2013 年度

# 数学指導設計Ⅱ

## 「二次関数」

テーマ：図と式の変換

H1 班

森野 宗一郎

三嶋 一生

原 尚央

堀 和也

# 目次

## 1. 単元設定の範囲と理由



## 2. 教材研究

## 3. 指導計画



## 4. 参考文献

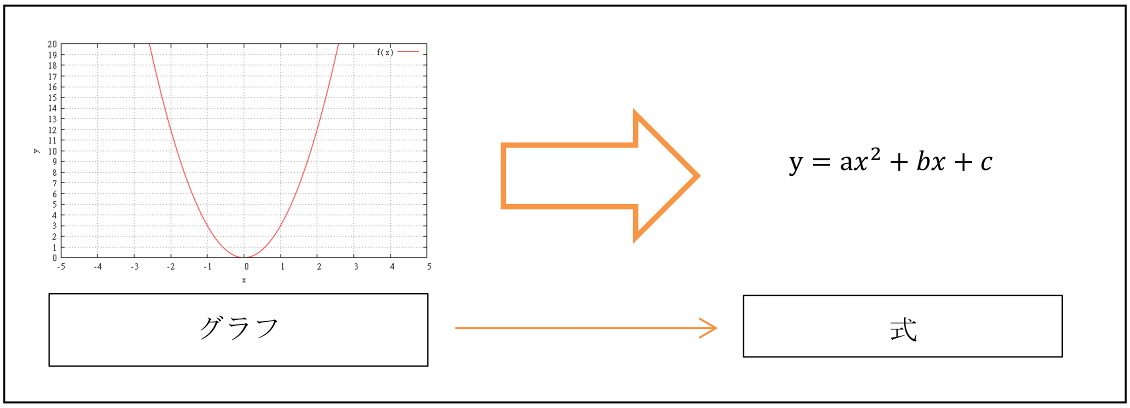


## 5. 総括

# 1. 単元設定の範囲と理由

## 1.1 単元の範囲

高等学校 1 年生で扱う二次関数
主に、グラフと式との関係について




## 1.2 設定理由

私たちがこの範囲を設定しようと考えた理由は、第一に、自分たちの経験からです。
4 人とも、高校に入学して最初に躓いたのが二次関数であり、高校数学の得意不得意の分岐点であると考えました。
第二に、二次関数は式をグラフ化することによって視覚的にとらえることができ、問題の解決や意思決定・予測を行う上での手段として様々な問題を理解する助けとなり、非常に重要だと考えこの単元に設定しました。

# 2. 教材研究

## 2.1 学習指導要領の変遷

昭和２２年度には、高等学校の数学学習指導要領がなかったので、「学習指導要領　算数科・数学科編（試案)」をみることにした。この学習指導要領では、現在の小学第一学年から中学第三学年までを第一学年から第九学年までとしていて、数学学習指導設計Ⅱの授業で僕たちが行う現在の高校１年次で習うところの「数学Ｉ」、「二次関数」は詳しく扱われていなかった。
僕たちが行う二次関数が登場するのは昭和２６年度の「学習指導要領　数学科編（試案）改訂版」からである。この昭和２６年度の学習指導要領から現在の学習指導要領まで、「数学１・A」、「二次関数」がどのように扱われてきたか変遷を見て行こうと思う。

### 2.1.1 昭和 22 年度版

高等学校の数学の学習指導要領がなかったので、省略。
戦後、間もなくで「義務教育」を早急の課題としたため専門知識は優先されなかった。

### 2.1.2 昭和 26 年度版

Ａ．目的
　１．関数の概念を理解し，これを用いる能力を養う
　２．式やグラフで関数の関係を表わすことの意味を理解し用いる能力を養う。
　３．一般の比例，二次，および，三角関数の性質を理解し用いる能力を養う。
Ｂ．内容
　ａ．　関数関係を具体的な場面に見いだす。
　ｂ．　二次式のグラフ
　ｃ．　二次式の変化を一次式や比例の変化と比較して特徴を知る。
　ｄ．　グラフを利用して，二次方程式や二次の不等式で表わされる問題を解決する。
Ｃ. 前年度との比較
　前年度版は高等学校の数学の学習指導要領がなかったので、省略。
Ｄ．背景

戦後間もなく。生活関連に重きが置かれていた。

### 2.1.3 昭和 31 年度版

A. 目的

独立変数をしだいに増加させ、それに対する従属変数の増加減少の様子をとらえることによって，関数の特徴を明らかにする。そして，いろいろな現象が関数として数学的にとらえられることを明らかにする

B. 内容

a. 二次関数の平方完成、グラフの対称性，頂点の位置，関数の最大値・最小値

b. 放物線の平行移動とそれに伴う式の変化

c. ２乗に比例・反比例、平方根に比例・反比例する関数の特徴や式の形とグラフ

d. ２変数の関数の例として，複比例。

C. 前年度との比較

前年度では関数の概念について（関数関係を具体的な場面に見いだすなど）の学びが内容を占めているが、31 年度版では関数の性質（頂点の位置，関数の最大値・最小値など）の学びに変更されている

### 2.1.4 昭和 35 年度版

A. 目的

関数の概念の理解を深め，初等的な関数について，その関数の特徴を明らかにする。

B. 内容

グラフの対称性と頂点

無理関数、分数関数

C. 前年度との比較

昭和４５年度の所に書くので、省略。

### 2.1.5 昭和 45 年度版

A. 目的

目的二次関数など簡単な関数の特徴について理解させる。

B. 内容

ア　二次関数，関数　ｙ＝ａｘ＋ｂ／ｃｘ＋ｄ

二次関数の逆関数については，ｙ＝$\sqrt{ax+b}$の程度とする。

イ　指数関数，対数関数の意味

対数計算は取り扱わないものとする。

ウ　用語および記号

累乗根，指数法則，底，指数関数，対数，対数関数，$\log_a x$

C. 前年度との比較

昭和３５年度から無理関数、分数関数、昭和４５年度からは逆関数、対数関数、指数関数など種類が具体的に明記され始めた。

D．背景

ソ連が 1957 年（昭和 32 年）に人工衛星スプートニク 1 号の打ち上げに成功した。これによってアメリカで、ソ連に対抗するために「教育内容の現代化運動」と呼ばれる小中学校からかなり高度な教育を行なおうとする運動が起こった。これが反映されたカリキュラム。

## 2.1.6 昭和 53 年度版

A. 目的

数，式，関数及び図形に関する理解を深め，基礎的な知識の習得と基礎的な技能の習熟を図るとともに，事象の考察に当たってそれらを的確に活用する能力を伸ばす.

B.内容

a. 二次関数

b. 簡単な分数関数，無理関数

c. 逆関数

（$y=\frac{ax+b}{cx+d}$，$y=\sqrt{ax+b}$ の程度の関数を扱う）

C. 前年度との比較

・設置されてから一貫して「数学 I」の内容であった三角関数・指数関数・対数関数が「数学 II」（2～3 年次相当）.「基礎解析」（2 年次相当）へ、逆関数および集合は前年度版では中学校の内容だったが、この版で「数学 I」に移行された。

## 2.1.7 平成元年度版

A.目的

具体的な事象の考察を通して、二次関数について理解させ、基礎的な知識の習得と技

能の習熟を図り、それらを的確に活用する能力を伸ばすとともに、数学的な見方や考え方のよさについて認識を深める。

B.内容

a. ニ次関数とグラフ

b. 二次関数の最大・最小

c. 二次方程式と二次不等式

C. 前年度との比較

昭和３５年度から具体的に明記され始めた関数の種類が省かれた。(「数学Ⅱ」、「数学Ⅲ」の範囲になった。)

D. 背景

・基礎基本の定着に重きが置かれた。

・ゆとり教育が反映された。

(小・中学校で後回しにされたものを「数Ⅰ」で行い、「数Ⅰ」の内容は「数Ⅱ」、「数Ⅲ」におくられた。)

### 2.1.8 平成 10 年度版

A.目的

二次関数について理解し，関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識するとともに，それを具体的な事象の考察や二次不等式を解くことなどに活用できるようにする。

B.内容

a.二次関数とグラフ

b.二次関数の最大・最小

c. 二次不等式

C. 前年度との比較

あまり変化は見られなかった。

### 2.1.9 平成 15 年度版

A. 目的

二次関数について理解し，関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識するとともに，それを具体的な事象の考察や二次不等式を解くことなどに活用できるようにする。

B. 内容

a.二次関数とグラフ

b.二次関数の最大・最小

c. 二次不等式

C. 前年度との比較

あまり変化は見られなかった。

### 2.1.10 平成 21 年度版

A. 目的

二次関数とそのグラフについて理解し、二次関数を用いて数量の関係や変化を表現することとともに、それらの事象の考察に活用できるようにする。

B. 内容

a.二次関数とそのグラフ

b.二次関数の最大・最小

c.二次方程式、二次不等式

## 2.2 高校教数学科書における二次関数の取り扱い

この章では、H20年度版「数学Ⅰ」の教科書での「東京書籍」「数研出版」「啓林館」の三社の二次関数（グラフの書き方）の取り扱い方を調べた。

### 2.2.1 東京書籍

東京書籍「数学Ⅰ」H19 年度版では、図 1 の目次で見た通り、二次関数は第 3 章で扱われており、

「1 節 関数とグラフ」と「2 節 二次関数のグラフと二次不等式」の計 40 ページ（全体の約 25%）で構成されている。

扉のページでは、一次関数との図（直線と放物線）の違いについて紹介している。

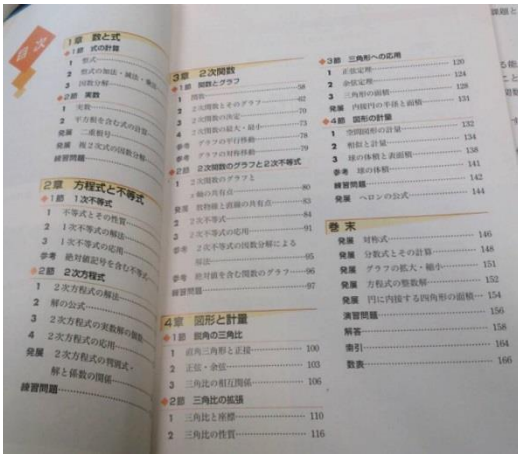
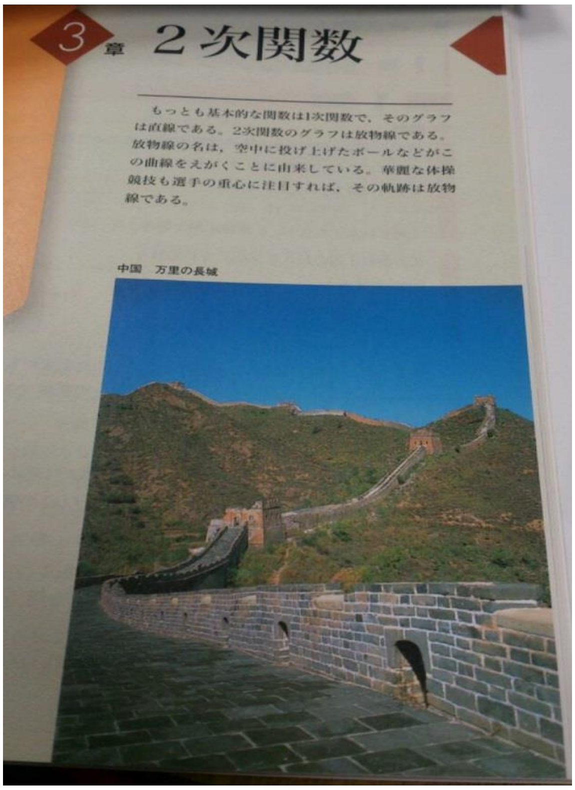




図 1）東京書籍 H19 目次



3章 2次関数

もっとも基本的な関数は1次関数で、そのグラフは直線である。2次関数のグラフは放物線である。放物線の名は、空中に投げ上げたボールなどがこの曲線をえがくことに由来している。華麗な体操競技も選手の重心に注目すれば、その軌跡は放物線である。

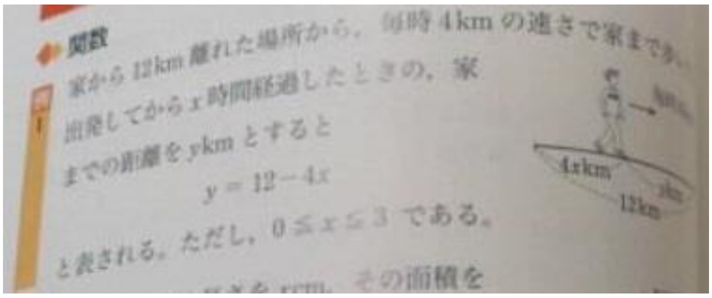
中国　万里の長城

図 2）東京書籍 H19「二次関数」 扉のページ

1節　関数とグラフ

1. 関数

○まず最初に関数の定義が説明されている。



関数

家から12km離れた場所から、毎時4kmの速さで家まで歩

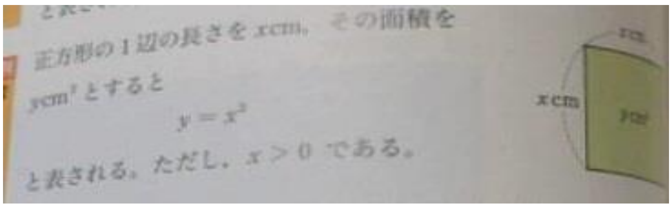
出発してから $x$ 時間経過したときの、家までの距離を $y$km とすると

$$y = 12 - 4x$$

と表される。ただし、$0 \leqq x \leqq 3$ である。



図 3）東京書籍 H19 例 1



正方形の1辺の長さを $x$cm、その面積を $y$cm² とすると

$$y = x^2$$

と表される。ただし、$x > 0$ である。



図 4）東京書籍 H19 例 2

「2 つの変数 x , y があって, x の値を定めるとその値に応じて y の値がただ 1 つだけ定まるとき、 **y は x の関数**であるという。」
y＝f(x)、y＝g(x) などと表し、f(a) を x＝a のときの**関数 f(x)の値**という。

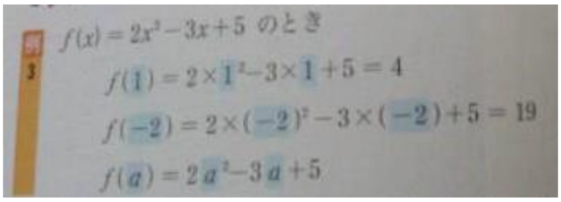

例3 $f(x)=2x^2-3x+5$ のとき
$f(1)=2\times1^2-3\times1+5=4$
$f(-2)=2\times(-2)^2-3\times(-2)+5=19$
$f(a)=2a^2-3a+5$

