平成２４年度

数学指導設計Ｉ

高等学校第二学年
テーマ：微分係数と導関数

Ｈ２　和田　匠馬
北村　恭平
鶴江　大輝
新　　　渚
坂元里佳子

目次

□単元設定と設定理由

微分係数と導関数

〇設定理由

微分係数と導関数は大学でも扱う内容の微分の基礎となる考え方であり、これを用いて数式をグラフに表す時に、より正確なグラフを描くことができる。それにより数式(グラフ)の正確な情報(傾き、極値など)を得ることができるから重要であると考えたから。

□教材研究

2-1 ◎学習指導要領の解説(文部科学省)

数学Ⅱ

目標：いろいろな式，図形と方程式，指数関数・対数関数，三角関数及び微分・積分の考えについて理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し表現する能力を養うとともに，それらを活用する態度を育てる。

微分の考え

ここでは，これまでの内容を更に発展，拡充させ，多項式関数の値の変化などについて考察させる。その際，関数の値の変化を極限の考えを用いて調べる活動を通して，微分係数や導関数の概念を導く。なお，ここで扱う関数は三次までの多項式関数を中心とする。

(ｱ) 微分係数と導関数

中学校や「数学Ⅰ」の内容との関連を踏まえ，関数の値の変化について具体例を通して考察させる。微分係数については，関数の*グラフの接線と*関連付けて扱う。その際，極限については直観的に理解させるようにする。また，導関数については，関数の定数倍，和及び差の導関数を求めることができるようにする。

(ｲ) 導関数の応用

導関数の応用として，関数の増加，減少及び極値を調べ，そのグラフの概形をかくことなどを扱う。関数の値の増加，減少についても，接線の傾きなどと関連付けて，視覚的，直観的にとらえることができるようにする。また，区間が制限された関数の最大値や最

小値も扱う。さらに、日常の事象と関連させることで，微分の考えの有用性を認識させる。

数学Ⅲ

目標：平面上の曲線と複素数平面，極限，微分法及び積分法についての理解を深め，知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し表現する能力を伸ばすとともに，それらを積極的に活用する態度を育てる。

微分の考え

「数学Ⅱ」の「微分・積分の考え」の「微分の考え」では三次までの多項式関数を中心に，関数の定数倍，和及び差の導関数を扱っている。また，導関数を活用して関数値の増減を調べたり，関数のグラフをかいたりすることなども扱っている。ここでは，これらを更に発展させ，和，差，積，商及び合成関数の微分法を扱い，多項式関数だけでなく，分数関数，無理関数，三角関数，指数関数及び対数関数の導関数について理解させる。また，これらの関数について，関数値の増減やグラフの凹凸などの考察を通して，微分法の有用性を認識させるとともに，微分法を速度・加速度などの考察にも活用できるようにする。

□数学Ⅱと数学Ⅲの微分の違い

微分を取り扱う前に関数が微分可能であることは関数が連続であることが前提である。数学Ⅱの微分は三次までの多項式を主に扱い、連続性を問う必要性がないが、数学Ⅲの微分では三角関数、分数関数、無理関数、指数関数、対数関数などのさまざまな関数を取り扱い連続性が不明なため、連続性を問う必要性がある。

また数学Ⅲは数学Ⅱで既習事項である微分係数の考えを確認し、次に微分可能と連続について学習する。ここで初めて絶対値関数がでてきて関数が連続であっても微分可能でないという例が提示される。

□学習指導要領の変遷

学習指導要領の変遷について

昭和 26 年
解析Ⅱ:近似や極限の概念
昭和 30 年
数学Ⅲ:微分積分概念
昭和 35 年
数学ⅡA:微分積分概念

昭和 45 年
数学Ⅱ:微分概念、積分の意味
昭和 57 年
基礎解析:微分積分を整関数で
平成元年
数学Ⅲ:極限概念復活
平成 15 年
数学Ⅱ:微分積分概念

□数学史〈微分について〉

<u>18 世紀</u>
・数学界ではオイラー、ダランベール、コーシーを中心に微分積分学が発展。

<u>19 世紀</u>
・微分積分の基盤に疑いの目。
→コーシーやワイエルシュトラスにより微分積分学の基礎固めが行われる。
・ボルツァァーノやコーシーによって連続や収束がはっきりと捉えられるようになるが未完成。
なぜなら、解析学〈微分積分学〉はその根底を実数の性質においているがこの時点ではまだ実数とは何であるかが不明瞭であった。
・実数を算術的に定義する方法が盛んに研究される。
・その中でカントルは現在コーシー列と呼ばれる概念を導入。
コーシーの収束判定法(1821)を満たす数列としてコーシー列を用い、実数はコーシー列の極限として定義した。(1872)
・こうしてカントルは実数を特徴付ける条件を見出した。
・本格的に複素数も利用するようになった。

<u>20 世紀</u>
・フレシェが関数空間の研究において距離を用いてコーシー列を改めて定義。
これにより、極限に関わる概念は距離とコーシー列で定義されるようになった。

18 世紀に数学界では微分積分方が発展し、主に中心になった人物がコーシー、オイラー、ダランベールである。その中から今回はコーシーについて注目する。なぜならコーシーの平均値の定理の考えに導関数、極限値の考えが用いられているからである。

〈コーシーについて〉

コーシーはまず無限小の概念を明確にしたのち連続の概念を

『あるf(x)が与えられ f(x)は x とともに変化するものとする。次に x とは別に無限に小さい変化する量 α が与えられ、その二つの量の差 f(x+α)-f(x)が、α が無限に 0 に近づくときいかほどでも小さくなるならば f(x)は連続であるという。』

次に導関数の定義であるが従来定義されている導関数の定義ではなくコーシーは無限小の比の極限として次のように定義した。

『f(x)が連続であるとする x が無限小の増分 Δx だけ変化して x+Δx となったとき f(x)の増分 f(x+Δx)-f（x）もまた無限に小さい（無限小）。この増分を Δy(=f(x+Δx))と表記し Δx=i と表記するとき増分 Δx、Δy の比すなわち = について考える。ΔxΔy が 0 に近づくときこの比は一般には 0 でなく他の極限値に近づく。その極限値は正のこともあれば負のこともある。X が変化するときこの極限値も x とともに変化し新たな関数 x が生まれてくる。この関数に導関数と名前を与えることとし、記号 y'または f'(x)を用いて表すこととする。』

