

2013 年度

# 数学学習指導設計

高等学校第 3 学年

単元名 「微分の応用」

テーマ：数学を通じての物理入門

味戸 正徳  
石井 雄貴  
北中 大輝  
水谷 祐基

## 目次

第一章	単元設定と設定理由	3
第二章	数学史の分析と考察	4
第三章	指導案作成	7
第四章	感想	15

## 第一章 単元設定と設定理由

単元設定：微分の応用分野

理由：高校に入学して中学よりも難解な数学的知識を得てきた生徒は、なぜこのような勉強をしているのか、またこの勉強がどのように応用されていくのか理解しがたいはずである。そこで、数学と科学を橋渡ししている微分を選択した。この分野を選択することで数学学習というものはすべての学問の根幹を担うものであることを理解してもらいたい。例えば、物理分野の速度加速度などから身近な事象を取り上げることで生徒により理解を深めてもらうことができると考えたので、我々は微分分野の指導案を設計することにした。

## 第二章 数学史の分析

ニュートン:特に数学を勉強していたわけではなく、化学に興味を持っていた。

1665年に流率について考えを巡らせはじめている。1665年から1666年までペストによりトリニティ・カレッジが閉鎖していた間に主要な発見のほとんどを明らかにした。ただし、2項定理の発見は遅れた。また、ニュートンはパスカルの三角形から直接2項定理へと進んだのではなく間接的に求積問題から2項定理に到達したということだ。

ニュートンが微分積分についての論文を初めて出版したのは1687年で、科学著者『プリンキピア』においてであり、この本は物理学と天文学の基本原則を純粋幾何学の言葉で解説したものである。ニュートンは微分積分の演算を初めて行った人ではなく、微分と積分の基本原則である逆の関係に初めて気づいた人物というわけではない。ニュートンの発見とは微分と積分の基本的性質を代関数や超越関数とかによらず、すべての関数に適用できるような一般的算法へと一本化したことである。ニュートンは生涯通して化学実験の中で錬金術に魅かれていた。また、神学と年代学にもひかれていた。

ライプニッツは神学、法学、哲学及び数学を修めて非常に幅広い知識を身に付けた最後の知識人と言われている。無限級数や調和三角形の研究の後、パスカルのサイクロイドについての論文や無限解析の別の分野へ目を転じている。1676年にニュートンが数年前に得た成果に到達した。ライプニッツの方法によれば関数が有理関数でも無理関数でも、または代数関数でも超越関数でも常に総和と微小差を求めることができた。そして、彼が次にしたことは新たな記号の導入であった。その記号とは  $dx, dy$  で表すことである。またライプニッツは優れた数学者であっただけでなく、哲学者や科学者であった。微積分以外で彼が行ったもっとも重要な数学的貢献と言えば、論理学におけるものであった。微積分のもつ特性のうちで関心があったのは普遍性についてだった。思考に要する少数の基本的概念にはそれを表すための普遍的な記号ないし表意文字が必要であり、したがって合成概念は数学においてちょうど公式が組み立てられるように人間の思考のアルファベットに相当する基本的概念から作り上げられるべきものだと考えていたのだ。そして、彼はホイヘンスと運動エネルギーの概念を新たに展開していた。

「ニュートンは、自ら得た無限解析によって曲線と面積とのあいだの逆の関係を解析することができたことから、かれは微積分法の実質上の創始者となったのであった。そして、そのような事情があったために、のちにニュートンは微積分法を無限級数解析から分離させようというどんな試みにも難色を示したのである。」(Part4 P8~9 023~)

考察) ニュートンにとって微積分学は様々な数学的な問題と関連していると考えていたのだろう。そして、その結びつきがより強いのは幾何学の分野だと考えたのだろう。

「無限に小さい量とか流量と表現するかわりに、“最初と最後の比”という考えを採用して

いた～略～ニュートンはまさに極限の概念に到達せんばかりのところまで行っていたのだが、問題はかれが「ゼロにする(vanish)」という言葉を使ったことであった」(Part4 P9 017～27)