図 5）東京書籍 H20 例 3
問1） f(x)=$2x^2-2$ のとき、f(0)、f(1)、f(-2)、f(a+1) を求めよ。

〇次に関数のグラフについての名称、定義が説明されている。(図 6,7)。
　一次関数のグラフを載せ、具体例も挙げていた。

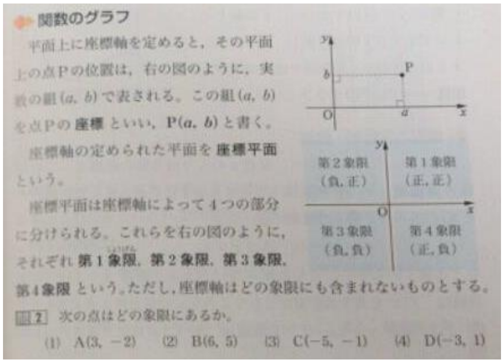

関数のグラフ
平面上に座標軸を定めると，その平面上の点Pの位置は，右の図のように，実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点Pの**座標**といい，P(a, b) と書く。
座標軸の定められた平面を**座標平面**という。
座標平面は座標軸によって4つの部分に分けられる。これらを右の図のように，それぞれ**第1象限**，**第2象限**，**第3象限**，**第4象限**という。ただし，座標軸はどの象限にも含まれないものとする。
問2 次の点はどの象限にあるか。
(1) A(3, −2)　(2) B(6, 5)　(3) C(−5, −1)　(4) D(−3, 1)


図 6）東京書籍 H19 関数のグラフの名称

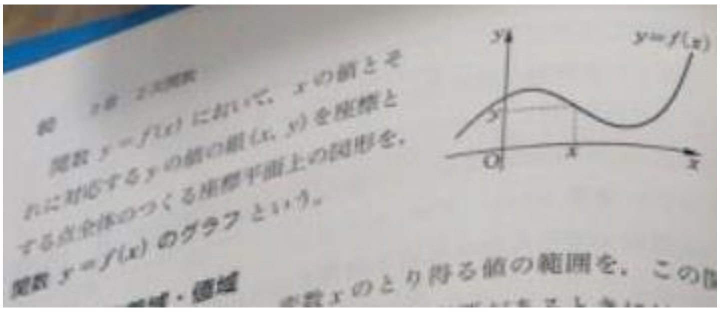

関数 y＝f(x) において，x の値とそれに対応する y の値の組 (x, y) を座標とする点全体のつくる座標平面上の図形を，関数 y＝f(x) のグラフという。


図 7）東京書籍 H19 関数のグラフの定義

〇関数の定義域・値域
まず、定義域の定義
「関数 y=f(x) において、変数 x のとり得る値の範囲を、この関数の定義域という。」
が説明されていて、

表記の仕方の具体例

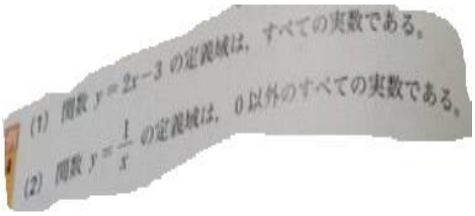
ｙ＝12－4ｘ　（0≦ｘ≦3）

と例（図 8）が書かれていた。

次に、値域の定義

「関数 y=f(x) において、x が定義域内のすべての値をとるときの y の値全体を、この関数の値域という。」

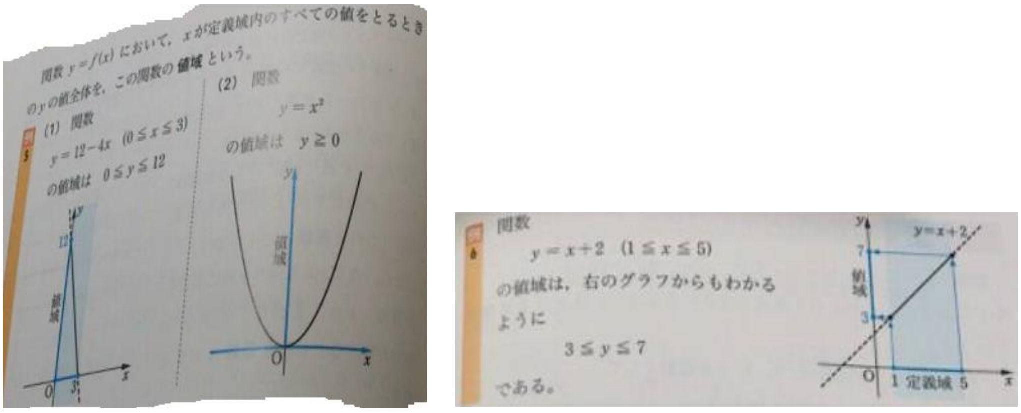
が説明されて、その後に例（図 9）が書かれ最大値、最小値が説明されている。



(1) 関数 $y=2x-3$ の定義域は，すべての実数である。

(2) 関数 $y=\frac{1}{x}$ の定義域は，0 以外のすべての実数である。

図 8）東京書籍 H19 定義域の例



関数 $y=f(x)$ において，$x$ が定義域内のすべての値をとるときの $y$ の値全体を，この関数の**値域**という。

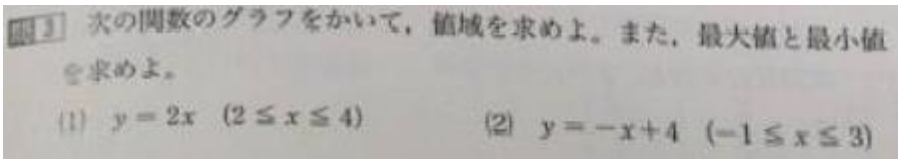
(1) 関数 $y=12-4x$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の値域は $0 \leqq y \leqq 12$

(2) 関数 $y=x^2$ の値域は $y \geqq 0$

関数 $y=x+2$ $(1 \leqq x \leqq 5)$ の値域は，右のグラフからもわかるように $3 \leqq y \leqq 7$ である。



図 9）東京書籍 H19 値域の例



問3 次の関数のグラフをかいて，値域を求めよ。また，最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=2x$ $(2 \leqq x \leqq 4)$　(2) $y=-x+4$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$

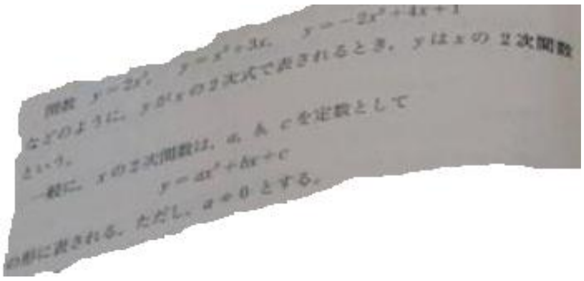
図 10）東京書籍 H19 値域、最大値、最小値の問題

〇いろいろな関数

ここで、「関数には、グラフがつながった曲線にならないものもある。」ことを説明している。

2.　二次関数とそのグラフ

〇まず始めに二次関数の定義が説明されている。（図 11）



関数 $y=2x^2$, $y=x^2+3x$, $y=-2x^2+4x+1$
などのように、$y$ が $x$ の2次式で表されるとき、$y$ は $x$ の 2次関数
という。
一般に、$x$ の2次関数は、$a$, $b$, $c$ を定数として
$$y=ax^2+bx+c$$
の形に表される。ただし、$a \neq 0$ とする。

図 11）二次関数の定義

その後に下の練習問題がきている。

「長さ 10 ㎝の線分上に、AC が x ㎝となるように点 C をとって、AC、CB を 1 辺とする正方形をそれぞれか。これらの 2 つ正方形の面積の和を$cm^2$とすると、 y は x の 2 次関数である。この 2 次関数を求めよ。また、その定義域をいえ。」

〇この後に具体的な形（1.y=a$x^2$ 2. y=a$x^2+q$ 3. y=a$(x-p)^2$ 4.y=a$(x-p)^2+q$ 5. y=a$x^2+bx+c$）のグラフについて説明されている。

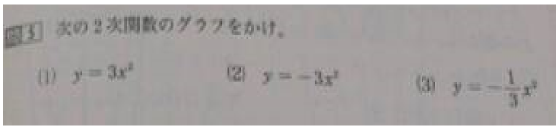
1. y=a$x^2$

   復習のために取り扱われている。

   放物線;「y=a$x^2$のグラフを放物線という。」、軸;「一般に放物線の対称軸を軸」、頂点 ;「軸と放物線の交点を頂点という。」 もここで説明されている。

   「a>0 のときは下に凸、a<0 のときは上に凸」とグラフを用いて説明している。

   この後、グラフを描かせる練習問題（図 12）がきている。

   問3 次の2次関数のグラフをかけ。

   (1) $y=3x^2$　(2) $y=-3x^2$　(3) $y=-\frac{1}{3}x^2$

   図 12）グラフを描かせる問題

   次に平行移動 ;「図形を、一定方向に、一定距離だけ動かす移動を平行移動という。」について説明されている。

   最後に、

   「ここでは、2 次関数の式と、そのグラフの平行移動について調べてみることにしよう。」

   と書いてあり次の関数につなげている。

   次の関数からは表（図 13、14）を用いて平行移動の技術を使って、既知の関数のグラフを平行移動して新しい関数のグラフを説明している。

   その説明後、練習問題（図 17～20）でその形の関数のグラフを描かせている。

2. y=a$x^2+q$

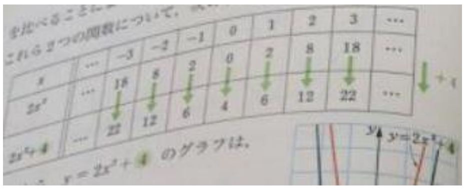



図 13）平行移動する前の既知の関数と新しい形の関数の表

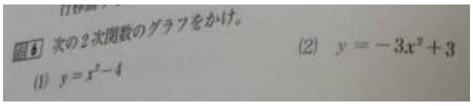



図 17）グラフを描かせる問題

3. $y=a(x-p)^2$

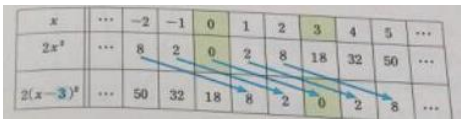



図 14）平行移動する前の既知の関数と新しい形の関数の表

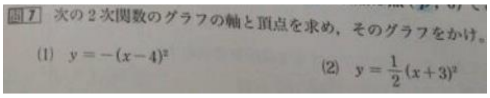
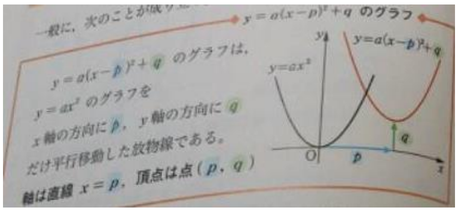



図 18）グラフを描かせる問題

4. $y=a(x-p)^2+q$

x 軸方向にも、y 軸方向に平行移動させたグラフの式の形は、一般形としてまとめられている。（図 15）



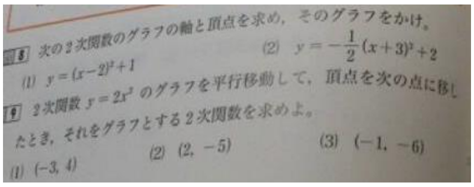



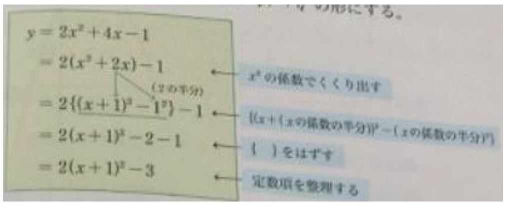

図 15）$y=a(x-p)^2+q$のグラフ　　　図 19）練習問題

また、ここでの問題はグラフを描かせる問題だけでなく、逆に平行移動させたときの二次関数を求める問題も出されている。

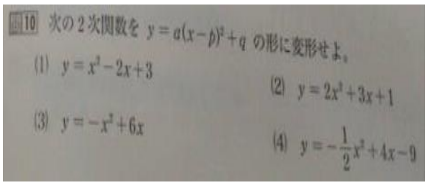
5. $y=ax^2+bx+c$

この式を 4.の形に変形することでグラフの形を求めている。（図 16）

ここで、平方完成；「$ax^2+bx+c$を $a(x-p)^2+q$の形に変形することを平方完成という。」が説明される。



$y = 2x^2 + 4x - 1$
$= 2(x^2 + 2x) - 1$ ← $x^2$ の係数でくくり出す
$= 2\{(x+1)^2 - 1^2\} - 1$ ← $\{(x+(x$の係数の半分$))^2-(x$の係数の半分$)^2\}$
$= 2(x+1)^2 - 2 - 1$ ← ( )をはずす
$= 2(x+1)^2 - 3$ ← 定数項を整理する



10 次の2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ。
(1) $y=x^2-2x+3$ (2) $y=2x^2+3x+1$
(3) $y=-x^2+6x$ (4) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-9$

図 16）平方完成のやり方　　　　　　　図 20）練習問題

次のページからは、さっきとは違った練習問題が出されている。（図 21）

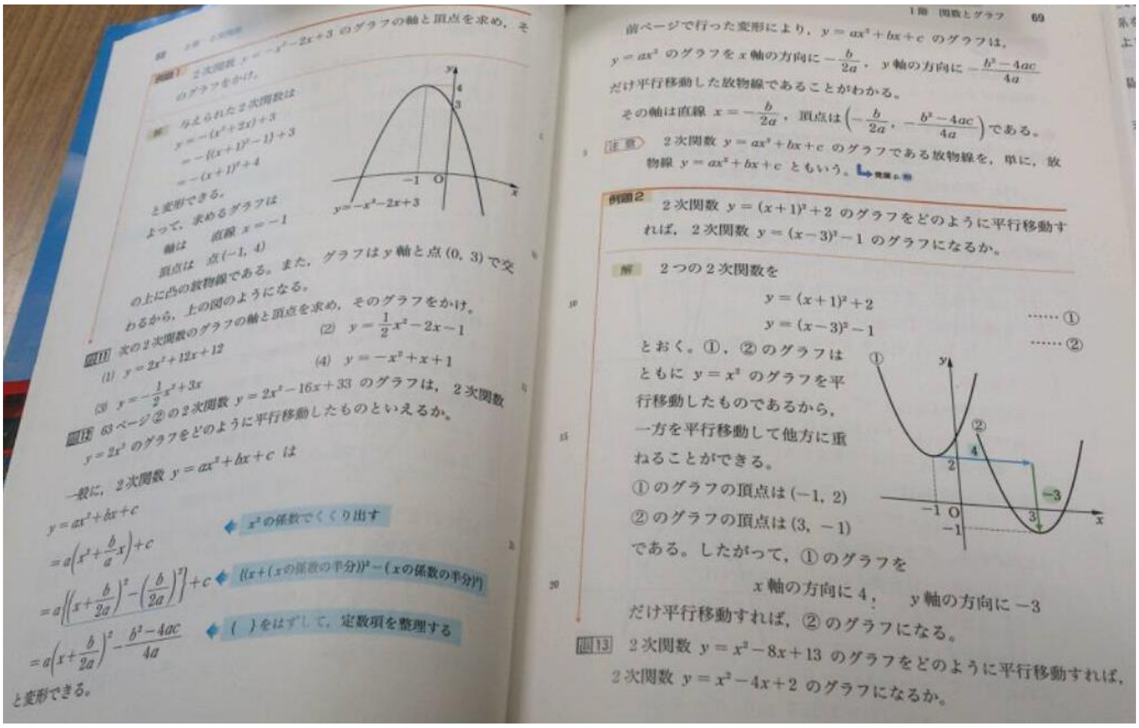


図 21

## 2.2.2 数研出版

○二次関数までについての導入

「地球の気温は地上から 10ｋｍくらいまでは、100m高くなるごとに 0.6 度下がるという。地上の気温が 20 度のとき、地上からの高さｘｋｍのところの気温をｙ度すると、ｘとｙの