以上が主にコーシーの概念である。

次に集合論の創始者であるグオルク＝カントルについて注目する。

なぜなら彼は数学の根本の見直しの機会をつくった重要な人物であるからである。

〈カントルについて〉

・ロシア生まれユダヤ系ドイツ人

チューリッヒ大学とベルリン大学で学び不定方程式に関する論文によって学位を得た。

カントルは集合論において、古代ギリシャ以後 19 世紀後半までの間、少なくとも数学の正当な対象として見られなかった実無限(極限算法のような過程的・生成的無限ではなく何らかの意味で実体的に存在する無限者)を、あえて数学の正当な対象である-**無限集合**-と認め、実無限を数学の対象として捉える歩みを意識的かつ積極的に促進した。

これによりカントルは集合論の創始者、あるいは現代数学の存在論の創始者であるとされている。

またカントルとともにデデキントもまた数学の中での無限集合の取り扱いの具体を示した。

(デデキントはのちにイデアル論や自然数論にも大きく関与し論議の正確さの点では彼よりも優れていると言われるほどであった。)

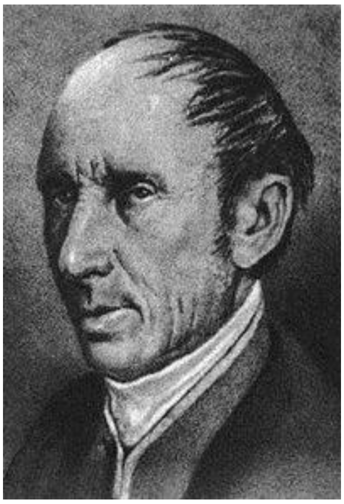
↕

しかし集合論の数学的体系を完成するにつれて<u>濃度比較の問題</u>と<u>連続体問題</u>の二つの問題が存在した。これらが解決すれば集合論は美しい体系を整えて完成するはずであったが集合論の内容を明確に規定しようとすればするほど、その内容の中に<u>曖昧さ</u>が残ってくることが徐々に明ら

かになる。
また、それだけではなく集合論から次々と矛盾が発見された。集合論は数学の基礎であると浸透し始めた時期であったので、数学者や数学に関心のある哲学者に衝撃を与えた。
そして集合論の見直しをするにあたって、多くの数学者は集合論だけではなく数学の真理性そのものへの根本的不安につながる問題であるとし、数学の基礎を見直した。(**数学基礎論の誕生**)

考察:カントルは集合論を建設し、古代ギリシャ以後 19 世紀後半までの間、数学の正当な対象として見られなかった実無限を数学の対象として捉える歩みを意識的かつ積極的に促進したが、その集合論から矛盾が発見されたことにより、集合論だけではなく数学の根本の見直しを図る機会を作った人物である。この見直しは現代数学の基礎が確立するために重要な出来事である。

最後に微分の概念において重要な人物であるアイザック・バーロウに注目する。
〈アイザック・バーロウについて〉
ケンブリッチ大学の初代ルーカス数学教授であり、1670 年にケンブリッチ大学で試みていた『幾何学講義』を出版した。その中には微分積分学の基本定理が含まれる。
バーロウはニュートンの師であり、ニュートンはバーロウの業績を級数論と結び付けて発展させ微分法を確立したが、バーロウの業績の源泉はトリッチェルリにある。
また彼はユークリットの『原論』や『ダタ』の版を自ら作成しただけではなく、アルキメデスやアポロニオスの著作のラテン語新版を草稿の形で残した。彼が『原論』第五巻の幾何学的比例論を正確に理解した最初の近代人の一人であったのは彼のギリシャ数学古典への理解力に基ている。また微分積分学の基本定理に相当する認識を幾何学的に成していたが彼が取り組んでいた数学が微分積分学でなかった以上その基本定理に到達していたとは言えない。
バーロウの業績は積分と微分がお互いに逆操作である(微分積分学の基本定理)ことを幾何学的な方法で証明した。またメルカトル図法における赤道から任意緯線までの距離算出に必要となる、正割関数の積分を初めて閉じた式で表現した。



オーギュスタン＝ルイ・コーシー　　グオルク＝カントル　　アイザック・バーロウ

□問題作成過程

一回目

バロー（1630-1677）は、１６６９年に「光学講義」・１６７０年に「幾何学講義」を出版し、光学・数学において業績を残しました。「幾何学講義」には、接線法と求積法の演算が逆であることの説明がありました。

[接線の定義]

直線上に曲線と共有する点が一つあり、その点に十分近い直線上のすべての点が、曲線と同じ側にある。

[接線を求める]

曲線 ANM の点 M で接線を引き、直線 AP との交点を T とする。直線 PT の長さを求める。弧 NM は無限に小さいとする。NQ を MP と平行となるよう引く。NR を AP と平行となるよう引く。

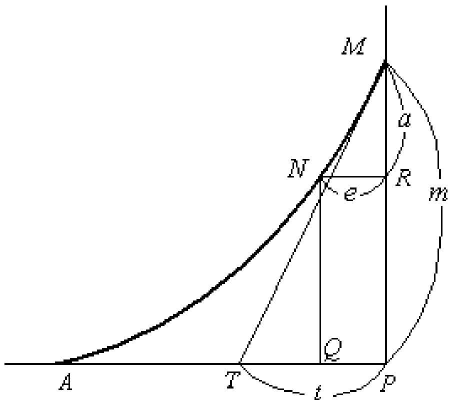
MP＝m、PT＝t、MR=a、NR＝e、とする。

$\frac{m}{t}=\frac{a}{e}$

$t=m\times\frac{e}{a}$

e が０に近づけば、点 T の位置を求めることができる。

このときの計算方法は、次の規則に従う。



（1）a または e の巾（べき）、およびその積を含む項を省く。

（2）a または e を含まない項を省く。

（3）a に m、e に t を代入する。

（例）

$y=Ax^2+Bx+C$ に接線を引く。

$y+a=A(x+e)^2+B(x+e)+C$

$Ax^2+Bx+C+a=Ax^2+2Ae+e^2+Bx+Be+C$

$a=2Ae+Be$

$m=2Axt+Bt$

$$t=\frac{m}{2Ax+B}$$

〇一回目→二回目の改善点

一回目では、接線を求める問題を作るにあたっての案を二つ出した。

一つ目が図を用い接線を求める問題で、二つ目は速さ、距離、時間など物理的現象をもとに接線を考える問題である。

これらは問題の方向性を示したのみで、実際の問題には至っていなかったため問題を作成した。

<u>二回目</u>

問題

$y=x^2-3x+2$上の点$P(0, 2)$における接線の傾きaと接線を求める。

接線の方程式を$y=ax+b$とおく。この方程式が$y=x^2-3x+2$と点$P(0, 2)$で交わることを利用する。また、判別式を利用して傾きaと接線の方程式を出す。接線の方程式$y=$あ$x+b$と$y=x^2-3x+2$との交点が点Ｐであることから直線の式を求める。接線の方程式に点Ｐの値を代入する。すると、$b=2$ということが分かる。次に、接線の方程式をはじめに与式に代入する。すると$x^2-(3+a)x+(2-b)=0$と分かる。