考察) ニュートンは極限の考えについてある程度の理解をしていたと思われる。そして、極限と微分法の関係に気づいていたのではないだろうか。しかし、そのゼロになるという考えは当時の数学者を困惑させたのは言うまでもない。

「ニュートンが無限級数と微積分を発見したのは1665年から1666年のことであったが、その次の10年間には、その新しい解析学について少なくとも三つの論文を書いた」(Part4 P10 04～5)

考察) 1665年から1666年までペストによりトリニティ・カレッジが閉鎖していたからこその発見に至ったとされている

「ガウスが、1827年に創設した幾何学の新しい分野は微分幾何学として知られているが、それは伝統的な幾何学というよりも、おそらく解析学に属するものであろう。ニュートンとライプニッツの時代以来ずっと、ひとびとは微積分学を2次元の曲線の研究に応用してきたが、こうした研究がある意味で微分幾何学の原型になったのであった。」(Part5 P33 01～5)

考察) ガウスは、昔からある図形と微分という一見合い異なる分野を複合した第一人者であることがわかる。また、数学に新しい分野を創ったことから、ガウスが万能数学者—純粹および応用を問わず、すべての数学の分野に精通した人物—と言われる所以を垣間見ることができる。

「ガウスがもっと早く自分の発見を公表していたらよかったのに、もしくは自分の発見をのちの再発見者たちに知らせるのに、もっと穏やかな手段をとっていたらよかったのに、と思わずにはいられない。」(P24 026～27 P25 01)

「ガウスはニュートン同様、他人に対しては誠意を尽くさないことがあったようである。とくに、数学上の業績においてガウスにもっとも迫るコーシーに対してそうであったように、コーシーの仕事についてガウスが言及したことは一度もなかった。」(P25 01～6)

「コーシーは行列式の記号法を偏導関数にも応用して、2行にまたがる式になるところを、簡単な省略形で表していた。」(Part5 P21 016～17)

「コーシーはある点でガウスとは全く違っていた。コーシーは何らかの業績を上げるや憶することなくすぐさま印刷出版へと走ったのであった。」(P25 07～8)

「教えることを楽しむことができたコーシーには、教えることを嫌っていたガウスよりも、はるかに多くの教育者の要素が備わっていたからである。」(P25 011～13)

考察) この事柄から19世紀数学を代表するコーシーとガウスの性格がわかる。ガウス自身は自分自身の研究を世間に公表せず、他者の研究についても他言しなかった。自分自身が知りたいと思うことについて自分で研究し自己消化していた。また自身の研究成果についての名声などという見返りということにあまり関心がなかったのかもしれない。一方コー

シーは正反対であり、「ガウスに対して迫る」と書いてあるように自分の知らないことに関してはとことん知りたいと思うような人であった。また、自身の研究成果を自己消化するだけではなく、世間に伝えたいという思いがあったかもしれない、あるいは自身の研究成果に対する名声などの見返りを望んでいたかもしれない。しかし、教えることを楽しむということから、純粹に議論することや教えることが好きであったかもしれない

「ポアンカレはあらゆる数学をかれの本分とした」(P146 016~17)

「ポアンカレは、数学的才能を示したのはとりたてて若い時期でもなかったし、また簡単な計算でもてこずる卒直に認めていた。したがって、ポアンカレの場合は、偉大な数学者になるためには必ずしも数を扱う才能に優れている必要はなく、生れつきの数学的能力のなかには計算能力とは別の数学にとって有利な能力があるのだということを示す好例となっている。」(P146 019~24)

考察) ポアンカレはあらゆる数学をかれの本分としたことから、ガウスと同じく万能数学者といわれる。ガウスとは、根本的なところは異なる。しかし、ガウスとポアンカレの両者は発想がとても豊かで、それ紙に書きとめることが難しいほどであることや、特別な事例よりも一般的定理を好むという類似点もある。また、年間論文出版量はほかの数学者のそれよりも多かったことや、晩年哲学的傾向の大衆向けの書物をかいたことから、数学以外にも興味を持ち、勤勉な人であったと思われる。