間の関係は次の式で表される。　$y=20-6x$ ただし $0\leq x \leq 10$」
例題がこのように与えられ、以下ｘ、ｙについての説明がされている。

・関数についての定義

「２つの変数ｘ,ｙがあって、ｘの値を定めるとそれに対応するｙの値がただ１つ定まるとき、ｙはｘの関数であるという。ｙがｘの関数であることを、文字ｆなどを用いて、ｙ＝ｆ(x)とも言う。」

・値について

「ｘの値が a のとき、それに対応して決まるｙの値を f(a)と書き、これを関数 f(ｘ)のｘ＝a のときの値という。」

問

練習 1　関数 $f(x)=-3x+5$ について、次の値を求めよ。
(1) $f(0)$　(2) $f(2)$　(3) $f(-1)$　(4) $f(a+1)$

・定義域、値域について

「変数ｘのとる値の範囲、すなわちｘの変域の定義域という。また、ｘが定義域全体を動くとき、ｆ(x)がとる値の範囲、すなわちｙの変域を、値域という。」

・関数とグラフ

座標軸の定められた平面を座標平面、座標平面上の点(ｘ,y)を座標と説明している。ｘ、ｙ軸によって分けられる 4 区間を右上から反時計周りに第 1 現象、第 2 現象、第 3 現象、第 4 現象と説明している。

問

練習 2　次の点は，第何象限の点か。
(1) (3, 5)　(2) (4, −1)　(3) (−2, −3)　(4) (−5, 2)

例として関数ｙ＝-ｘ+2 のグラフは座標(x,-x+2)、ｙ＝ｘ**2 のグラフは座標(ｘ,ｘ**2)の全体で作られる図形であると説明している。

問

練習 3　次の関数のグラフをかけ。
(1) $y=3x-1$　(2) $y=-x^2$

「ｙがｘの 1 次式で表される関数を、ｘの 1 次関数という。一般には、ｘの 1 次関数は次の形に書き表させる。　$y=ax+b$　a,b は定数、$a\neq0$」

ここで関数についての種類を表す単語が出てきているが、問、(2)の 2 次関数には触

れられていない。

例で y＝x-2　(1≤ x ≤4)のグラフ、値域の求め方についての説明されている。

問

練習 4　次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ。

(1) $y=-3x+2$ $(-2 \leqq x \leqq 3)$　(2) $y=2x-3$ $(0<x<3)$

次に「関数の値域に最大の値がある場合はこれをこの関数の最大値という。また関数の値域に最小の値がある場合はこれをこの関数の最小値という。」

与えられた値域の中に最大値、最小値を持たない関数について例題のあとに注意書きとして、説明があった。

例題 1　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$y=2x-7$ $(1<x \leqq 4)$

解　この関数のグラフは右の図の実線の部分であり，その値域は

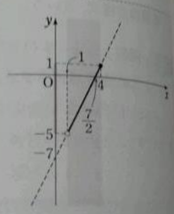
$-5<y \leqq 1$

よって，この関数は

$x=4$ で最大値 1

をとる。

また，最小値はない。




【注意】例題 1 において，$y$ は $-5$ にいくらでも近い値をとるが，定義域のどのような $x$ の値に対しても $y=-5$ とはならないので，最小値は存在しない。

問

練習 5　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=\frac{1}{2}x+2$ $(-4 \leqq x \leqq 2)$　(2) $y=-x-5$ $(-3 \leqq x \leqq 1)$

(3) $y=-\frac{1}{2}x+5$ $(0 \leqq x<2)$　(4) $y=3x-2$ $(-2<x<1)$

・色々な関数

絶対値のついた関数を紹介している。

○２次関数

・2 次関数の定義

「y が x の 2 次式で表される関数を、 x の２次関数という。一般の x についての 2 次関数は　y＝a x **2+ b x + c　　a,b,c は定数、a≠0 と書き表される。」

・ y ＝a x **2 のグラフ

「2 次関数 y ＝a x **2 のグラフの形の曲線を放物線という。放物線は対称軸をもっている。この対称の軸を放物線の軸といい、軸と放物線の交点を放物線の頂点という。」

「関数のグラフは、その曲線の形状からａ>０のとき、下に凸　ａ<０のとき、上に凸という。」

$y=ax^2$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2$ のグラフは，放物線である。

軸は　**$y$ 軸，**　　頂点は　**原点**

$a>0$ のとき　下に凸，　$a<0$ のとき　上に凸

グラフに関する名称を紹介し、頂点が原点のｙ＝ａｘ**2 についてのグラフについて説明している。

問

練習 8　次の2次関数のグラフをかけ。また，その放物線は上に凸，下に凸のどちらであるか。

(1) $y=3x^2$　(2) $y=-4x^2$　(3) $y=\frac{2}{3}x^2$

・ｙ＝ａｘ**2+ｑのグラフ

「平面上で、図形上の各点を一定の方向に、一定の距離だけ動かすことを平行移動という。」

まず、直交座標上のある１点の移動の仕方を説明。

**点 $(a,\ b)$ を**

**$x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$**

**だけ移動した点の座標は**

**$(a+p,\ b+q)$**

**である。**

問

練習 9　次の各点を，$x$ 軸方向に $-3$，$y$ 軸方向に2だけ移動した点の座標を求めよ。

(1) (1, 2)　(2) (4, −1)　(3) (−2, 1)　(4) (−1, −3)

次にｙ＝ｘ、ｙ＝２ｘ**2、ｙ＝２ｘ**2+4 の同じｘに対するｙの値を

| $x$ | …… | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | …… | $t$ | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① $2x^2$ | …… | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 | …… | $2t^2$ | …… |
| ② $2x^2+4$ | …… | 12 | 6 | 4 | 6 | 12 | 22 | …… | $2t^2+4$ | …… |

+4

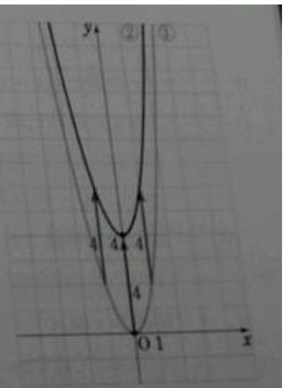
上の表のようにそれぞれの関数の値をかいて

この表から，$x=t$ に対応する②の $y$ の値は，$x=t$ に対応する①の $y$ の値より常に4だけ大きいことがわかる。したがって，②のグラフは，①のグラフを $y$ 軸方向に4だけ平行移動した放物線で，右の図のようになる。

また，②の放物線の

軸は $y$ 軸，頂点は点 $(0,\ 4)$

である。 終




一般に，2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを $y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した放物線で，その軸は $y$ 軸，頂点は点 $(0,\ q)$ で

と説明している。

問

練習 10 次の2次関数のグラフをかき，その頂点を求めよ。

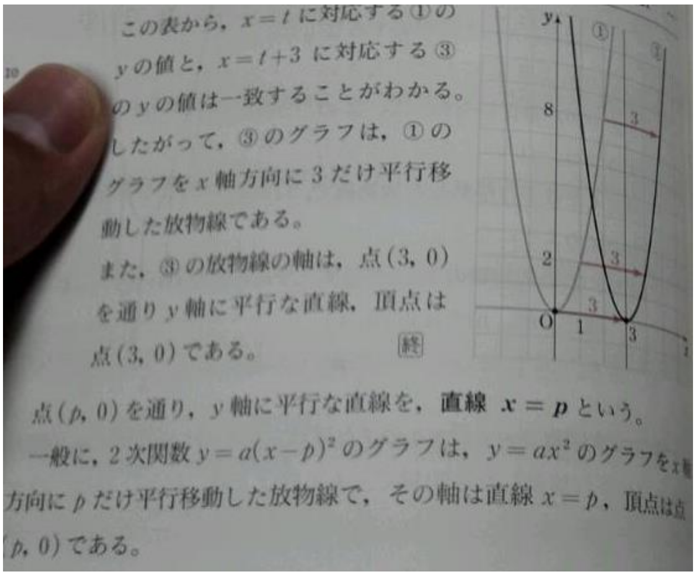
(1) $y=x^2+1$ (2) $y=2x^2-3$ (3) $y=-x^2+3$

・ｙ＝2(x-3)**2 のグラフ

ｙ＝ａｘ**2+ｑのときと同じようにｙ＝ｘ、ｙ＝2x-**2、ｙ＝2(x-3)**2 の同じｘに対するｙの値を

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots\cdots$ | $t$ | $\cdots\cdots$ | $t+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2$ | $\cdots$ | $2$ | $0$ | $2$ | $8$ | $18$ | $32$ | $\cdots\cdots$ | $2t^2$ | $\cdots\cdots$ | $2(t+3)^2$ |
| $2(x-3)^2$ | $\cdots$ | $32$ | $18$ | $8$ | $2$ | $0$ | $2$ | $\cdots\cdots$ | $2(t-3)^2$ | $\cdots\cdots$ | |

上の表のようにそれぞれの関数の値をかいて



この表から，$x=t$ に対応する①の $y$ の値と，$x=t+3$ に対応する③の $y$ の値は一致することがわかる。
したがって，③のグラフは，①のグラフを $x$ 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線である。
また，③の放物線の軸は，点$(3,\ 0)$を通り $y$ 軸に平行な直線，頂点は点$(3,\ 0)$である。 終

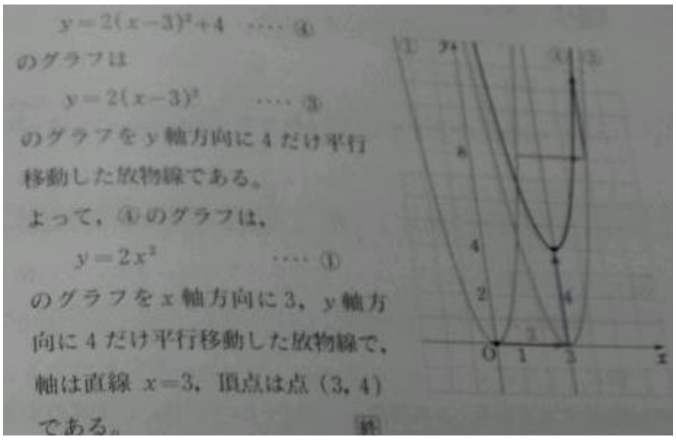
点$(p,\ 0)$を通り，$y$ 軸に平行な直線を，**直線 $x=p$** という。
一般に，2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$ だけ平行移動した放物線で，その軸は直線 $x=p$，頂点は点$(p,\ 0)$である。

と説明している。

問

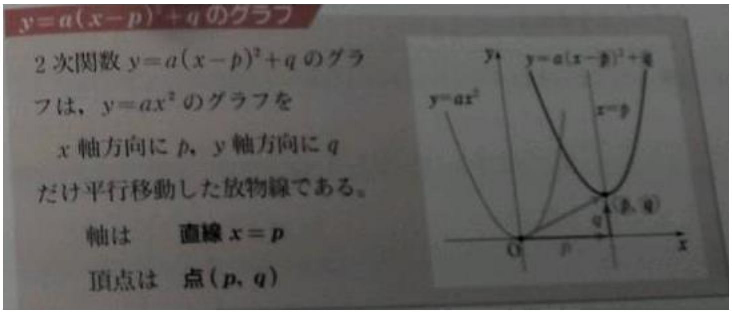
練習 11 次の2次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ。
(1) $y=(x-1)^2$ (2) $y=-(x+2)^2$ (3) $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$

・ｙ＝a(x-p)+q のグラフ



$y=2(x-3)^2+4$ ……④
のグラフは
$y=2(x-3)^2$ ……③
のグラフを $y$ 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線である。
よって，④のグラフは，
$y=2x^2$ ……①
のグラフを $x$ 軸方向に 3，$y$ 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線で，軸は直線 $x=3$，頂点は点$(3,\ 4)$である。 終

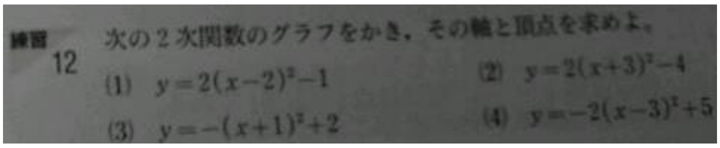
説明している。



**$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ**

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した放物線である。
軸は **直線 $x=p$**
頂点は **点$(p,\ q)$**

問



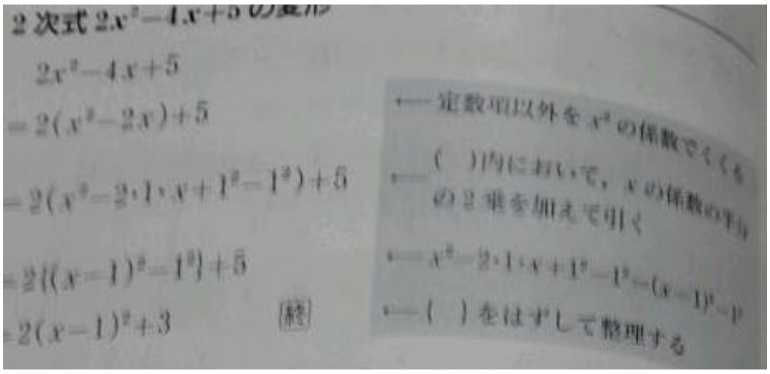
練習 12 次の2次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=2(x-2)^2-1$　(2) $y=2(x+3)^2-4$