また判別式Ｄを用いるときに、$D=0$のとき解は重解となるのでこれより与式と接線の方程式は１点で交わると言える。

よって、判別式Ｄとし、$D=(3+a)^2-4(2-b)=0$

さきほどより$b=2$とわかっているので

$D=(3+a)^2$となり、つまり接線の傾きは-3とわかる。

$a=-3$、$b=0$を接線の方程式$y=ax+b$に代入すると、

接線の方程式は、

$y=-3x+2$

と求められた。

しかし、判別式は二次関数のときのみしか使えないので他の解法を探す。

解法２

点$P(0, 2)$とある点$Q(m, n)$を結び直線を引き、この２点間ＰＱの距離を狭めていって、ある１点に近づけ、その時の傾きを求めるという方法である。

点Ｑを点Ｐに近づけていくと、傾きがある一定の値に収束していくというものである。

この解法２では、

点Ｑを点Ｐに近づけたときの値の求め方は極限の考えを用いることができる。

$P(0, 2)$、$Q(0+h, f(0+h))$

$$\lim_{q\to p}\frac{f(q)-f(p)}{q-p} \quad \Rightarrow \quad a=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \cdots = \square$$

出た傾きａを用いて

解法１と同様に接線の方程式ｙ＝ａｘ＋ｂとおいて、点Ｐを代入、ｂの値を出し、

方程式を求める。　　　　　　　　　　　　　　　　　・・・ニュートン法

〇二回目→三回目の改善点

解法2を具体的な値で求めたが資料に記していなかったため、二点の幅を狭くする過程の式をかいた。また二次関数の問題では判別式を使用して解を求めることができるため、三次関数に変更し問題を作成した。

<u>三回目</u>

＜問題の流れ＞

問題１：二次関数の接線

解法１：既習内容である判別式を使った求め方

→　判別式は二次関数のときのみしか使えないので他の解法を探させる。

解法２：代入法（バーロウの考え）をさせる。

→　代入法で解いたあと接線の方程式を教え、解かせる。

問題２：三次関数の接線

ここで、接線の方程式を使うと三次関数でも解けることをやってみせる。

＜問題＞

問題１

$y=x^2-3x+2$ 上の点Ｐ（０，２）における接線の傾きａと接線の方程式を求める。

解法１：　（　前回の資料　）

解法２

点Ｐ（０，２）とある点Ｑを結び直線を引き、この２点の幅をどんどん狭くしてき点Ｐに近づける。その時の傾きを求める。（図１参照）

Ｐ（０，２）Ｑ（－２，１２）のとき　→　傾き：－５　　$y=-5x+2$

Ｐ（０，２）Ｑ（－１，６）のとき　→　傾き：－４　　ｙ＝－４ｘ＋２
Ｐ（０，２）Ｑ（$-\frac{1}{2}$，$\frac{15}{4}$）のとき
　　　→　傾き：－３．５　　ｙ＝－３．５ｘ＋２

Ｐ（０，２）Ｑ（$-\frac{1}{4}$, $\frac{45}{16}$）のとき

　　　→　傾き：－３．２５　ｙ＝－３．２５ｘ＋２

よって、傾きは-３に近づいているので、a=　－３であるといえる。
この傾きと点 P を用いて、初めにおいた接線の方程式　y=ax+b　に当てはめると、
　　　　２＝－３・０＋b　　,b=2 とわかるので
接線の方程式は　　ｙ＝－３ｘ＋２　　と求められて解法１と同様の解になる。

ｙ＝ｘ２－３ｘ＋２の接線の傾きは与式を微分することで求められる。
微分するとｙ＝2x-3 になる。以上より与式の接線の傾きはｙ＝2x-3 となる。
ここで、(0,2) を通ることから x=0 を代入し、傾きは-3 となる。
以上より接線の方程式は傾き-3 の１次関数より、ｙ＝-3x+b(b:定数) となる。
この１次関数が (0,2) を通ることから x=0,y=2 を代入することから b=2 と求まる。
したがって接線の方程式は ｙ＝-3x+2 である。

問題２
　ｙ＝ｘ^3－３ｘ^2＋２上の点Ｐ（１，０）における接線の傾きａと接線の方程式を求める。

点Ｐ（１，０）とある点Ｑを結び直線を引き、この２点の幅をどんどん狭くしてき点Ｐに近づける。その時の傾きを求める。

〇三回目→四回目の改善点
三次関数を用いても取り扱う接点付近は二次関数と同じであるため問題は二次関数に決定した。指導案の目標は導関数の定義に向かうので解法２のみを取扱い問題に設定した。

四回目(最終)
　関数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$とし、点 P(3,2)を通る。
　グラフ上に任意の点 Q（($f(x)$上の点）をとり、直線 L：点 PQ を結んだ直線
　とする。PQ の距離が限りなく 0 に近づくときの直線 L の方程式を求めよ。

□指導案

＜問題提示＞

関数 $f(x)=x^2-3x+2$ とし、点 P(3,2)を通る。

グラフ上に任意の点 Q（($f(x)$上の点）をとり、直線 L：点 PQ を結んだ直線とする。PQ の距離が限りなく 0 に近づくときの直線 L の方程式を求めよ。

[活動 A：点 Q を適当に値を決めて、PQ の傾きを求める]

