

平成 24 年度

# 数学学習指導設計 I

## J2 図形

テーマ 「正しい物事の判断」

岩佐 美樹

倉崎 裕子

若林 宥哉

林田 笑美

## 目次

1 単元と設定理由	p.3
2 変遷	p.3
2.1 円の変遷	p.3
2.2 証明の変遷	p.5
3 教材研究	p.6
3.1 『数学教育の理論と実際〈中学校・高等学校（必修）〉』	p.6
3.2 宮崎樹夫 『数学教育 No.474 図形の性質と合同・相似指導の展開』 明治図書	p.7
3.3 考察	p.8
4 テーマ設定と設定理由	p.10
5 指導案	p.11
第1回	p.11
第2回	p.11
第3回	p.13
第4回	p.15
第5回	p.17
第6回	p.18
第7回	p.21
6 感想	p.23
7 引用・参考文献	p.24

## 1 単元と設定理由

(設定単元)

円

(設定理由)

円周角の定理などには三角形や四角形の性質を用いるので、今までの復習をしながら、円の定理などを学習できる。円の定理を使う問題にはさまざまなものがあり、角や面積を求めることができても、証明ができない生徒もいるので力を入れたい。また、円は身近にあるので生徒にとっても親しみやすい。高校で円を学習するにあたって、中学で学ぶ円は基礎となる。

## 2 変遷

### 2.1 円の変遷

(単元移動)

	昭和 26 年	昭和 33 年	昭和 44 年	昭和 52 年	平成元年	平成 10 年	平成 20 年
円の性質		3	3	3	3	2	3
円周角と中心角		3	3	3	3	2	3
円と接線		1,3	3	3	3	1	3
接線の性質		3	3	3	3	1	3
2つの円に関する性質		3	3	3	3		3
円に内接する四角形の性質		3	3	3	3	2	3

私たちは、「円周角と中心角」に焦点をあてた。

(学習指導要領の変遷)

平成 10 年版のみ、「円周角と中心角」は第 2 学年の学習内容である。

昭和 33 年

基本的な図形の性質の理解を深め、これを用いるとともに、図形に対する直観力や論証の能力をいっそう伸ばす。

- ・円周角と中心角との関係およびその簡単な応用。

昭和 44 年

円の性質についての理解を深め、それを用いて図形の性質を考察することができるようにする。

- ・円における円周角と中心角との関係。

昭和 52 年

円の性質についての理解を深め、それを用いて図形の性質を考察することができるようにする。

- ・円周角と中心角との関係

平成元年

円の性質についての理解を深め、それを用いて図形の性質を考察することができるようにする。

- ・円周角と中心角との関係

平成 10 年

平面図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察する能力を養う。

- ・円周角と中心角の関係を観察や実験などを通して見だし、それが論理的に確かめられることを知ること。

平成 20 年

観察、操作や実験などの活動を通して、円周角と中心角の関係を見だして理解し、それを用いて考察することができるようにする。

- ・円周角と中心角の関係を理解し、それが証明できることを知ること。
- ・円周角と中心角の関係を具体的な場面で活用すること。

平成元年版までは円周角と中心角の性質を知ることが重視されているが、平成 10 年版からは円周角と中心角の性質を利用し、証明することを重視している。なぜなら、証明を習い始める第 2 学年で円周角の定理を学ぶことで証明に慣れさせ、証明する力をつけさせるためである。平成 20 年版では、「円周角と中心角」の単元が第 3 学年に移動している。これは、第 2 学年における図形の性質の学習に引き続き、それらの性質を用いて数学的に推論することにより、円周角と中心角の関係について考察し、その関係を具体的な場面で活用することを重視したためである。例えば、「円周角の 2 倍が中心角」ということを、三角形の外形の性質を使って証明することがあげられる。

円周角と中心角を勉強するにあたり、証明する力をつけることが重要だと思い、テーマを「図形の証明」に変更した。

## 2.2 証明の変遷

平成20年（第2学年）

◎三角形や四角形の性質などを観察，操作や実験などの活動を通して見だし，それを論理的に確かめることができるようにする。特に，いくつかの事例で成り立っていることが，一般的に成り立つことを明らかにするのに，証明という概念が必要であることを理解できるようにする。

また，予想した図形の性質や，図形の中に見いだせる関係の正しさや一般性を保証するため，推論の根拠とする事柄や推論に用いる用語の定義を明確にし，仮定と結論の意味を明らかにして，論理的に筋道を立てて正しい推論ができるようにする。このような数学的な推論の必要性と意味及びその方法を理解できるようにするとともに，思考の過程を振り返って考えるなどして，徐々に論理的に考察し表現することができるようにする。

平成10年（第2学年）

◎基本的な平面図形の性質について，観察，操作や実験を通して理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し，推論の過程を的確に表現する能力を養う。

平成元年（第2学年）

◎基本的な平面図形の性質についての理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し，推論の過程を的確に表現する能力を養う。

昭和52年（第2学年）

◎基本的な平面図形の性質についての理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解させ，論理的に表現する能力を養う。

昭和44年（第1学年）

◎図形をいろいろな観点から分類したり，図形を移動したり，条件を満たす図形を考えたりして，図形についての理解を深める。また，広く直観的な見方や考え方を伸ばすとともに，筋道を立てて考察することができるようにする。