フェルマは、正確にはぴったり一致はしないけれども、それらの値がほとんど等しいと考えて、 $f(x)$ を $f(x+E)$ に等しいとおいたのである。そのとき2点間の間隔Eを小さくすればするほど、仮の等式は真の方程式にますます近くなる。ゆえに、フェルマはEで全体をわたったあと、 $E=0$ とおいた。このようにして、彼は多項式の極大点および極小点の座標を得たのである。要するに、このことはこんにち微分と呼ばれている手順にほかならない。というのは、フェルマの方法は下の式の値を求め、それを

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

ゼロに等しいとおくことの相当しているからである。(Part3 P118~119 025~)

考察) いままでは極大、極小について導き出す方法がなかったためそれを明確にするために、この方程式を見つけた。いままでは、極大、極小について考える必要なかったが、解析幾何学の軌跡の研究をしていくうちにこの方程式を導き出した。この方程式は、極大、極小を求めるための方法であり、これは今の微分の方法と酷似しており、現代の微分の基盤になっている。

参照文献:ボイヤー『数学の歴史 4』, 『数学の歴史 5』

## 第三章 指導案作成

### 第一回作成

本時のねらい

数学を通じての物理入門

微分を用いて加速度を求めることで、数学と物理の関係性をあらわにし、今後学習していく物理の導入の基礎を定着させる。

### 問題

高さ 6m の建物の屋上の端から毎秒 2m の速さで綱をたぐり、地上の荷物を引き寄せている。綱の長さが 10m になったときの荷物の速度を求めよ。(啓林館) 30/35 限目

A. 自力で解法を見つける。つまり、問題を解かせる。

予想される解法

(1) 比を用いての解法

(2) パラメータ表示を用いても解法 (パラメータ表示は既知とする)

比計算でも解けるが、パラメータを用いることで数から物理への導入を知ってもらうために今回はパラメータを用いる。

A における支援

ここでは、生徒自身がどのくらいの計算力また発想力を持っているかの確認を行うためのものであり、ここにおける支援はなし (やっても助言程度)

B パラメータの必要性、意味

A において以後予想される解法 (2) の解き方で進める。(1) は解法の一例として取り扱う。

予想される活動

パラメータ表示によって今回の問題では  $t$  (単位は時間  $s$ ) という共通な変数を用いて、 $x$ 、 $y$  (ともに単位は  $m$ ) が  $t$  によってどのように変化しているかの可視化

また、異なる変数 (今回は  $t$ ) を用いることで、式に表示されていない関係性の可視化  
予想される疑問

比計算でできるものをなぜパラメータを用いなければならないのか

→パラメータを用いることで、小、中学校で学習してきた「みそじ」によって解答

を導き出せる。

なぜ「みそじ」を用いるのか

→「みそじ」を用いることで距離、時間、速さ（速度）の3つの関係性を見いだす。

今回の問題では $x^2 + 6^2 = y^2$ という三平方の公式からパラメータ表示を用いることで $x$ 、 $y$ （単位は距離m）を同じ時間  $t$  における関数とみなし考えることで「みそじ」を用いて速度を導き出せる。

## C 数学から物理への導入

予想される活動

数学における微分と今回の問題における微分の意味の確認

数学における微分とは、ある関数 $f(x)$ の増減や導関数を求めるものである。

今回の問題において、微分とは距離と時間から速さを求めるものであり、その瞬間における速さを示している。物理の力学において、速度の微分とは平均の速さまたは瞬間の速さである。

何を持って達成できたとするか

問題解決とともに加速度という物理のものと、今学習している微分という数学のものとの関係性を理解し、自分自身の力だけで微分を用いた加速度問題の解決ができるようになる。