たとえば、点 Q を(2,　0)と決めると

$f(2)=2^2-3\cdot2+2=0$　　となる。

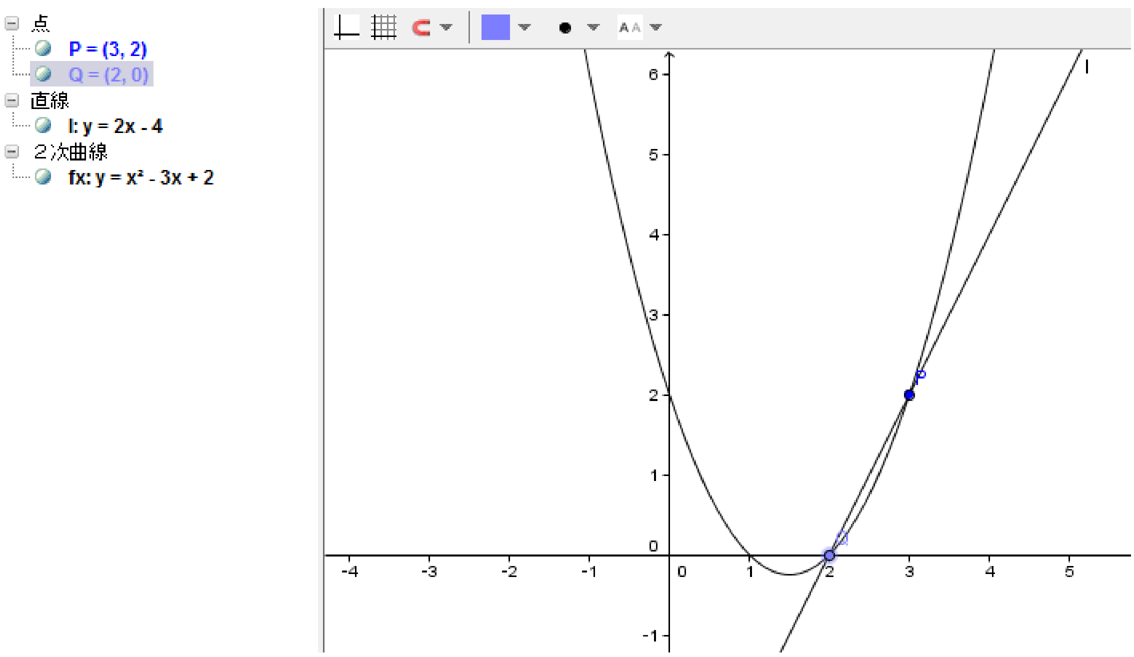
このときの、直線 L の傾きは

$$\frac{0-2}{2-3}=\frac{-2}{-1}=2$$

と求めることができるので、このときの傾きは 2 となる。

また、このときの図は以下のようになる。

[図 A-1]



一般的な支援：「題意に合うように Q の値を変えてみよう。」

特殊な支援：「座標を近づけていくと、傾きの値はどうなる？」

価値：具体的な値をとり問題を簡略化することで解の見通しをつける

[活動 B：Q_1、Q_2、Q_3　を点 P に近づけていくことによって PQ_n の直線の傾きがある値 m に近似されることに気付く]

(1)点 Q の x 座標が 2.5　のとき

f(2.5)= $(2.5)^2-3\cdot(2.5)+2=0.75$

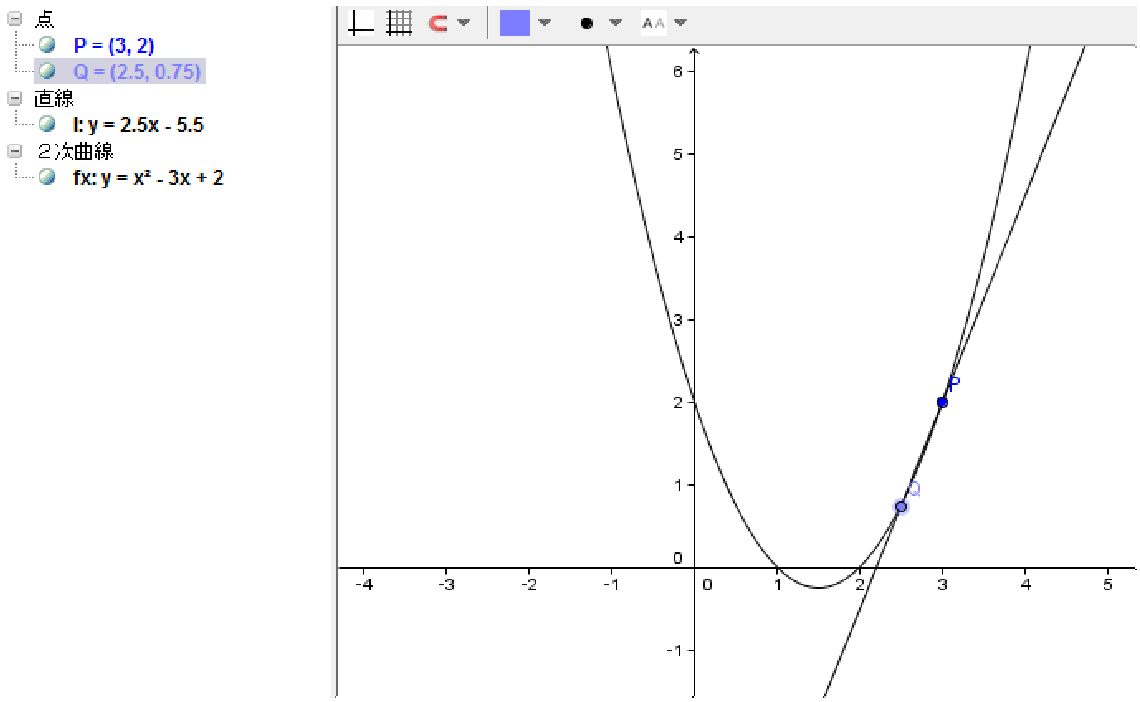
$$\frac{0.75-2}{2.5-3}=\frac{-1.25}{-0.5}=2.5$$

よって、傾きは 2.5 となるのでこのときの直線 L の方程式は

L：y=2.5x−5.5　　　　となる。

このときの、図は以下のとおり

[図 B-1]