(3) $y=-(x+1)^2+2$　(4) $y=-2(x-3)^2+5$

・ｙ＝ax**2+bx+c のグラフ

y=2x**2-4x+5 を例にあげ、ｙ＝a(x-p)**2+q の形にするやり方を説明している。



2次式 $2x^2-4x+5$ の変形

$2x^2-4x+5$

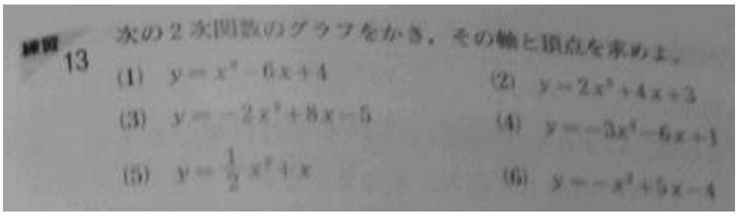
$=2(x^2-2x)+5$　← 定数項以外を $x^2$ の係数でくくる

$=2(x^2-2\cdot1\cdot x+1^2-1^2)+5$　← ( )内において，$x$ の係数の半分の2乗を加えて引く

$=2\{(x-1)^2-1^2\}+5$　← $x^2-2\cdot1\cdot x+1^2-1^2=(x-1)^2-1^2$

$=2(x-1)^2+3$　終　← ( )をはずして整理する

問



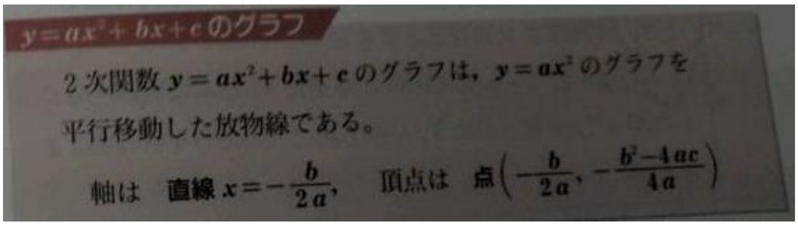
練習 13 次の2次関数のグラフをかき，その軸と頂点を求めよ。

(1) $y=x^2-6x+4$　(2) $y=2x^2+4x+3$

(3) $y=-2x^2+8x-5$　(4) $y=-3x^2-6x+1$

(5) $y=\frac{1}{2}x^2+x$　(6) $y=-x^2+5x-4$

2次関数ｙ＝ax**2+bx+c のグラフについて、次のことが成り立つ。



$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線である。

軸は 直線 $x=-\frac{b}{2a}$，　頂点は 点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

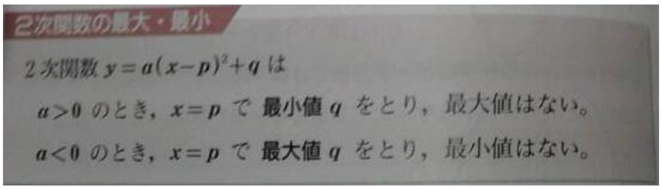
・応用

応用として、放物線ｙ＝a(x-p)+q の平行移動、ｘ軸・ｙ軸・原点対称が取り上げられている。

○2 次関数の最大、最小

・2 次関数の最大最小

「2次関数ｙ＝a(x-p)**2+q のグラフについては、a の正負によって次のことが言える。a＞0 のとき、下に凸で、頂点が最も下の点である。a＜0 のとき、上に凸で、頂点で最も下の点である。」



2次関数の最大・最小

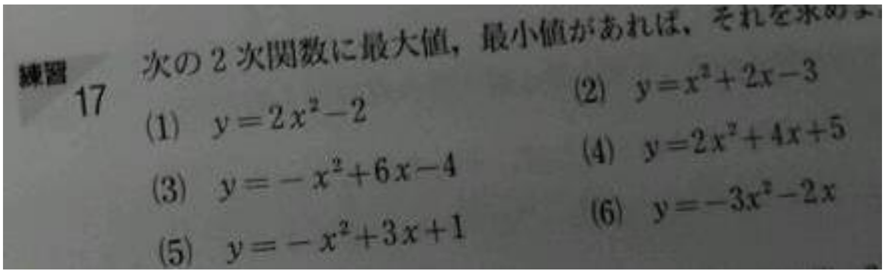
2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は

$a>0$ のとき，$x=p$ で **最小値 $q$** をとり，最大値はない。

$a<0$ のとき，$x=p$ で **最大値 $q$** をとり，最小値はない。

「2 次関数の最大値､最小値を調べるのに､関数をｙ＝a(x-p)**2+q の形にすればよい」

問



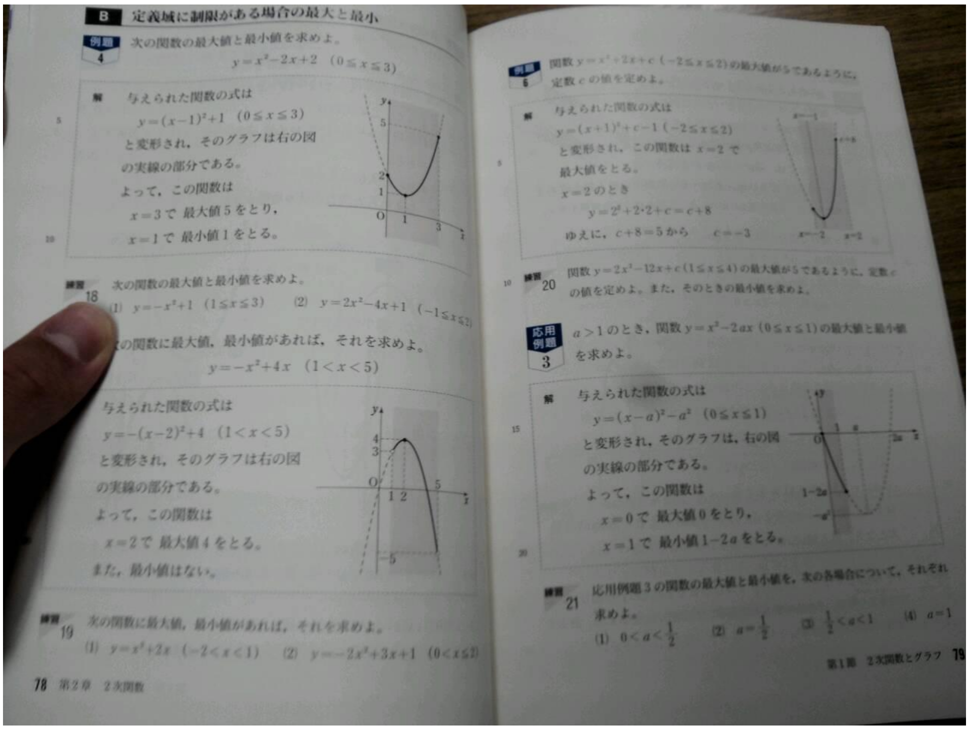
練習 17 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=2x^2-2$　(2) $y=x^2+2x-3$

(3) $y=-x^2+6x-4$　(4) $y=2x^2+4x+5$

(5) $y=-x^2+3x+1$　(6) $y=-3x^2-2x$

・定義域に制限のある場合の最大と最小



**B 定義域に制限がある場合の最大と最小**

例題 4　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$y=x^2-2x+2$　$(0\leqq x\leqq 3)$

解　与えられた関数の式は

$y=(x-1)^2+1$　$(0\leqq x\leqq 3)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線の部分である。

よって，この関数は

$x=3$ で 最大値 5 をとり，

$x=1$ で 最小値 1 をとる。

練習 18　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=-x^2+1$　$(1\leqq x\leqq 3)$　(2) $y=2x^2-4x+1$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

…の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$y=-x^2+4x$　$(1<x<5)$

与えられた関数の式は

$y=-(x-2)^2+4$　$(1<x<5)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線の部分である。

よって，この関数は

$x=2$ で 最大値 4 をとる。

また，最小値はない。

練習 19　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2+2x$　$(-2<x<1)$　(2) $y=-2x^2+3x+1$　$(0<x\leqq 2)$

78 第2章 2次関数

例題 6　関数 $y=x^2+2x+c$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ の最大値が5であるように，定数 $c$ の値を定めよ。

解　与えられた関数の式は

$y=(x+1)^2+c-1$ $(-2\leqq x\leqq 2)$

と変形され，この関数は $x=2$ で最大値をとる。

$x=2$ のとき

$y=2^2+2\cdot 2+c=c+8$

ゆえに，$c+8=5$ から　$c=-3$

練習 20　関数 $y=2x^2-12x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最大値が5であるように，定数 $c$ の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

応用例題 3　$a>1$ のとき，関数 $y=x^2-2ax$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ。

解　与えられた関数の式は

$y=(x-a)^2-a^2$　$(0\leqq x\leqq 1)$

と変形され，そのグラフは，右の図の実線の部分である。

よって，この関数は

$x=0$ で 最大値 0 をとり，

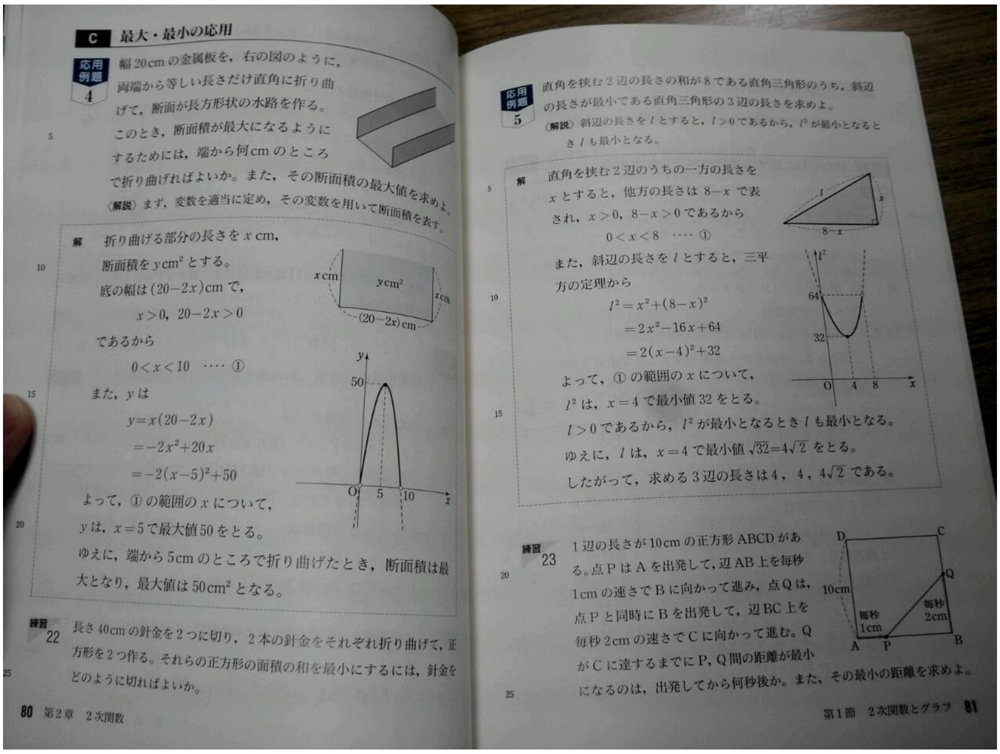
$x=1$ で 最小値 $1-2a$ をとる。

練習 21　応用例題3の関数の最大値と最小値を，次の各場合について，それぞれ求めよ。

(1) $0<a<\frac{1}{2}$　(2) $a=\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{2}<a<1$　(4) $a=1$

第1節 2次関数とグラフ 79

・最大・最小の応用



**C　最大・最小の応用**

**応用例題 4**　幅 20cm の金属板を，右の図のように，両端から等しい長さだけ直角に折り曲げて，断面が長方形状の水路を作る。このとき，断面積が最大になるようにするためには，端から何cm のところで折り曲げればよいか。また，その断面積の最大値を求めよ。

〈解説〉まず，変数を適当に定め，その変数を用いて断面積を表す。

**解**　折り曲げる部分の長さを $x$ cm，断面積を $y\text{cm}^2$ とする。

底の幅は $(20-2x)$cm で，

$$x>0,\ 20-2x>0$$

であるから

$$0<x<10 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$y$ は

$$y=x(20-2x)$$
$$=-2x^2+20x$$
$$=-2(x-5)^2+50$$

よって，① の範囲の $x$ について，$y$ は，$x=5$ で最大値 50 をとる。

ゆえに，端から 5cm のところで折り曲げたとき，断面積は最大となり，最大値は $50\text{cm}^2$ となる。

**練習 22**　長さ 40cm の針金を 2 つに切り，2 本の針金をそれぞれ折り曲げて，正方形を 2 つ作る。それらの正方形の面積の和を最小にするには，針金をどのように切ればよいか。

80　第2章　2次関数

**応用例題 5**　直角を挟む 2 辺の長さの和が 8 である直角三角形のうち，斜辺の長さが最小である直角三角形の 3 辺の長さを求めよ。

〈解説〉斜辺の長さを $l$ とすると，$l>0$ であるから，$l^2$ が最小となるとき $l$ も最小となる。

**解**　直角を挟む 2 辺のうちの一方の長さを $x$ とすると，他方の長さは $8-x$ で表され，$x>0$，$8-x>0$ であるから

$$0<x<8 \quad \cdots\cdots ①$$

また，斜辺の長さを $l$ とすると，三平方の定理から

$$l^2=x^2+(8-x)^2$$
$$=2x^2-16x+64$$
$$=2(x-4)^2+32$$

よって，① の範囲の $x$ について，$l^2$ は，$x=4$ で最小値 32 をとる。

$l>0$ であるから，$l^2$ が最小となるとき $l$ も最小となる。

ゆえに，$l$ は，$x=4$ で最小値 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ をとる。

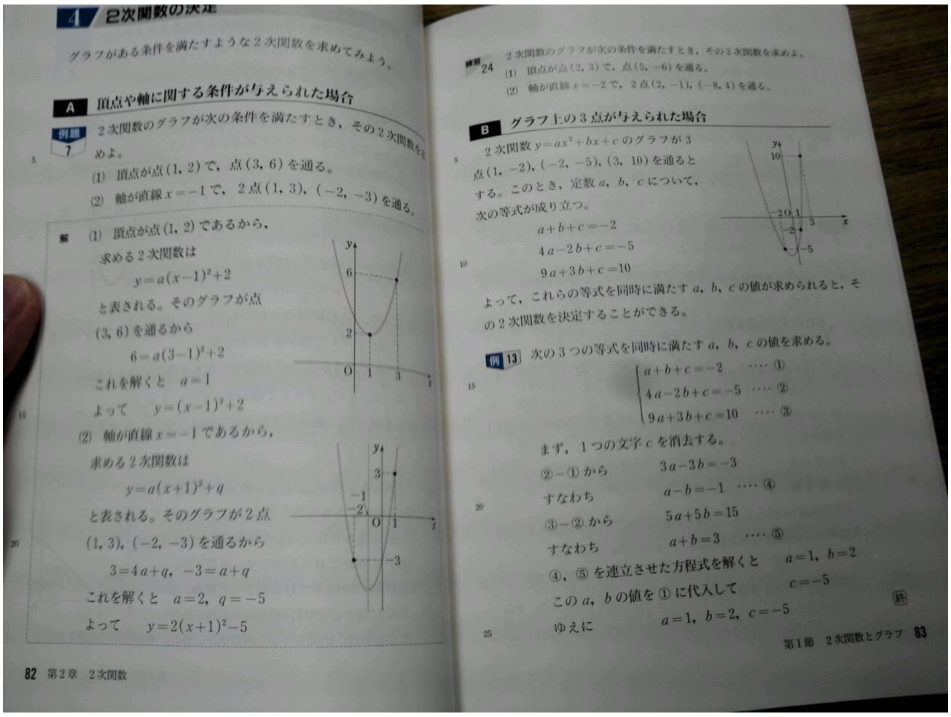
したがって，求める 3 辺の長さは 4，4，$4\sqrt{2}$ である。

**練習 23**　1 辺の長さが 10cm の正方形 ABCD がある。点 P は A を出発して，辺 AB 上を毎秒 1cm の速さで B に向かって進み，点 Q は，点 P と同時に B を出発して，辺 BC 上を毎秒 2cm の速さで C に向かって進む。Q が C に達するまでに P, Q 間の距離が最小になるのは，出発してから何秒後か。また，その最小の距離を求めよ。