## 問題作成改訂版

前回とは異なりどのように前回の A→C の流れをどのようにして持って行くかに重点を置いて考えた。

本時のねらい

数学を通じての物理入門

微分を用いて加速度を求めることで、数学と物理の関係性をあらわにし、今後学習していく物理の導入の基礎を定着させる。

## 問題

高さ 6m の建物の屋上の端から毎秒 2m の速さで綱をたぐり、地上の荷物を引き寄せている。綱の長さが 10m になったときの荷物の速度を求めよ。(啓林館) 30/35 限目



A への支援

- 一般的な支援

まずは自力で解いてみよう

- より特殊な支援

他の点における速さはわかる？

期待する活動 A

比によつての解法

例)  $y=6\sqrt{2}$  のとき、速さ  $2\sqrt{2}$  であるから、速さを  $x$  とおくと

$$6\sqrt{2} : 10 = 2\sqrt{2} : x$$

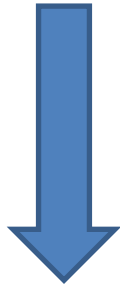
$$6\sqrt{2}x = 20\sqrt{2} \quad \therefore x = \frac{10}{3}$$

しかし、人それぞれ異なる  $y$  によつて異なる  $x$  が求まる。

→ 綱の長さ  $y$  が、初めに決まってないため、それぞれの速さが異なっている

例) 初めの長さが、 $y=100$  なのか  $1000$  なのかで、比計算は変わってくる。

では、一般式にしたら、どうなるのか？



B への支援

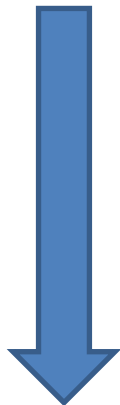
- ・一般的な支援  
 $y=a$  として求めたらどんな方程式になる？
- ・より特殊な支援  
例において  $y=6\sqrt{2}$  だから、 $a=6\sqrt{2}$  としたら  $y=a$  になるよね？

期待する活動 B  
比によつての解法の一般化  
 $y=a$  として、その時の速さを  $b$  とおくと、  
 $a : 10 = b : x$

$$ax = 10b \qquad \therefore x = 10 \times \frac{b}{a} \quad \dots (*)$$

(\*) において、 $a, b$  はともに変数であり、 $a, b$  によつて  $x$  の値は決まってくる。  
だから、(\*) の値は一つに定まらないから、比によつては解くことができない。

では、どのようにしたらこの問題を解きことができるのか



C への支援

- ・一般的な支援  
比の計算ではうまくいかない  
では、 $x$  と  $y$  について三平方の定理以外の関係はないのか？
- ・より特殊な支援  
 $x$  と  $y$  について共通な変数は、時間  $t$  がある。  
時間  $t$  によつて  $x$  も  $y$  も変わっていくよね？

期待する活動 C  
パラメータ表示による解法  
三平方の定理から  $x^2 + 6^2 = y^2$  は時間  $t$  における関数だ  
→ 小・中学校で学んだ「みそじ」の関係からわかる。  
では、距離  $x, y$  と時間  $t$  から速さを求める。  
ここで、 $dx \cdot dy$  : 道のりの変化  $dt$  : 時間変化となるから

$\frac{dx}{dt}$  は、(距離) ÷ (時間)  $dx$ 、 $dy$ ・・・(距離の変化)  $dt$ ・・・(時間の変化)