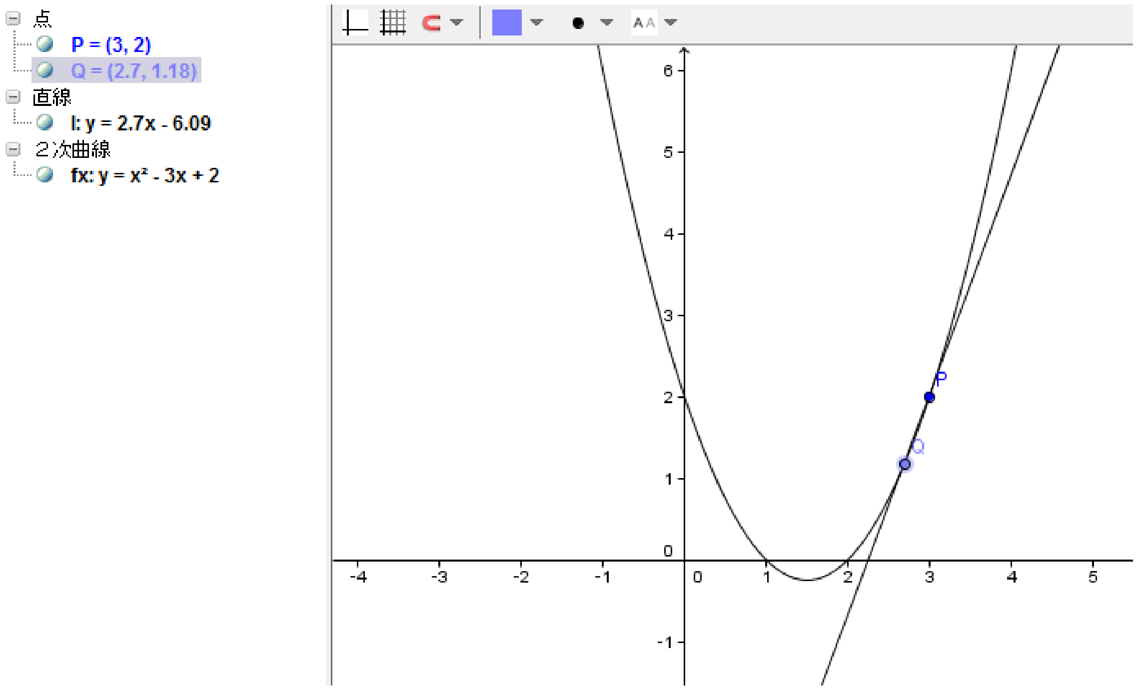
(2)点 Q の x 座標が 2.7 のとき

$f(2.7)=(2.7)^2-3\cdot(2.7)+2=1.19$

$$\frac{1.19-2}{2.7-3}=\frac{-0.81}{-0.3}=2.7$$

よって、 L：y=2.7x－6.1 となる。

[図 B-2]



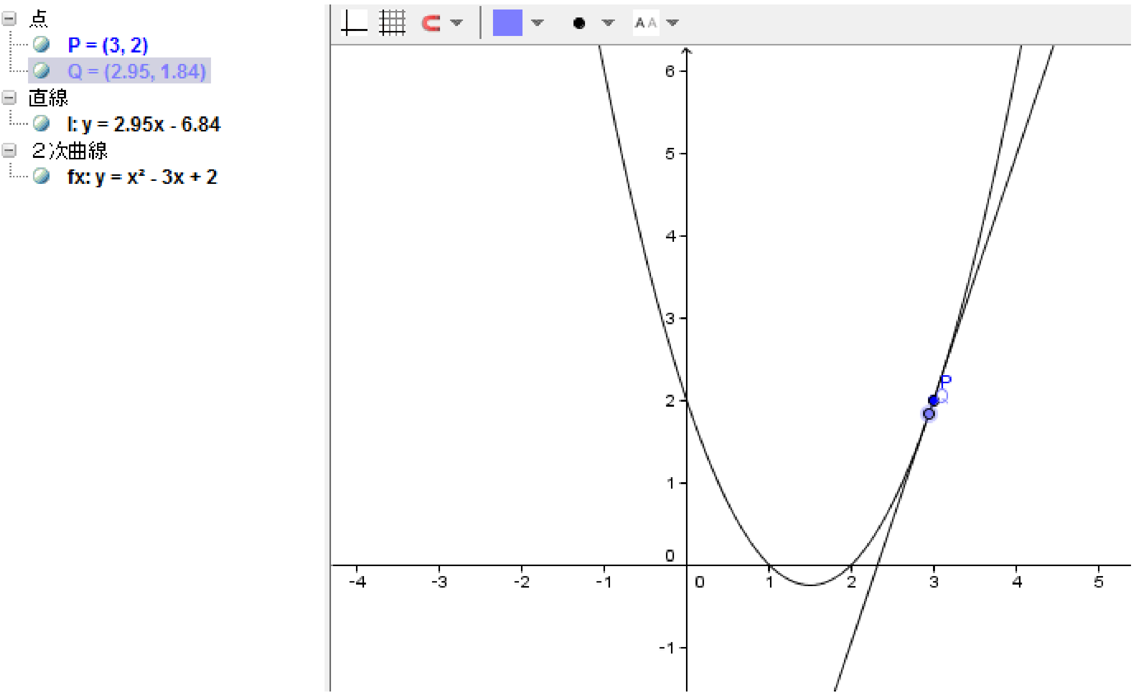
(3)点 Q の x 座標が 2.95 のとき

$f(2.95)=(2.95)^2-3\cdot(2.95)+2=1.8525$

$$\frac{1.8525-2}{2.95-3}=\frac{-0.1475}{-0.05}=2.95$$

よって、 L：y=2.95x－6.85 となる。

[図 B-3]



ゆえに、(1)~(3)より

傾きが　2.5 → 2.7 → 2.95 → …　と 3 に近づいていることがわかる。

つまり、L の傾きは **3** に**近似**されていることがわかる。

一般的な支援：PQ の関係を文字で表すとどうなる？ 特殊な支援：点 Q が(a, b)のときの傾きはどうなる？
価値：計算の結果から値が傾きの値に近づいていくこがわかる

【活動 C：点 Q の値を変数で表し、PQ の距離が 0 に近づくことを考える】

点 Q を(a，b)のときの傾きを求めると

$$\frac{b-2}{a-3}$$ となる。

PQ の距離が限りなく 0 に近づくとき、a－3 が限りなく 0 に近づくと考えると

$$\lim_{a-3\to 0}\frac{b-2}{a-3}$$ という式が求まる。

ここで b を a を用いて表すと、b=f(a)であるので

$$\lim_{a-3\to 0}\frac{f(a)-2}{a-3} = \lim_{a-3\to 0}\frac{\mathrm{a2}-3\mathrm{a}+2-2}{a-3}$$

$$= \lim_{a-3\to 0}\frac{a2-3a}{a-3}$$

a－3=h とおくと、 $\lim_{h\to 0}\frac{h(h+3)}{h} = 3$ となり

これより、求める方程式の傾きは 3 で方程式は L：y=3x－7

となる。

一般的な支援:点 P も変数におくと傾きを求める式はどうなる？

特殊な支援：点 Q を(a，f(a))、点 P を(b，f(b))とおいてみよう。

価値：点 Q に変数を用いることで、点 Q の値を一般化する。

[練り上げ]
先生(T)、生徒(S)とする。

〈問題〉
関数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$とし、点 P(3,2)を通る。
グラフ上に任意の点 Q（ ($f(x)$上の点）をとり、直線 L : 点 PQ を結んだ直線とする。PQ の距離が限りなく 0 に近づくときの直線 L の方程式を求めよ。