第1節　2次関数とグラフ　81



○2 次関数の決定



**4　2次関数の決定**

グラフがある条件を満たすような 2 次関数を求めてみよう。

**A　頂点や軸に関する条件が与えられた場合**

**例題 7**　2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 (1, 2) で，点 (3, 6) を通る。

(2) 軸が直線 $x=-1$ で，2 点 (1, 3)，(−2, −3) を通る。

**解**　(1) 頂点が点 (1, 2) であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-1)^2+2$$

と表される。そのグラフが点 (3, 6) を通るから

$$6=a(3-1)^2+2$$

これを解くと　$a=1$

よって　$y=(x-1)^2+2$

(2) 軸が直線 $x=-1$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)^2+q$$

と表される。そのグラフが 2 点 (1, 3)，(−2, −3) を通るから

$$3=4a+q,\ -3=a+q$$

これを解くと　$a=2,\ q=-5$

よって　$y=2(x+1)^2-5$

82　第2章　2次関数

**練習 24**　2 次関数のグラフが次の条件を満たすとき，その 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 (2, 3) で，点 (5, −6) を通る。

(2) 軸が直線 $x=-2$ で，2 点 (2, −1)，(−8, 4) を通る。

**B　グラフ上の 3 点が与えられた場合**

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点 (1, −2)，(−2, −5)，(3, 10) を通るとする。このとき，定数 $a$，$b$，$c$ について，次の等式が成り立つ。

$$a+b+c=-2$$
$$4a-2b+c=-5$$
$$9a+3b+c=10$$

よって，これらの等式を同時に満たす $a$，$b$，$c$ の値が求められると，その 2 次関数を決定することができる。

**例 13**　次の 3 つの等式を同時に満たす $a$，$b$，$c$ の値を求める。

$$\begin{cases} a+b+c=-2 & \cdots\cdots ① \\ 4a-2b+c=-5 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=10 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

まず，1 つの文字 $c$ を消去する。

②−① から　$3a-3b=-3$

すなわち　$a-b=-1 \quad \cdots\cdots ④$

③−② から　$5a+5b=15$

すなわち　$a+b=3 \quad \cdots\cdots ⑤$

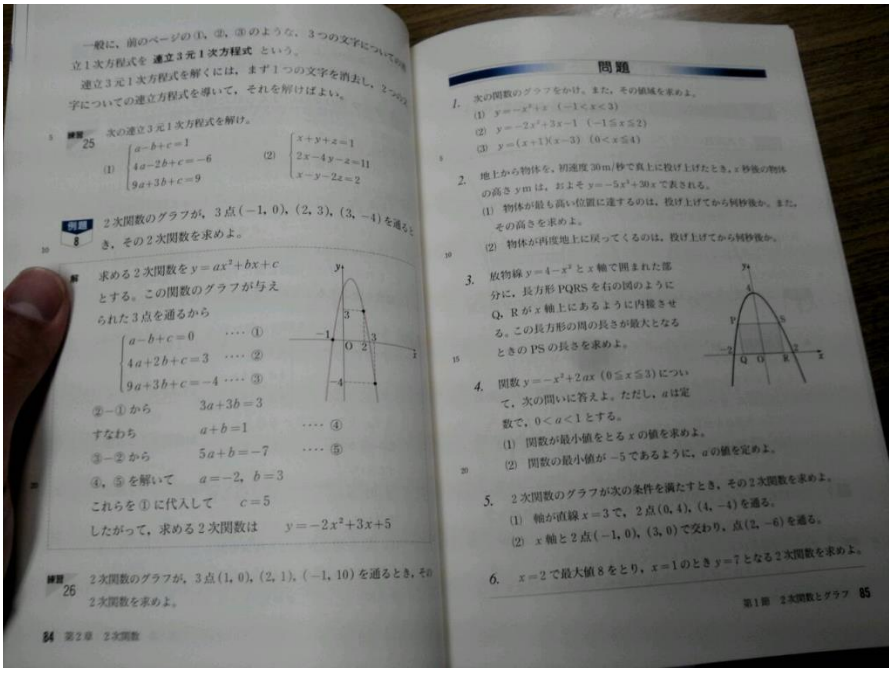
④，⑤ を連立させた方程式を解くと　$a=1,\ b=2$

この $a$，$b$ の値を ① に代入して　$c=-5$

ゆえに　$a=1,\ b=2,\ c=-5$　終

第1節　2次関数とグラフ　83

・グラフ上の３点が与えられた場合


一般に、前のページの①、②、③のような、３つの文字についての連立１次方程式を **連立３元１次方程式** という。

連立３元１次方程式を解くには、まず１つの文字を消去し、２つの文字についての連立方程式を導いて、それを解けばよい。

練習 25　次の連立３元１次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} a-b+c=1 \\ 4a-2b+c=-6 \\ 9a+3b+c=9 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-4y-z=11 \\ x-y-2z=2 \end{cases}$

例題 8　２次関数のグラフが、３点 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ -4)$ を通るとき、その２次関数を求めよ。

解　求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。この関数のグラフが与えられた３点を通るから

$\begin{cases} a-b+c=0 & \cdots① \\ 4a+2b+c=3 & \cdots② \\ 9a+3b+c=-4 & \cdots③ \end{cases}$

②－①から　$3a+3b=3$

すなわち　$a+b=1$　$\cdots④$

③－②から　$5a+b=-7$　$\cdots⑤$

④、⑤を解いて　$a=-2$, $b=3$

これらを①に代入して　$c=5$

したがって、求める２次関数は　$y=-2x^2+3x+5$

練習 26　２次関数のグラフが、３点 $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(-1,\ 10)$ を通るとき、その２次関数を求めよ。

84　第２章　２次関数

**問題**

1. 次の関数のグラフをかけ。また、その値域を求めよ。
(1) $y=-x^2+x$ $(-1<x<3)$
(2) $y=-2x^2+3x-1$ $(-1\leqq x\leqq 2)$
(3) $y=(x+1)(x-3)$ $(0<x\leqq 4)$

2. 地上から物体を、初速度 30m/秒で真上に投げ上げたとき、x 秒後の物体の高さ y m は、およそ $y=-5x^2+30x$ で表される。
(1) 物体が最も高い位置に達するのは、投げ上げてから何秒後か。また、その高さを求めよ。
(2) 物体が再度地上に戻ってくるのは、投げ上げてから何秒後か。

3. 放物線 $y=4-x^2$ と x 軸で囲まれた部分に、長方形 PQRS を右の図のように Q, R が x 軸上にあるように内接させる。この長方形の周の長さが最大となるときの PS の長さを求めよ。

4. 関数 $y=-x^2+2ax$ $(0\leqq x\leqq 3)$ について、次の問いに答えよ。ただし、a は定数で、$0<a<1$ とする。
(1) 関数が最小値をとる x の値を求めよ。
(2) 関数の最小値が $-5$ であるように、a の値を定めよ。

5. ２次関数のグラフが次の条件を満たすとき、その２次関数を求めよ。
(1) 軸が直線 $x=3$ で、２点 $(0,\ 4)$, $(4,\ -4)$ を通る。
(2) x 軸と２点 $(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$ で交わり、点 $(2,\ -6)$ を通る。

6. $x=2$ で最大値 8 をとり、$x=1$ のとき $y=7$ となる２次関数を求めよ。

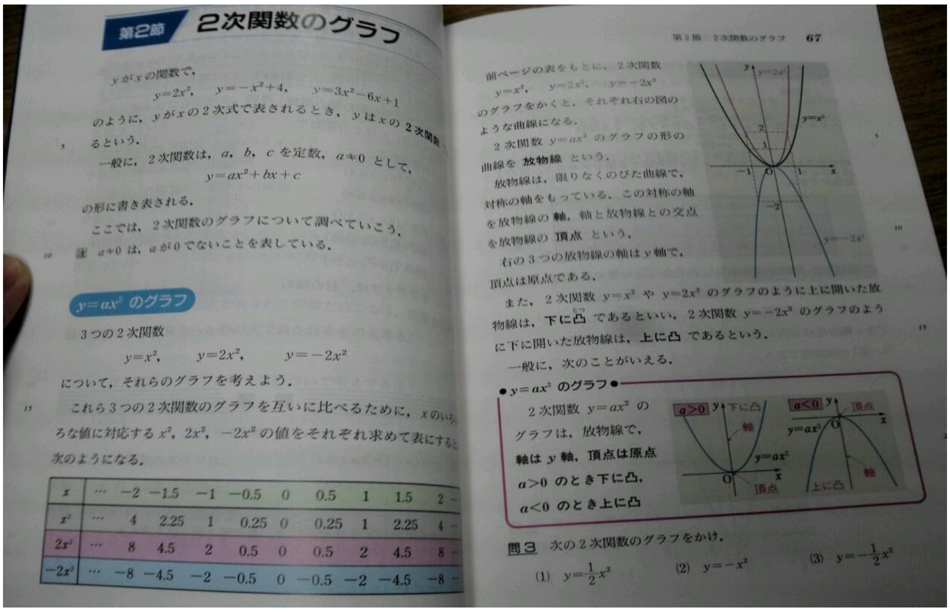
第１節　２次関数とグラフ　85

〇章末問題

問題のレベル関しては、例題、練習問題の類題が多い。x,y の値から、２次関数のグラフを求めさせるもの、(3)のような長方形の長さを求める応用問題もある。

## 2.2.3 啓林館

図１


第２節　２次関数のグラフ

y が x の関数で、
$y=2x^2$,　$y=-x^2+4$,　$y=3x^2-6x+1$
のように、y が x の２次式で表されるとき、y は x の **２次関数** であるという。

一般に、２次関数は、a, b, c を定数、$a\neq 0$ として、
$y=ax^2+bx+c$
の形に書き表される。

ここでは、２次関数のグラフについて調べていこう。

注　$a\neq 0$ は、a が 0 でないことを表している。

$y=ax^2$ のグラフ

３つの２次関数
$y=x^2$,　$y=2x^2$,　$y=-2x^2$
について、それらのグラフを考えよう。

これら３つの２次関数のグラフを互いに比べるために、x のいろいろな値に対応する $x^2$, $2x^2$, $-2x^2$ の値をそれぞれ求めて表にすると、次のようになる。

| $x$ | … | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $-0.5$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | … | 4 | 2.25 | 1 | 0.25 | 0 | 0.25 | 1 | 2.25 | 4 |
| $2x^2$ | … | 8 | 4.5 | 2 | 0.5 | 0 | 0.5 | 2 | 4.5 | 8 |
| $-2x^2$ | … | $-8$ | $-4.5$ | $-2$ | $-0.5$ | 0 | $-0.5$ | $-2$ | $-4.5$ | $-8$ |

第２節　２次関数のグラフ　67

前ページの表をもとに、２次関数 $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=-2x^2$ のグラフをかくと、それぞれ右の図のような曲線になる。

２次関数 $y=ax^2$ のグラフの形の曲線を **放物線** という。

放物線は、限りなくのびた曲線で、対称の軸をもっている。この対称の軸を放物線の **軸**、軸と放物線との交点を放物線の **頂点** という。

右の３つの放物線の軸は y 軸で、頂点は原点である。

また、２次関数 $y=x^2$ や $y=2x^2$ のグラフのように上に開いた放物線は、**下に凸** であるといい、２次関数 $y=-2x^2$ のグラフのように下に開いた放物線は、**上に凸** であるという。

一般に、次のことがいえる。

● $y=ax^2$ のグラフ ●

２次関数 $y=ax^2$ のグラフは、放物線で、**軸は y 軸、頂点は原点**

**$a>0$ のとき下に凸、**

**$a<0$ のとき上に凸**

問３　次の２次関数のグラフをかけ。

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$　(2) $y=-x^2$　(3) $y=-\frac{1}{2}x^2$