同様に $\frac{dy}{dt}$ もいえて、これは、微分であり、 $dt$  を可能な限り小さくすることで、その瞬間の速さがわかる。

この方法を用いて

$$x^2+6^2=y^2$$

両辺を微分して

$$x \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dt}$$

$y$  は毎秒 2 秒の速さで減少するから  $\frac{dy}{dt} = -2$

よって  $x \frac{dx}{dt} = -2y$

ここで、 $x^2+6^2=y^2$ より、 $y=10$  のとき  $x=8$  だから

$$8 \frac{dx}{dt} = -20 \quad \therefore \frac{dx}{dt} = -2.5$$



N への支援

物理入門（より物理らしい問題へ）

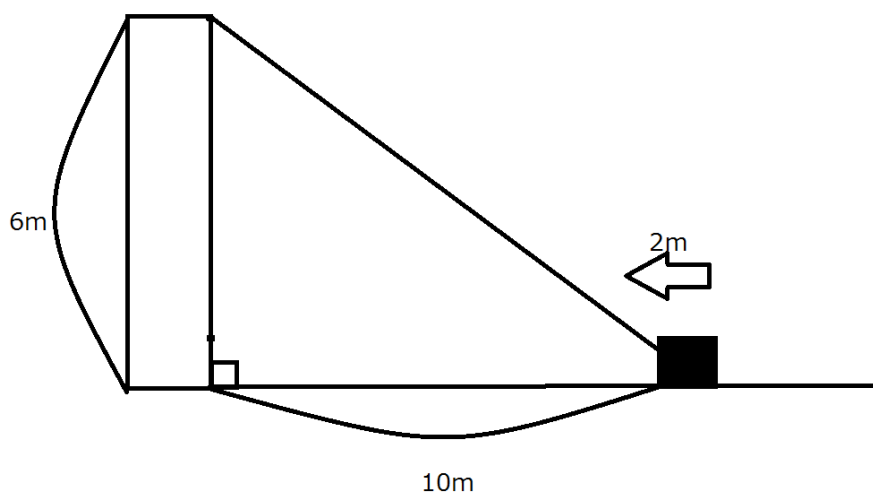
- 1) その瞬間の加速度はどのくらいか？
- 2) 荷物が、綱を引くとは逆に毎秒 0.5mで移動するときはどうなるか？

<p>A:「では、授業を始めます。今日学習することは、今後、学習する物理という分野ともかかわりを持つのでしっかりと聞いて理解するように。」</p> <p>B1:「先生、数学と物理の関係を学ぶということですか？」</p> <p>B2:「数学と物理に関係なんてあるのですか？」</p> <p>A:「いままで学習してきた微分を用いる応用問題と関係があり、その問題を今日やります。」 (問題を板書する。)</p> <p>A:「では、まずはじめに解いてみましょう。」</p>	<p>物理入門の示唆</p>     <p>問題提示</p>  <p>活動 A への支援</p>	<p>開始</p>          <p>5 分</p>
--	---	---