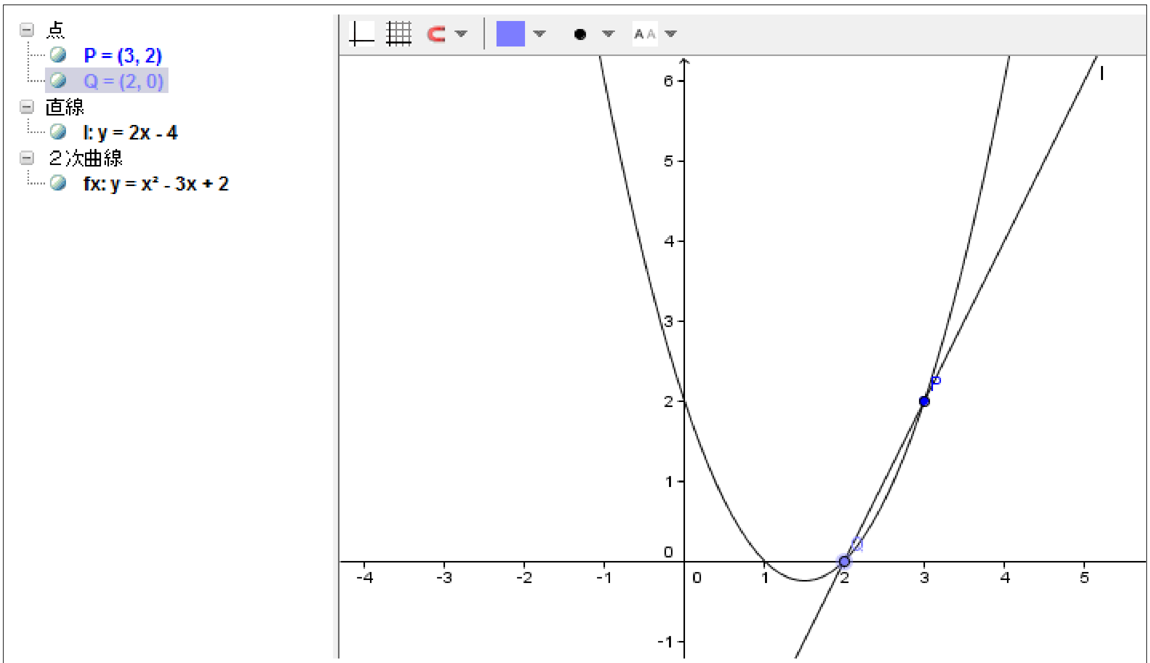
〇活動 A : 点 Q を適当に値を決めて、PQ の傾きを求める。

(S)「点 Q はどんな点でもいいですか？」
(T)「関数 f (x)のグラフ上の点ならどこでもいいですよ。例えば点(2,0)でやってみたらどうですか?」

点 Q を(2，0)と決めると
$f(2)=2^2-3\cdot2+2=0$　　となりますよね。
このときの、直線 L の傾きは

$$\frac{0-2}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$$

となり、このときの傾きは 2 となります。
また、このときの図は以下のようになります。



○活動 B：Q_1、Q_2、Q_3　を点 P に近づけていくことによって PQ_n の直線の傾きがある値 m に近似されることに気付く]

(T)「グラフを見て、二点の距離がゼロに近づくにはどうしたらいいと思いますか？」
(S)「点 Q の x 座標を 3 に近づけていったらいいと思います。」
(T)「では、やってみましょう。」

(1)点 Q の x 座標が 2.5 のとき
　f(2.5)= $(2.5)^2$－3・(2.5)＋2=0.75　　となるので

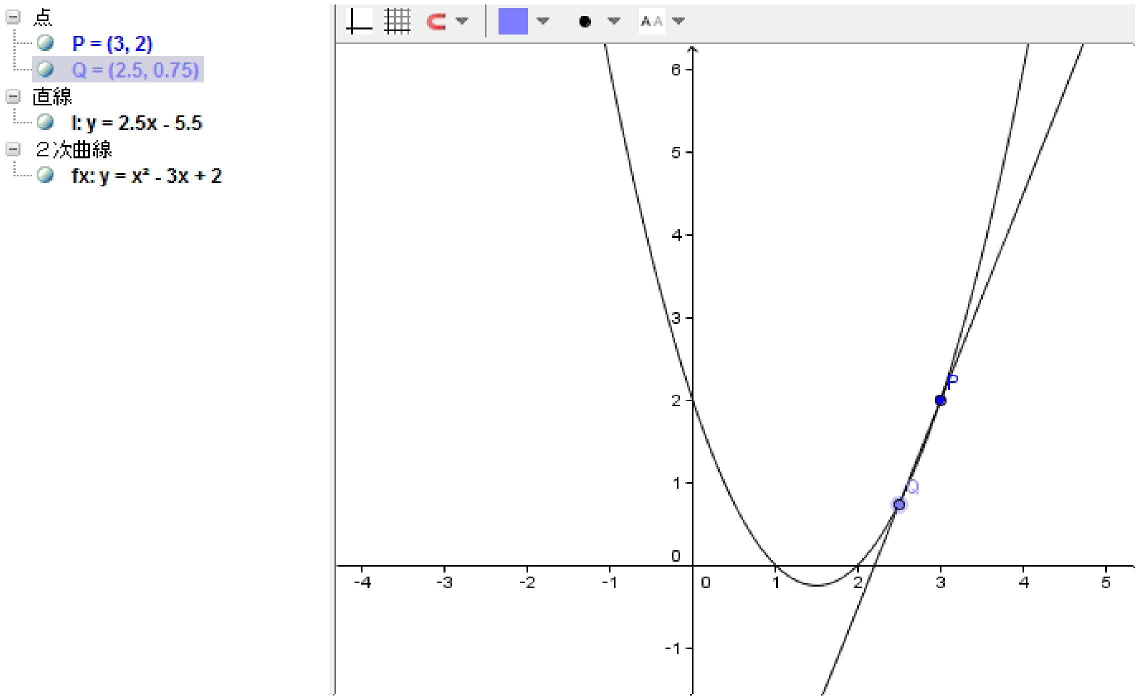
$$\frac{0.75-2}{2.5-3} = \frac{-1.25}{-0.5} = 2.5$$

よって、傾きは 2.5 となるのでこのときの直線 L の方程式は

L：y=2.5x－5.5　　　　　　となります。

このときの、図は以下のとおりです。

[図 B-1]