（1）２次関数の導入

具体的に二次関数がどういうものかを具体的に示し「ｙがｘの２次式で表されるとき、ｙはｘの２次関数という。」と記述

次に一般の形を定数ａ、ｂ、ｃを利用して記述

（2）２次関数（ｙ ＝ $ax^2$）のグラフ

３つの２次関数を与えそれについてのグラフを考える。

ｘのいろいろな値に対応する与えられた関数の値をそれぞれ求めて表にする

→表の提示

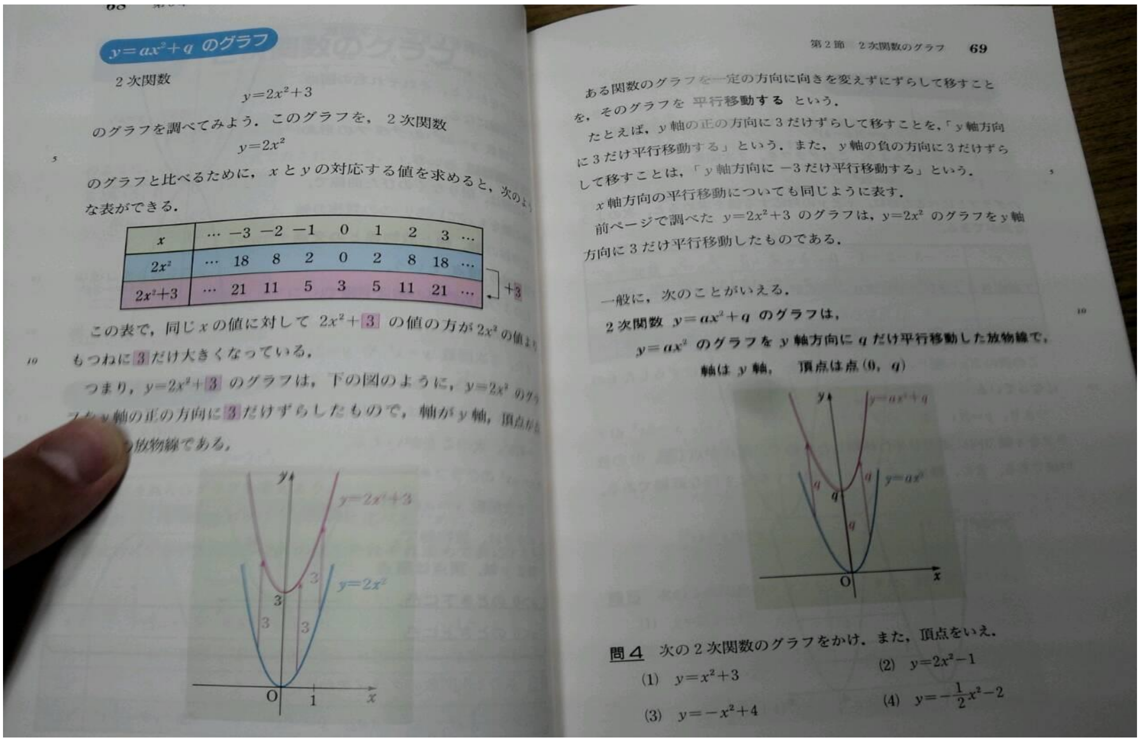
表をもとに曲線の図を提示

→放物線、軸、頂点、下に凸、上に凸の言葉を解説

要点の書き出しを行った後、グラフを書かせる問の設置

**(以上図１参照)**

図２



$y=ax^2+q$ のグラフ

２次関数

$y=2x^2+3$

のグラフを調べてみよう．このグラフを，２次関数

$y=2x^2$

のグラフと比べるために，$x$ と $y$ の対応する値を求めると，次のような表ができる．

| $x$ | … | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2$ | … | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 | … |
| $2x^2+3$ | … | 21 | 11 | 5 | 3 | 5 | 11 | 21 | … |

+3

この表で，同じ $x$ の値に対して $2x^2+\boxed{3}$ の値の方が $2x^2$ の値よりもつねに $\boxed{3}$ だけ大きくなっている．

つまり，$y=2x^2+\boxed{3}$ のグラフは，下の図のように，$y=2x^2$ のグラフを $y$ 軸の正の方向に $\boxed{3}$ だけずらしたもので，軸が $y$ 軸，頂点が…放物線である．





ある関数のグラフを一定の方向に向きを変えずにずらして移すことを，そのグラフを **平行移動する** という．

たとえば，$y$ 軸の正の方向に３だけずらして移すことを，「$y$ 軸方向に３だけ平行移動する」という．また，$y$ 軸の負の方向に３だけずらして移すことは，「$y$ 軸方向に −3 だけ平行移動する」という．

$x$ 軸方向の平行移動についても同じように表す．

前ページで調べた $y=2x^2+3$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを $y$ 軸方向に３だけ平行移動したものである．

一般に，次のことがいえる．

**２次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは，**

**$y=ax^2$ のグラフを $y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した放物線で，**

**軸は $y$ 軸，　頂点は点 $(0,\ q)$**

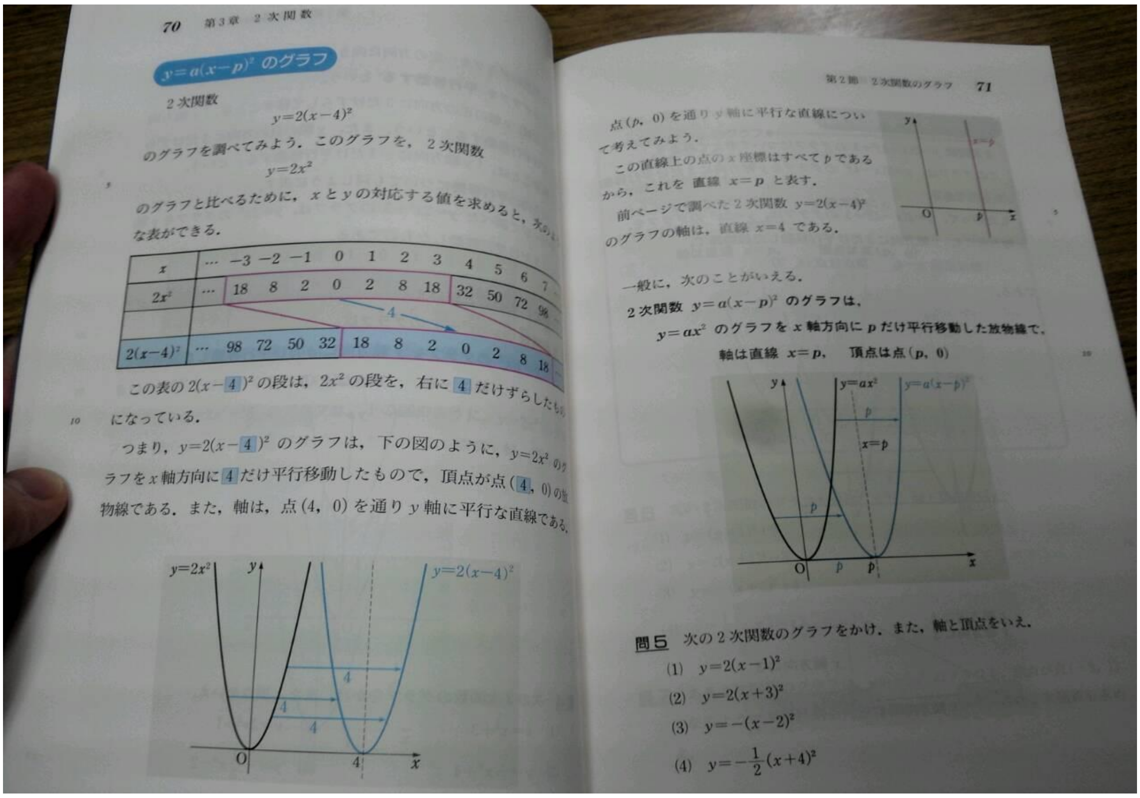


**問４**　次の２次関数のグラフをかけ．また，頂点をいえ．

(1)　$y=x^2+3$　　(2)　$y=2x^2-1$

(3)　$y=-x^2+4$　　(4)　$y=-\frac{1}{2}x^2-2$

図 3


70 第3章 2次関数

$y=a(x-p)^2$ のグラフ

2次関数

$$y=2(x-4)^2$$

のグラフを調べてみよう。このグラフを、2次関数

$$y=2x^2$$

のグラフと比べるために、$x$ と $y$ の対応する値を求めると、次のような表ができる。

| $x$ | … | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2$ | … | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 | 50 | 72 | 98 |
| $2(x-4)^2$ | … | 98 | 72 | 50 | 32 | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 |

この表の $2(x-4)^2$ の段は、$2x^2$ の段を、右に 4 だけずらしたものになっている。

つまり、$y=2(x-4)^2$ のグラフは、下の図のように、$y=2x^2$ のグラフを $x$ 軸方向に 4 だけ平行移動したもので、頂点が点 (4, 0) の放物線である。また、軸は、点 (4, 0) を通り $y$ 軸に平行な直線である。

第2節 2次関数のグラフ 71

点 $(p, 0)$ を通り $y$ 軸に平行な直線について考えてみよう。

この直線上の点の $x$ 座標はすべて $p$ であるから、これを 直線 $x=p$ と表す。

前ページで調べた2次関数 $y=2(x-4)^2$ のグラフの軸は、直線 $x=4$ である。

一般に、次のことがいえる。

**2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは、$y=ax^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$ だけ平行移動した放物線で、軸は直線 $x=p$、頂点は点 $(p, 0)$**

問5 次の2次関数のグラフをかけ。また、軸と頂点をいえ。

(1) $y=2(x-1)^2$

(2) $y=2(x+3)^2$

(3) $y=-(x-2)^2$

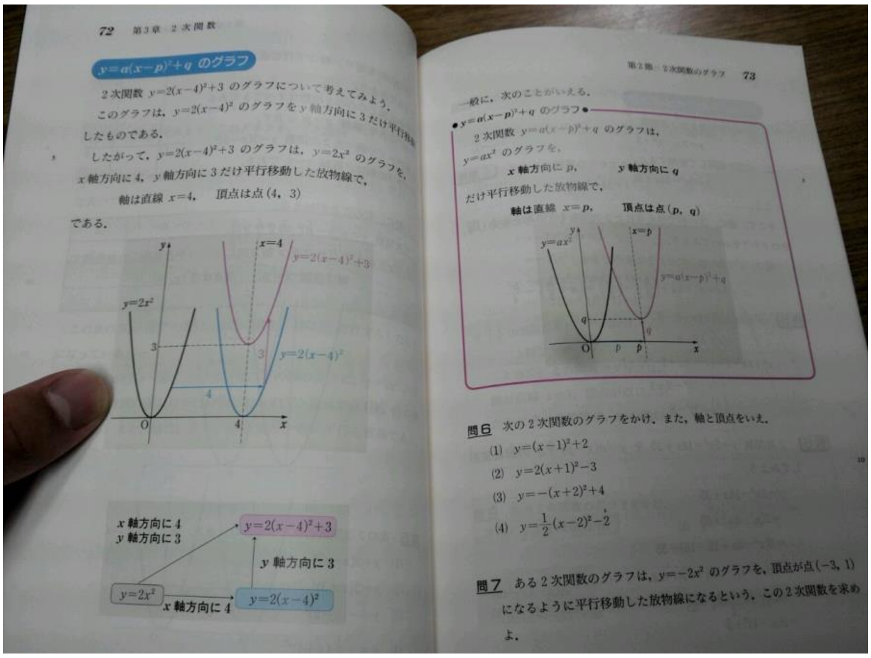
(4) $y=-\frac{1}{2}(x+4)^2$

（3）2 次関数（$y=ax^2+q$）（$y=a(x-p)^2$）のグラフ

（2）とほぼ同様な流れで記述

→平行移動の説明、表を使ってグラフの平行移動を説明**（以上図 2、図 3 参照）**

図 4


72 第3章 2次関数

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

2次関数 $y=2(x-4)^2+3$ のグラフについて考えてみよう。

このグラフは、$y=2(x-4)^2$ のグラフを $y$ 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

したがって、$y=2(x-4)^2+3$ のグラフは、$y=2x^2$ のグラフを、$x$ 軸方向に 4、$y$ 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線で、

軸は直線 $x=4$、 頂点は点 (4, 3)

である。



第2節 2次関数のグラフ 73

一般に、次のことがいえる。

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは、$y=ax^2$ のグラフを、$x$ 軸方向に $p$、$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した放物線で、軸は直線 $x=p$、頂点は点 $(p, q)$

問6 次の2次関数のグラフをかけ。また、軸と頂点をいえ。

(1) $y=(x-1)^2+2$

(2) $y=2(x+1)^2-3$

(3) $y=-(x+2)^2+4$

(4) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$

問7 ある2次関数のグラフは、$y=-2x^2$ のグラフを、頂点が点 (−3, 1) になるように平行移動した放物線になるという。この2次関数を求めよ。

（4）2 次関数（$y=a(x-p)^2+q$）のグラフ

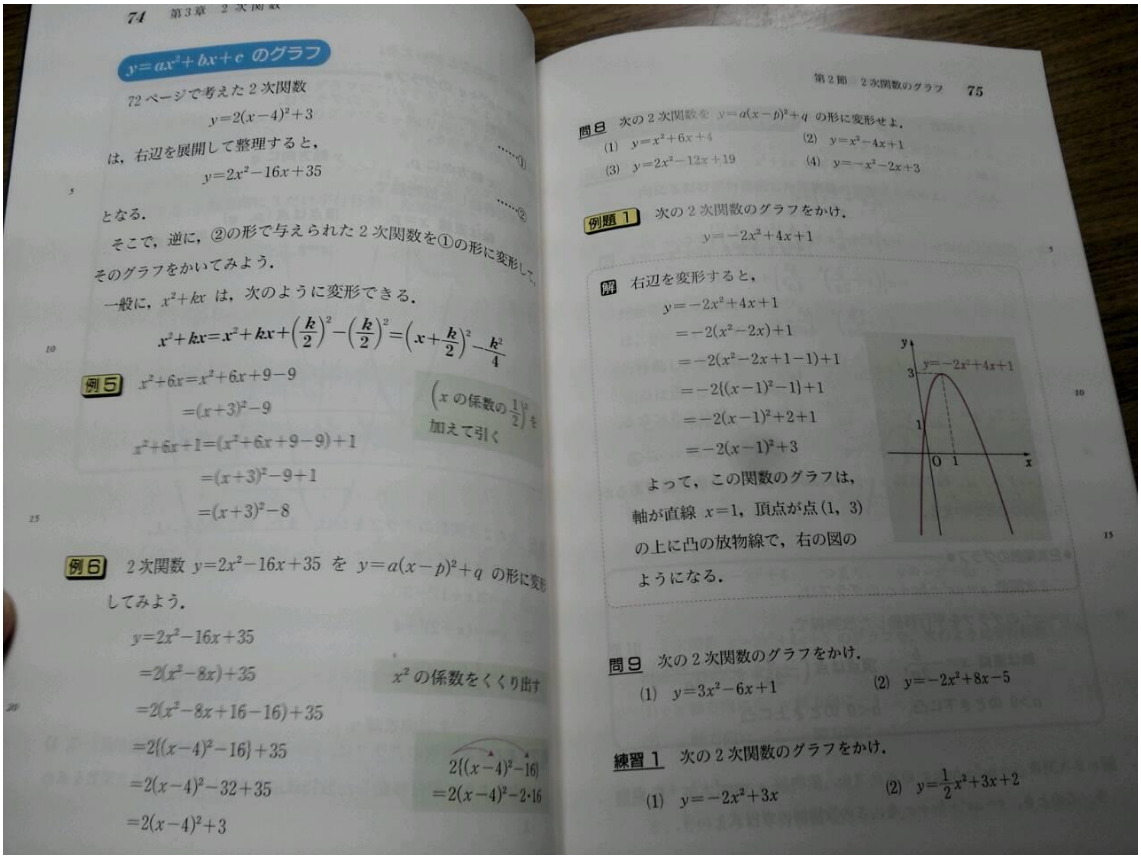
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2+q$、$y=a(x-p)^2$ の考え方を利用して説明（表を提示していない）

要点をまとめて問を設置

→今までは「グラフをかけ」という問題だったが、問 7 で「2 次関数を求めよ」という問題の設置（問 6 までは式からグラフを要求していたが、問 7 でグラフから式へ変換する事を要求）

