる機会があるからこそ、初めて学習する生徒達に分からない部分が事前に把握できない場面もあるだろう。そういったことの無いように、教える立場になったときには、しっかりと考えていきたい。

山崎 耕佑