2)点 Q の x 座標が 2.7 のとき

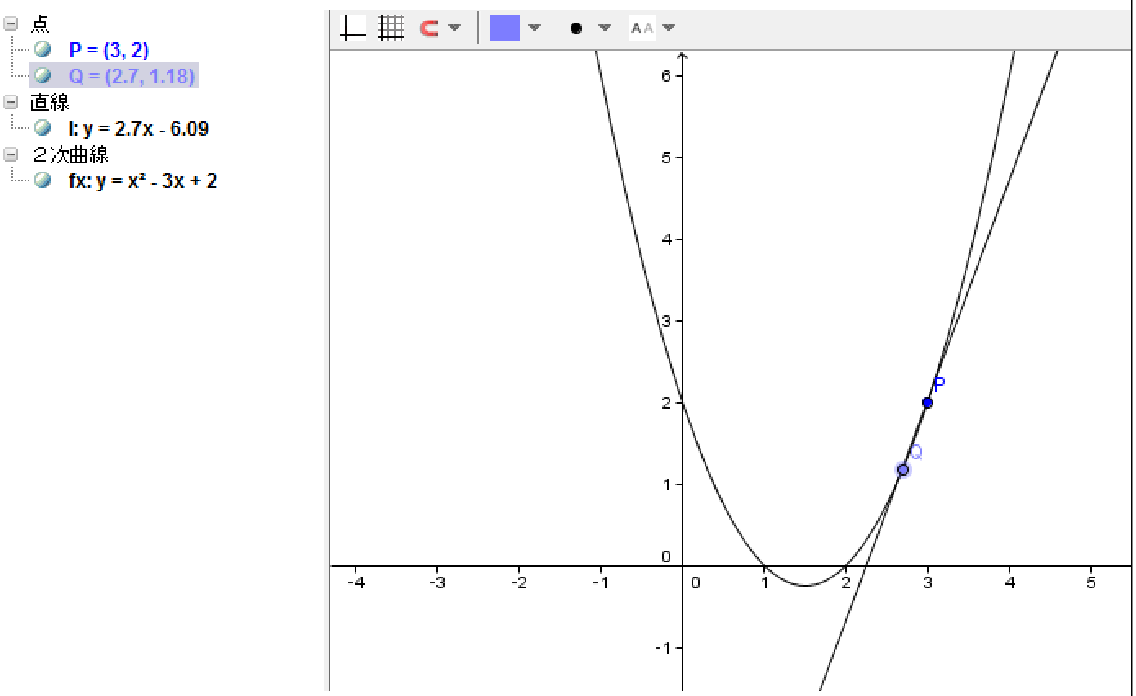
f(2.7)= $(2.7)^2 - 3 \cdot (2.7) + 2 = 1.19$ となるので

$$\frac{1.19 - 2}{2.7 - 3} = \frac{-0.81}{-0.3} = 2.7$$

よって、直線 L は L : $y=2.7x-6.1$ となります。

図は、以下の通りです。

[図 B-2]



(3)点 Q の x 座標が 2.95 のとき

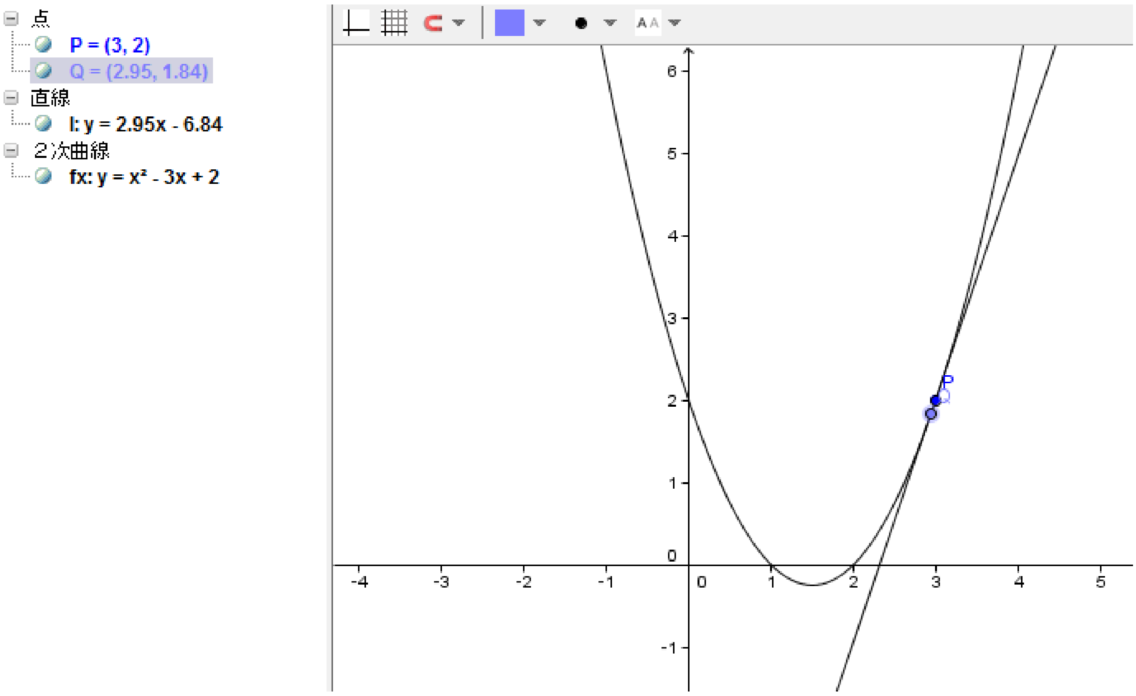
f(2.95)= $(2.95)^2-3\cdot(2.95)+2=1.8525$　となるので

$$\frac{1.8525-2}{2.95-3} = \frac{-0.1475}{-0.05} = 2.95$$

よって、直線 L は　L : y=2.95x−6.85　となります。

図は以下の通りです。

図 B-3]