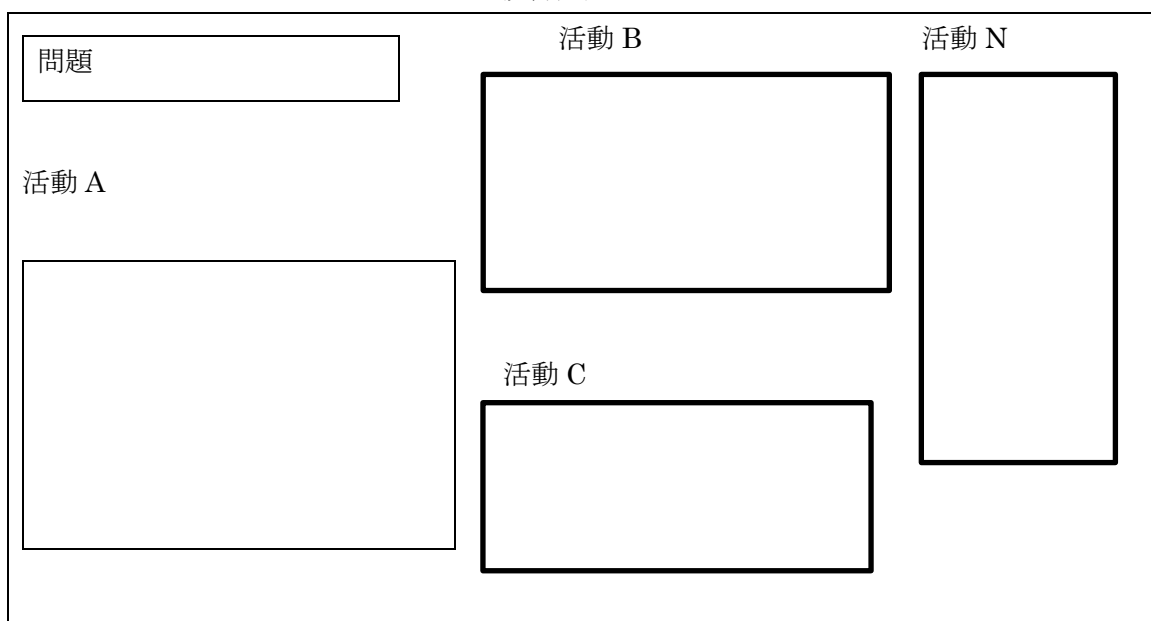
<p>A:「では、B3さんはどう考えましたか?」  B3:「比で考えました。」  A:「ほとんどの人が比で考えたと思いますが、答えはどうになりましたか?」  (生徒それぞれから異なる値が出てくる。)</p>		15分
<p>A:「では、<math>y=a</math>として一般化した式を求めてみましょう。」  A:「もしもやり方がわからない人がいたら、たとえば、さっきの問題で<math>y=6\sqrt{2}</math>とおいていたら、<math>a=6\sqrt{2}</math>としたら<math>y=a</math>になるよね?」</p>	<p>活動Aの共有   活動Bへの支援 (より一般的)  活動Bへの支援 (より特殊)</p>	20分
<p>B4「先生、一般化した結果、<math>x=10\times\frac{b}{a}</math>となりなした。」  A:「みんなそうなったかな?ではここで、気づくことはないかな?」  B5「右辺に、二つ変数があります。」  (答えがすぐ出ると思うので正解するまで待つ)  A:「そうだね。右辺が2変数になっているから答えは出ないね。」  A:「では、ここで成り立つ関係式はどんなものがあるかな?」  B6「三平方の定理が成り立ちます。」  (ここも答えがすぐに出てくると思うので待つ)</p>		
<p>A:「じゃあ、<math>x</math>と<math>y</math>について三平方の定理以外の関係はないのか?」  A:「<math>x</math>と<math>y</math>について共通な変数は、時間<math>t</math>がある。時間<math>t</math>によって<math>x</math>も<math>y</math>も変わっていくよね?」  A:「式には表れていない関係式は、前に学習した媒介変数表示を使うよね?」  B7:「三平方の定理から <math>x^2+6^2=y^2</math> は時間<math>t</math>における関数。ここで、<math>dx \cdot dy</math>:道のりの変化 <math>dt</math>:時間変化となるから、小・中学校で学んだ「みそじ」の関係からこの式の両辺を、微分すればいいってことですか?」  A:「そのとおり。では、とどうなったかな?」</p>	<p>活動Cへの支援 (より一般的)  活動Cへの支援 (より特殊)</p>	30分

<p>B8 : 「2.5 になりました」  A: 「みんな 2.5 になったかな? このように、媒介変数表示(パラメータ表示) を用いると式に表れていない関係式を可視化することができます。」</p>	<p>パラメータ表示  の意味・必要性</p>	<p>45 分</p>
---	-----------------------------	-------------

問題の図



板書計画



練り上げ

ここで、どのようにしてパラメータ表示にもっていくかを考える。

活動 B において一般式を立てた。

なぜか？ →一般式にすることで両辺に変数の  $x$ 、 $a$ 、 $b$  があるよね？

変数が両辺にあったら一つの式で解くことはできないよね？

つまり、一般式を立てることで答えが出ないことをわからせる。

活動 B から C への導入

活動 B において、比計算ではできないことが分かった。

ではそのほかの方法はないか？

ここでわかっていることを確認すると、三平方の定理がわかっている。

また、荷物と距離は時間によって変化する。

見えていない関係式はどうやって解いたか？→パラメータ表示

関係式には表れていないが今回の問題では  $t$ （単位は時間  $s$ ）という共通な変数を用いて、 $x$ 、 $y$ （ともに単位は  $m$ ）が  $t$  によってどのように変化しているかの可視化することができる。