**（以上図 4 参照）**

図 5



74　第3章　2 次関数

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

72 ページで考えた 2 次関数

$$y=2(x-4)^2+3 \quad \cdots\cdots ①$$

は，右辺を展開して整理すると，

$$y=2x^2-16x+35 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

そこで，逆に，②の形で与えられた 2 次関数を①の形に変形して，そのグラフをかいてみよう．

一般に，$x^2+kx$ は，次のように変形できる．

$$x^2+kx=x^2+kx+\left(\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}$$

例 5　$x^2+6x=x^2+6x+9-9$

$=(x+3)^2-9$

$x^2+6x+1=(x^2+6x+9-9)+1$

$=(x+3)^2-9+1$

$=(x+3)^2-8$

$\left(x \text{の係数の} \frac{1}{2}\right)^2$ を加えて引く

例 6　2 次関数 $y=2x^2-16x+35$ を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形してみよう．

$y=2x^2-16x+35$

$=2(x^2-8x)+35$

$=2(x^2-8x+16-16)+35$

$=2\{(x-4)^2-16\}+35$

$=2(x-4)^2-32+35$

$=2(x-4)^2+3$

$x^2$ の係数をくくり出す

$2\{(x-4)^2-16\}$
$=2(x-4)^2-2\cdot16$

第 2 節　2 次関数のグラフ　75

問 8　次の 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形せよ．

(1)　$y=x^2+6x+4$　　(2)　$y=x^2-4x+1$

(3)　$y=2x^2-12x+19$　　(4)　$y=-x^2-2x+3$

例題 1　次の 2 次関数のグラフをかけ．

$$y=-2x^2+4x+1$$

解　右辺を変形すると，

$y=-2x^2+4x+1$

$=-2(x^2-2x)+1$

$=-2(x^2-2x+1-1)+1$

$=-2\{(x-1)^2-1\}+1$

$=-2(x-1)^2+2+1$

$=-2(x-1)^2+3$

よって，この関数のグラフは，軸が直線 $x=1$，頂点が点 $(1, 3)$ の上に凸の放物線で，右の図のようになる．



問 9　次の 2 次関数のグラフをかけ．

(1)　$y=3x^2-6x+1$　　(2)　$y=-2x^2+8x-5$

練習 1　次の 2 次関数のグラフをかけ．

(1)　$y=-2x^2+3x$　　(2)　$y=\frac{1}{2}x^2+3x+2$

（5）$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ を展開して $y=ax^2+bx+c$ の形にする

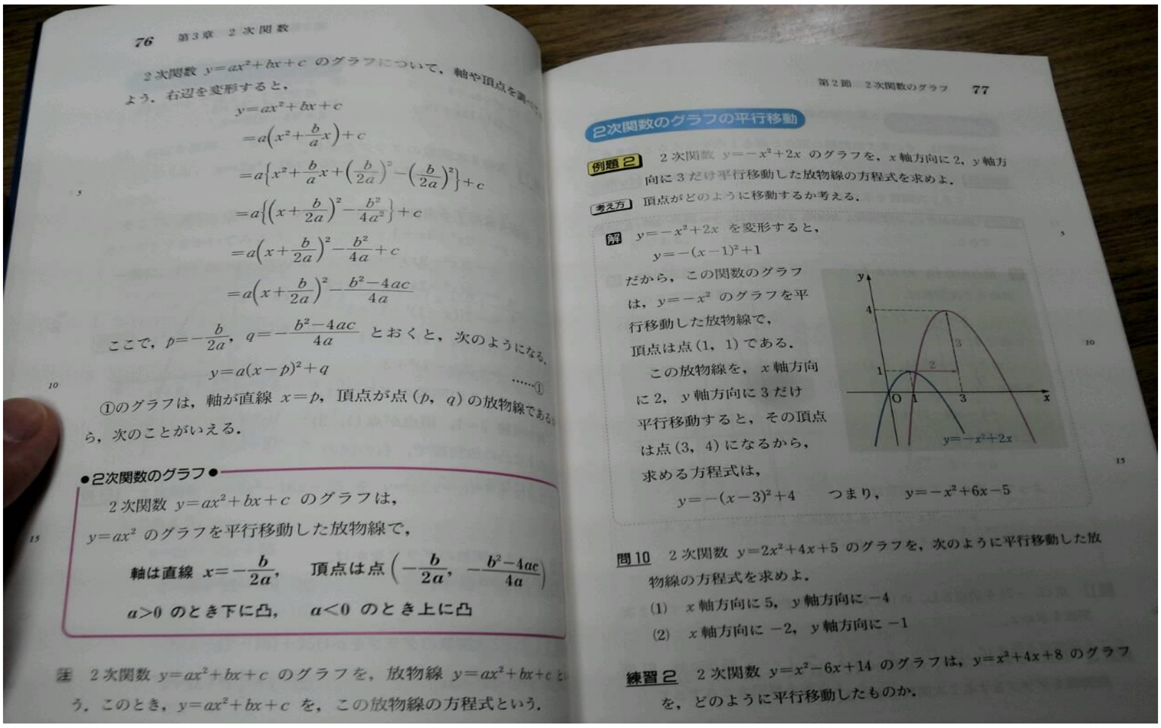
→$y=ax^2+bx+c$ を $y=a(x-p)^2+q$ に式変形を行えばグラフをかけることを示す

一般から例を利用しての具体に移る（例 5,6）

例題で式変形からグラフ作図まで行う

**（以上図 5 参照）**

図 6



76　第3章　2次関数

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて，軸や頂点を調べてみよう。右辺を変形すると，

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ここで，$p=-\frac{b}{2a}$，$q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ とおくと，次のようになる。

$$y=a(x-p)^2+q \quad \cdots\cdots①$$

①のグラフは，軸が直線 $x=p$，頂点が点 $(p,\ q)$ の放物線であるから，次のことがいえる。

**●2次関数のグラフ●**

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，
$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で，

**軸は直線 $x=-\frac{b}{2a}$，　頂点は点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$**

**$a>0$ のとき下に凸，　$a<0$ のとき上に凸**

注　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを，放物線 $y=ax^2+bx+c$ という。このとき，$y=ax^2+bx+c$ を，この放物線の方程式という。

第2節　2次関数のグラフ　77

**2次関数のグラフの平行移動**

例題2　2次関数 $y=-x^2+2x$ のグラフを，$x$ 軸方向に2，$y$ 軸方向に3だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

考え方　頂点がどのように移動するか考える。

解　$y=-x^2+2x$ を変形すると，
$y=-(x-1)^2+1$
だから，この関数のグラフは，$y=-x^2$ のグラフを平行移動した放物線で，頂点は点 (1，1) である。
この放物線を，$x$ 軸方向に2，$y$ 軸方向に3だけ平行移動すると，その頂点は点 (3，4) になるから，求める方程式は，
$y=-(x-3)^2+4$　　つまり，　$y=-x^2+6x-5$



問10　2次関数 $y=2x^2+4x+5$ のグラフを，次のように平行移動した放物線の方程式を求めよ。
(1)　$x$ 軸方向に5，$y$ 軸方向に $-4$
(2)　$x$ 軸方向に $-2$，$y$ 軸方向に $-1$

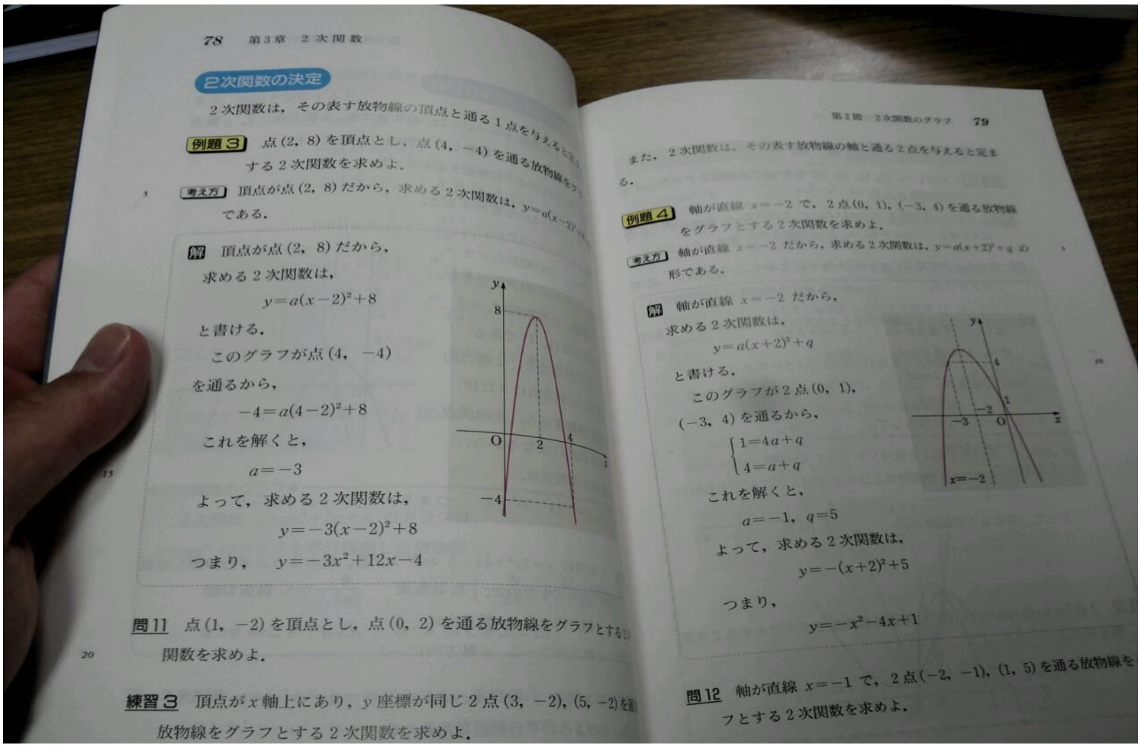
練習2　2次関数 $y=x^2-6x+14$ のグラフは，$y=x^2+4x+8$ のグラフを，どのように平行移動したものか。

（6）ｙ＝ａ$x^2$＋ $b$ $x$＋ $c$の平方完成（平方完成という用語は出てきていない）

ｙ＝ａ$x^2$＋ $b$ $x$＋ $c$はｙ＝$ax^2$を平行移動したグラフとして考えさせる

**（以上図 6 参照）**

図 7



78　第3章　2次関数

**2次関数の決定**

2次関数は，その表す放物線の頂点と通る1点を与えると定まる。

例題3　点 (2，8) を頂点とし，点 (4，−4) を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

考え方　頂点が点 (2，8) だから，求める2次関数は，$y=a(x-2)^2+8$ の形である。

解　頂点が点 (2，8) だから，
求める2次関数は，
$y=a(x-2)^2+8$
と書ける。
このグラフが点 (4，−4) を通るから，
$-4=a(4-2)^2+8$
これを解くと，
$a=-3$
よって，求める2次関数は，
$y=-3(x-2)^2+8$
つまり，　$y=-3x^2+12x-4$



問11　点 (1，−2) を頂点とし，点 (0，2) を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

練習3　頂点が $x$ 軸上にあり，$y$ 座標が同じ2点 (3，−2)，(5，−2) を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

第2節　2次関数のグラフ　79

また，2次関数は，その表す放物線の軸と通る2点を与えると定まる。

例題4　軸が直線 $x=-2$ で，2点 (0，1)，(−3，4) を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

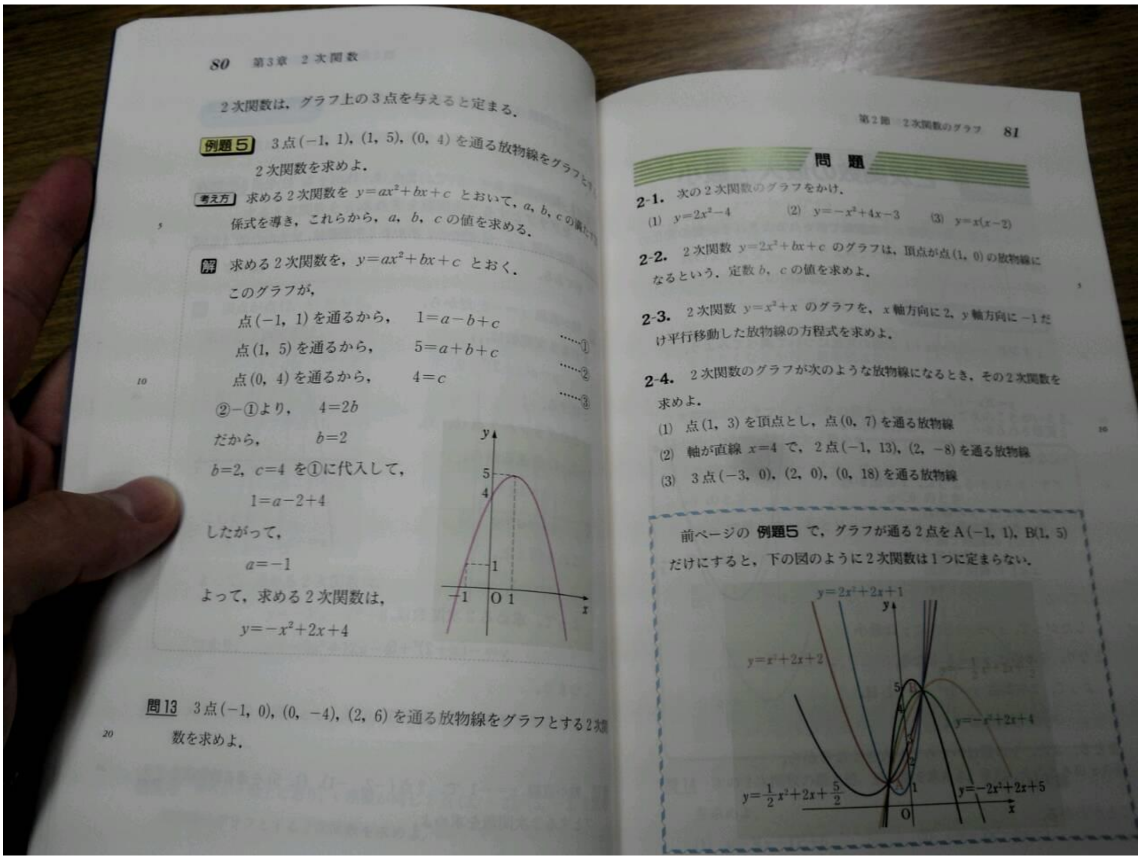
考え方　軸が直線 $x=-2$ だから，求める2次関数は，$y=a(x+2)^2+q$ の形である。

解　軸が直線 $x=-2$ だから，
求める2次関数は，
$y=a(x+2)^2+q$
と書ける。
このグラフが2点 (0，1)，(−3，4) を通るから，
$$\begin{cases}1=4a+q\\4=a+q\end{cases}$$
これを解くと，
$a=-1$，$q=5$
よって，求める2次関数は，
$y=-(x+2)^2+5$
つまり，
$y=-x^2-4x+1$



問12　軸が直線 $x=-1$ で，2点 (−2，−1)，(1，5) を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