ゆえに、(1)~(3)より

傾きが　2.5 → 2.7 → 2.95 → … と 3 に近づいていることがわかりますね。

つまり、L の傾きは **3** に**近似**されていることがわかります。

○【活動 C：点 Q の値を変数で表し、PQ の距離が 0 に近づくことを考える】

(T)「本当に傾きは 3 になるのかな？

点 Q を具体的な点ではなく、点(a,b)で考えてみたらどうなりますか？」

(S)「やってみます。」

点 Q が(a，b)のときの傾きは

$$\frac{b-2}{a-3}$$

となります。

(S)「傾きは出しましたが、二点の距離を 0 にするにはどうしたらいいかわかりません。」

(T)「具体的な点で傾きを考えたときに点 Q の x 座標を 3 に近づけるといいと言いましたね。それを式に表してみるとどうなりますか？」

PQ の距離が限りなく 0 に近づくとき、a－3 が限りなく 0 に近づくと考えると

$$\lim_{a-3\to 0}\frac{b-2}{a-3}$$

という式が求まります。

ここで b を a を用いて表すと、b=f(a)であるので

$$\lim_{a-3\to 0}\frac{f(a)-2}{a-3} = \lim_{a-3\to 0}\frac{\text{a2}-3\text{a}+2-2}{a-3}$$

$$= \lim_{a-3\to 0}\frac{a2-3a}{a-3}$$

a－3=h とおくと、 $\lim_{h\to 0}\frac{h(h+3)}{h} = 3$ となり

これより、求める方程式の傾きは 3 で方程式は L：y=3x－7

となります。

○[さらに点 P の値を変数で表し、PQ の距離が 0 に近づくことを考える。]

(T)「この直線は点 P における接線の方程式ですよね？
では点 P(3,2)と問題で定まっていましたが、さらに点 P も変数で表したときの点 P における傾きを求めてみましょう。

点 P の x 座標を a とすると点 P(a，f(a))、同様にすると点 Q を(b，f(b))となるよね。そのときの直線の傾きは

$$\lim_{b-a\to 0}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となりますよね。

これを、b－a=h とおくと

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と表せますね。

これより、f(a)の x=a における微分係数の定義を導くことができます。」

□個人の感想

北村　恭平

今回、単元を「微分」の接線の方程式としました。「微分」は、大学でも用いられる単元の一つであり、また、高校数学においても代表する単元の一つであります。しかし、高校においては、定義に対して説明が省略されており、理解に欠ける部分があったのではないかと思い、今回これを選びました。まず、この講義で数学史、数学の歴史 を調べることから、微分・積分の根元を知ることができました。そこから極限の考えを使わずに微分係数などの求め方、バーローの考え方も知ることができました。その後、問題の作成においては、目標が定まらず、迷走していたが接線の方程式の問題へとたどり着きました。

今回、一番の難点であったのは、問題作成でした。最初は接線の方程式の問題を判別式を用いて解くことなど、色々していたが、『自分たちがいったいしたいことは何なのか？』ということを考え直すと、微分係数のことをやりたかったので、接線の傾きに関して、重点をおいて、問題作成に取り組みました。またそれに似合った活動、支援、練り上げも考えました。

数学授業設計を通して、こんなにも、授業ひとつの設計をするのに、時間がかかるとは思いもよらなかっです。僕が受けてきた高校までの授業というものは、問題の解き方を教わるのみで、定義、公式の意味、使う意図などはほとんど触れられなかったような授業でした。

今回のこの講義を活かせるように、今後の教育実習などに向かっていきたいと思います。

和田　匠馬

私が学習指導設計を通して印象深いのは歴史である．私たちの班は比較的歴史について調べている時間が長く，その分理解が深まった．過去に数学史については触れたことがなく，新鮮なものであった．コーシーで連続性，カントールで集合論，バローで積分と微分の相互性を学んだ．また，平成 19 年度出版　数学Ⅱ　啓林館でも扱われているグラフはバローの考えであることも新たに学んだことである．次に問題作成にとても苦戦したのが思い出せる．生徒に微分の何を理解してもらいたいか，に考えを置き，微分の入りを物理学的にアプローチすることは今でも大切なことだと考える．しかし私たちの班が行き着いたところは，導関数の定義式がどういった形で生み出されたのか，定義式を覚え，計算に活用するだけでなく，定義式自信に価値を感じてもらうことを一番と考えた．その後の期待する活動や，支援，練り上げに関しては数学学習指導論と並行して教養を深めた．と同時に，私がとても楽しく，充実感を受けたのは毎回の授業でのほかの班の発表である．違う単元でそれぞれが工夫してオリジナリティある発表を行っていた．自分の班の調べたことはもちろんではあるが，他の班が調べたことも今後理解を深めることを課題として感想とする

鶴江　大輝

今回この数学指導設計の授業で、はじめて一つの授業の単元を決めて一から自分たちで指導案作りをしました。思っていたのとは違って、数学史を調べたり問題も自分たちで作成して、そこから指導案作成を行うのはとても大変でした。自分にはまだまだ知識不足なところがたくさんあると改めて感じさせられました。

また、活動や支援を考えるにあたって自分が生徒の立場に立って疑問に感じる点を予想し、そのときに対する支援をあらかじめ予想しておくことで授業をスムーズにおこなうことができる。これは、とても重要なことであると思いました。

将来自分が教師として生徒たちにわかりやすい授業を行うには、知識や理解力の向上と、実際に起きる問題点の予想、またそれに対する支援作りもしっかり行ったうえで指導案作りをしたいと思います。

坂元里佳子

私はまだ指導案を作成したことがなく教育実習前に良い経験になるなと思い、
本講義を受けました。本講義を通して、数学史や過去の教科書を調べ、いかに教材研究が大切で重要視すべきかを学びました。同時に、自分にはまだ１つの指導案をつくれるだけの知識や力、理解もないのだなと痛感しました。

今後の課題として“おもしろい”問題を考えることができるまでの教材への理解
を深めることを挙げ、教育実習へ行かせていく際には子どもがたのしみながら真に理解できる授業を展開できるような指導案を自分１人でも作成できるよう勉強していきたいと思っています。

新　渚

この講義を受講して、最初のほうに班員で単元を決めた。その際に微分を公式として覚えるのではなく、微分のもつ意味を知ってもらいそれがしっかり生徒の記憶に残るような授業がしたいと思った。やはり伝えるためには自分たちも理解しなければならないということで、数学史について何冊も分厚い本を手に取り読んでみたが、全部を理解することはやはり難しく、理解できたかといわれればはっきり「はい。」とは言うことはできないと思う。だが数学史を調べたことで、自分が持っていない知識を得ることができるとともに、成り立ちを理解する重要性に改めて気付いた。高校生になり、公式がたくさんでてくると生徒は公式を覚えることに走るが、成り立ちさえ分かっていれば公式を導くこともできるし、どのような場面で使うのかをはっきり認識し使うことができる。問題を公式を覚えて単に解こうとするのではなく、自分で筋道をたてて解決しいろんな角度から数学を考える生徒が増えるような授業をつくっていきたいと思った。この授業を受けたことで私たちが受けた数

学の授業を見直すことが必要だなと感じた。初めての指導案作りで戸惑い難しいこともあったが、これからそのような授業をつくるための勉強をしっかりしていこうと思った。