では、どの式を用いるのか？→三平方の定理

今回の問題において三平方の定理は、 $x$ 、 $y$  の距離の変化を表したものである。

このことから、三平方の定理の式は、時間  $t$  の関係式でもある。

速さというものは、時間を限りなく  $0$  に近づけたときの、「距離/時間」だから、今回は時間  $t$  で微分することで、 $dx \cdot dy$  : 道のりの変化  $dt$  : 時間変化となるから、小・中学校で学んだ「みそじ」の関係でその瞬間の速さが求まる。

参考文献（問題）：数学Ⅲ（啓林館）

## 第四章 感想

数学史から勉強しましたが、速度加速度を調べるにあたり微分のところからはいりましたが、もう少し視野をひろげ、極限や軌跡なども調べることができたらよかったと思います。

教育指導の変遷について私たちの班は取り扱わなかったので、自分で見て行きたいとおもいます。

速度加速度の分野は、物理にもつながる分野で数学からの架け橋となることでしたが、問題をもっと吟味できたらよかったです。(味戸正徳)

時間が合わず、全員での話し合いの場を設けることが困難であり、設計案の作成前の段階で戸惑うことが多かった。しかし、実際に教師として現場で働くならば、毎日この半年かけてきた作業をしなければならない。もし自分たちがこの作業を怠り、不完全な設計案を作成したのならば、それは生徒の将来を閉ざしてしまう行為である。その点でもこの設計案を在学中に作成するということを経験できたのはとても幸せなことであるように思う。自分が高校時代に毎日教師がこんなにも考えてこんなにも悩んで授業を作っていたのならば、もう少し真剣に授業に取り組み、教師の言わんとすることを全て吸収すればよかったと後悔もしました。自分は生協で「1年生の講座」という講義の作成もしています。今後、この講義で学んだことを最初の実践の場として、使ってみたいと思います。本当に半年間共に作成を手伝っていただいた班員のみんなに感謝の気持ちでいっぱいです。ありがとうございました。(石井雄貴)

全員で話し合うという事があまりできなかったが、その分自分たちが各自何をしておけばいいかを考えながら進めていくことができたのでよかったと思いました。しかし、初めのほうは上手いかず、数学史で時間をたくさん使ってしまい、教科書考察などがほとんどできなくなってしない残念でした。指導案を作成していくことで、生徒たちがここを疑問に思うのではないかなどを、自分以外の人から指摘されることで、自分自身のものの見方が変わったので、自分自身が成長することのできる講義だったのでよかったです。最後に半年一緒にやってきた班員のみんなありがとうございました。(北中大輝)

僕は、始め授業は教科書を見たらすぐできると思っていました。けど、この講義を受けてそれではいけないということがよくわかりました。まず、問題提示で生徒に教えた内容にいけるかが決まってしまい同じ問題でも提示が違えば生徒がその問題について考えることも変わってくるしちゃんとなにをしたいかを理解してやらないといけないと思いました。

特に難しいと思ったのは、生徒に期待する活動でした。その問題に対していろんな考え方があります。その考えに支援していき教えたい内容にしていくのがとても難しかったです。僕がその頃だった場合の思っていたことはすぐに思いついたのですが、その他の考えがあまりすぐ出てこなかったです。そういった所は、ひとりでは難しいと思いました。たくさんの生徒がいるほどその分の考え方がるので、学んでほしいことをどういうふうにしたらいいかもとても考えさせられました。でも、この講義こういったことができて良かったと思います。もしやっていなかったら、本当に困っていたと思うしこれから先が大変だと思いました。

(水谷祐基)