図 8



80 第3章 2次関数

2次関数は，グラフ上の3点を与えると定まる。

例題5 3点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ 5)$，$(0,\ 4)$ を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

考え方 求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおいて，$a$，$b$，$c$ の満たす関係式を導き，これらから，$a$，$b$，$c$ の値を求める。

解 求める2次関数を，$y=ax^2+bx+c$ とおく。

このグラフが，

点 $(-1,\ 1)$ を通るから，　$1=a-b+c$ ……①

点 $(1,\ 5)$ を通るから，　$5=a+b+c$ ……②

点 $(0,\ 4)$ を通るから，　$4=c$ ……③

②−①より，　$4=2b$

だから，　$b=2$

$b=2$，$c=4$ を①に代入して，

$1=a-2+4$

したがって，

$a=-1$

よって，求める2次関数は，

$y=-x^2+2x+4$



問13 3点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ -4)$，$(2,\ 6)$ を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

第2節 2次関数のグラフ 81

問題

2-1. 次の2次関数のグラフをかけ。

(1) $y=2x^2-4$ (2) $y=-x^2+4x-3$ (3) $y=x(x-2)$

2-2. 2次関数 $y=2x^2+bx+c$ のグラフは，頂点が点 $(1,\ 0)$ の放物線になるという。定数 $b$，$c$ の値を求めよ。

2-3. 2次関数 $y=x^2+x$ のグラフを，$x$ 軸方向に2，$y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

2-4. 2次関数のグラフが次のような放物線になるとき，その2次関数を求めよ。

(1) 点 $(1,\ 3)$ を頂点とし，点 $(0,\ 7)$ を通る放物線

(2) 軸が直線 $x=4$ で，2点 $(-1,\ 13)$，$(2,\ -8)$ を通る放物線

(3) 3点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(0,\ 18)$ を通る放物線

前ページの 例題5 で，グラフが通る2点をA$(-1,\ 1)$，B$(1,\ 5)$ だけにすると，下の図のように2次関数は1つに定まらない。



（7）2 次関数の決定

頂点と別の 1 点を通る放物線、軸の直線と別の 2 点を通る放物線、3 点を通る放物線について例題と問を設置

問題については例題、問で解いた問題と同じ解き方で解ける問題を設置

**（以上図 7、図 8 参照）**

# 3. 指導計画

## 3.1 指導案

本時のねらい

どんな二次関数でも、y=ax^2 に帰着することが出来ることを理解する。

問題

y=3x^2(図 1)を与え、頂点を設定（1,6）し、そこを頂点とする y=3x^2 と合同なグラフを描いて、式を求めよ。

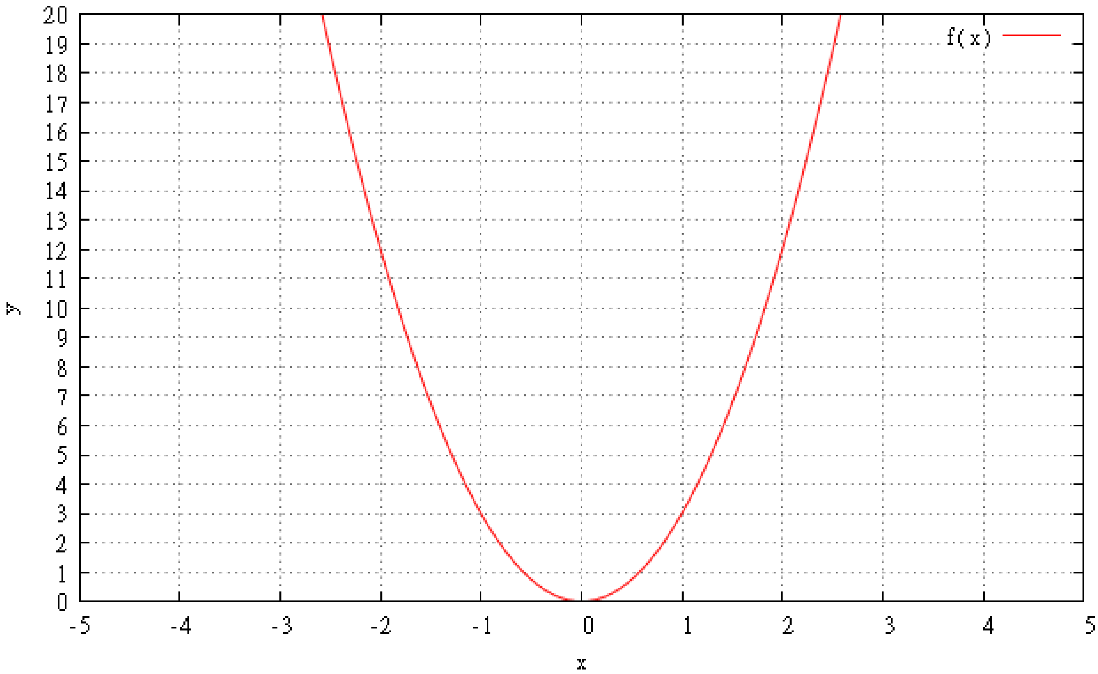



図 1.f(x)=3x^2

A への支援
頂点を(1,6)とする y=3x^2 と合同なグラフを描く方法は、様々な方法があるだろうか。
各点の動きに注目してみましょう。

期待する活動 A
頂点が(0,0)から(1,6)に移動しているから、全ての点を x 方向に+1、y 方向に+6 移動させ、表にし、点をプロットしていく。

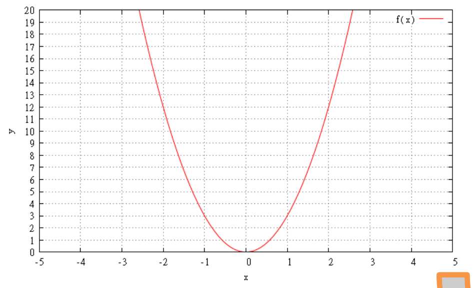
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | … | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | … |
| y | … | 12 | 3 | 0 | 3 | 12 | … |

頂点の移動

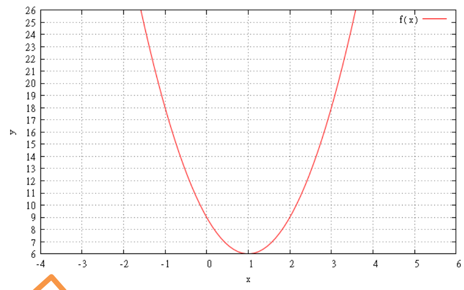
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | … | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
| y | … | 18 | 9 | 6 | 9 | 18 | … |

B への支援
１つ１つ調べると時間がかかる。
もう少し効率の良いやり方はないか。
全体を一度に考えることはできないだろうか。
表で考えずにグラフ上で考えることはできないか。
頂点を動かしてみて、その他の点のふるまいを考えさせる。

期待する活動 B
座標変換、座標を動かして考える。



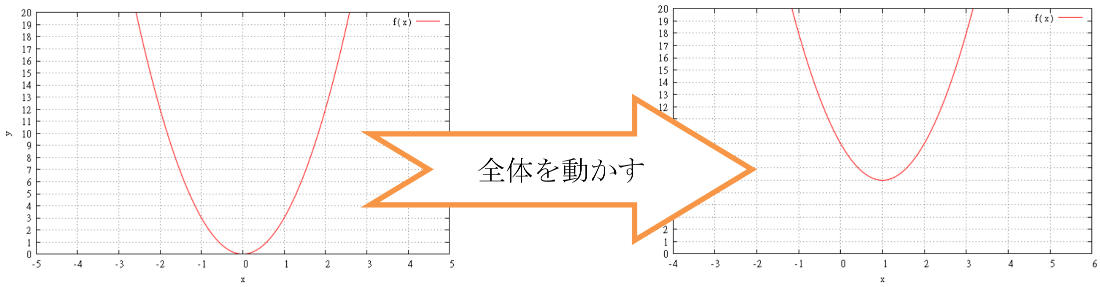

座標を動かす



C への支援
グラフを動かすことはできないか。
各点の座標のふるまいがしっかりわかるやり方でやってみよう。
あくまでグラフは問題の解決や意思決定・予測をおこなう上での手段ということを伝える。

期待する活動 C
平行移動、グラフを動かして考える。

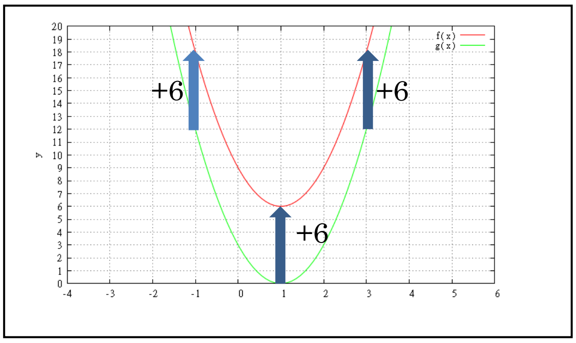
頂点をずらし、合同な傾きを考えグラフを描く。




N への支援
今までやった事を式上で行えないか。
y 軸平行移動の例を示し、式とグラフとの関係をイメージさせ、x 軸方向の平行移動も同様に考えてもらう。

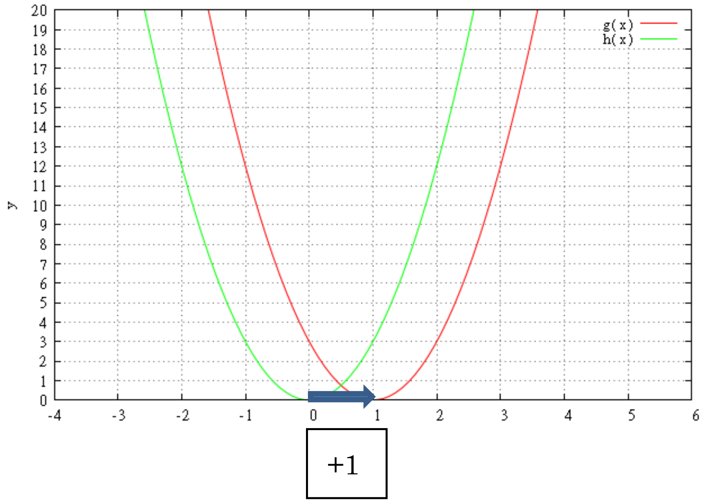
式上で平行移動（平方完成）が行える　＝　$Y=aX^2$ に帰着することができた

・練り上げ
A のやり方では少し時間がかかって、効率が悪いです。
次に B のやり方を検討したところグラフの各点の座標がどのようにふるまっているかわからないことに気づきました。
では、グラフ自体を動かせないかと考え、最初に y 軸方向に着目しました。グラフから、式全体を+6 すると、グラフを縦に移動させることができることに気付きました。




図） y 軸平行移動の例を描いた紙

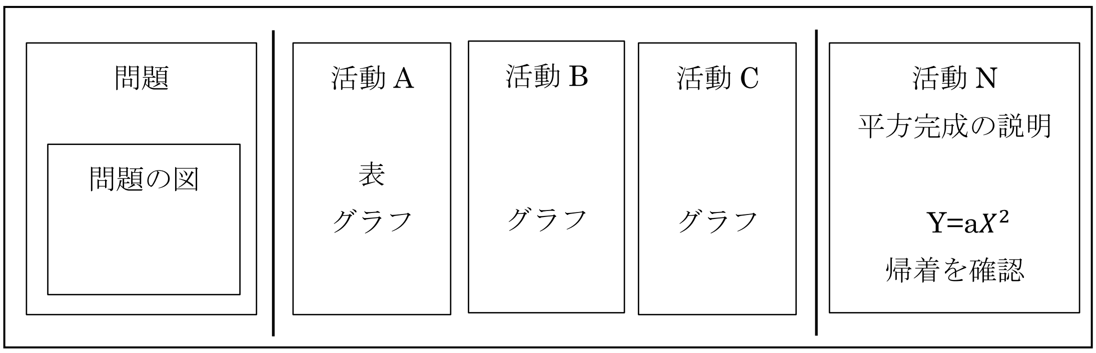
次に、x 軸方向を考えました。x 方向の移動は頂点のふるまいに注目して考えてみました。




このグラフを見ると、グラフを右に動かすと、x=0 のときの値が動かす前のグラフの x=-1 のときの値と同じになっています。

このことから、x→(x-1)と考えると、元のグラフとつじつまが合うと思いました。よって、答えは y=3(x-1) ^2+6 になると考えました。

板書計画



# 4. 参考文献

『国立教育政策研究所 HP』(http://www.nier.go.jp/guideline/)

東京書籍「数学Ｉ」H19 年度版

数研出版「数学Ｉ」H19 年度版

啓林館「数学Ｉ」H20 年度版

# 5. 総括

## 4.1 森野 宗一郎

このレポートを作成するにあたって、一番困難に思ったことは、“どうしても自分の経験した授業が頭から離れない”という事でした。私は、“問題解決型授業”というものを大学に入って初めて知ったのですが、この方法で指導案を考えて行くうえで、どうしても生徒の立場になって考えるということが出来ませんでした。具体的に言うと、平行移動を知らない生徒（既習事項 ＝ y=ax^2）に対して、こちらが平行移動の考えに持っていこうと無意識のうちに操作していしまっていたということです。溝口先生に「生徒から「なぜそうしないといけないの？」という疑問が出るのでは？」という助言をしていただく度に悩まされました。

## 4.2 三嶋 一生

この授業を通し、教師は教科書通りに授業をするのではなく、授業の時間数と時間配分を考え、指導案を作成するために多くの時間をかけているのを知った。指導案を作成する中で授業の目標やねらいを考え、生徒の反応や予想される活動を考えることが大変であった。特に生徒への支援に関しては、理解の個人差に応じた支援を考えるのは時間が難しかった。ただ単に問題解決を導かせる支援ではなく、あくまで生徒の自力解決を重視した数学的価値のある支援でなければならないことを学んだ。今回学んだことを教育実習での授業設計で生かしていきたい。

## 4.3 原 尚央

授業を設計することの難しさが良くわっかた。また、私たちが高校まで受けていた授業には自力解決型の授業構成が少なかったのだと感じました。高校の数学教師を目指している私にとって授業の終わり生徒自身が何か学べたと思えるような授業構成を考えていく必要があると思った。
生徒がどう考えどのように支援していく必要があるか、自分の経験をもとに考えていくことが最も難しかった点でした。

## 4.4 堀 和也

今回は二次関数に注目して調べたが、全ての授業にこれほどまでの背景があるというのを知る事ができた。今までの授業はどちらかというと教科書通りにただひたすらに解いていただけな気がするので、いろいろな班の話を聞いていて面白かった。
教える側はその問題の答えや考え方を知っているので簡単かも知れないが、何も知らない人に教えるというのは順序も大切で、それでいて時間配分も限られているのでこれらの研究はとても重要だと思った。