昭和33年（第2学年）

◎合同や相似の概念を明らかにし，それらに基いて図形の基本的な性質を明確にする。また，図形に対する直観的な見方や考え方をさらに伸ばすとともに，論証の意義や方法について理解させ，論理的に筋道を立てて考える能力を養う。

### 3. 教材研究

#### 3.1 数学教育の理論と実際〈中学校・高等学校（必修）〉

<証明の意義>

##### ●数学的意義

論証の意義が理解できたという場合の判断基準（小関ら（1987））

##### ① 「論証の一般性」の理解

- ・定理は一つの集合を構成する全ての項について、ある性質を肯定する命題であること
- ・証明には一般性があること
- ・図は代表的であること
- ・実際・実測による方法の特徴の理解

##### ② 「論証の仕組み」の理解

- ・仮定・結論、証明の意味
- ・根拠となる事柄、定義の意味
- ・循環論法は不合理であること
- ・「体系」（局所的な構造化）の理解

##### ●数学的以外の意義

証明を人と人が数学を通して対話する一つの文化的形態であるとみれば、

- ・命題の正しさを立証
- ・命題の意味を分かりやすく説明
- ・命題を体系化
- ・新しい事実を発見
- ・コミュニケーション

といったことも証明の意義である。

→論証指導を通して実現を図っていかなければならない

(参考文献)

数学教育研究会 『数学教育の理論と実際〈中学校・高等学校（必修）〉』 聖文新社

ここでの証明の意義では、数学的意義より数学的以外の意義の方が証明の機能といえる。だから、これだけでは不十分だと思い、日本の証明の第一人者である宮崎樹夫さんの明治図書『数学教育』について調べてみた。

### 3.2 宮崎樹夫 『数学教育 No.474 図形の性質と合同・相似指導の展開』 明治図書

宮崎樹夫の『証明指導で何が育成され得るのか』

#### 1. ことがらの正しさに関する適切な考え方の育成の必要性

意義の実現可能性を検討するためには、証明指導によって、ことがらの正しさに関する適切な考え方が本当に育成され得るかどうかを考察する必要があります。なぜなら、適切な考え方があって証明指導は為されるべきですし、万が一、こうした見込みの無い、あるいは、不適切な考え方が育成されてしまう可能性があるとするれば、学校教育における証明指導の位置づけを考え直す必要があると思われるからです。

#### 2. ことがらの正しさの基準に関して何が育成され得るのか

##### (1) ことがらの正しさの基準に関する考え方

証明指導において、たとえば二等辺三角形の性質を扱うとき、子どもは「なぜ、この性質が正しいことを示すのか」という疑問を抱く場合があります。この疑問は、証明の必要性に関係すると同時に、証明によって、この性質を正しいとすることの意味に関係します。特に、後者の疑問は、「あることがらを正しいと考えるとき、そのことは何を意味するか」という正しさの意味の問題に属します。また、証明指導では、子どもが「何をすればこの性質が正しいことを示したことになるのか」という疑問を抱く場合が多くみられます。この疑問は、「どういう基準によってことがらを正しいと考えるか」という正しさの基準の問題に属します。このように、証明指導において、子どもは、ことがらの正しさについて、その意味と基準の問題に直面し、その解決に取り組む中で何らかの考え方を身につけると考えられます。

##### (2) ことがらの正しさの基準に関して何が育成され得るのか

- ① 2つの基準（事実との対応、前提からの演繹）と両者の関係
- ② 正しさの基準の使い分けが事柄に応じて予め定められている
- ③ 予め定められた区別にしたがって前提を用いる

		視点b	
		前提として用いられる前に	
		証明の対象とされる	証明の対象とされない
視点a	整理される	例：対頂角の性質	例：同位角の性質
	整理されない	例：二等辺三角形の性質	例：二等辺三角形で頂角の二等分線が底辺と交わること

図 1 生徒の証明に対する視点

視点 a : 「根拠となることがら」として予め整理されるかどうか  
 視点 b : 前提として用いられる前に、証明の対象とされるかどうか

### 3. 証明指導の改善に向けて

教科書に準じる証明指導によって事柄の正しさに関して、次の考え方が子どもたちに育成されます。

ことがらの正しさの基準は次の2つであり、2つの基準をことがらに応じて使い分けるかは自分と無関係に予め定められている。

基準 a : ことがらが自分の知り得る事実と対応する。

基準 b : 予め定められた区別にしたがって前提が用いられて、ことがらが演繹されている。

この考え方には、本来教育の主体であるべき子どもとは無関係に、予め定められた部分が含まれています。確かに正しさの基準の使い分け方や前提の用い方を予め定めておくと、子どもたちが何を前提にしたらよいのかと迷うことや循環論に陥るのを回避できるのは事実です。その意味では、大切な教育的配慮と言えます。

一方、中学校数学での証明指導は義務教育の一環として為されるのですから、子どもたちが学校や家庭から巣立ち、社会の中で自立した姿を念頭におくべきです。その社会では、これまで以上に国際化・情報化などが進展すると思われます。ですから、自分の遭遇した状況や局面において、審議や正誤を定めることが自分にとってどんな意味を持つのか／審議や正誤をどうやって定めればよいか／その時の意味や基準として何が適切であるか／何を推論の前提として定めればよいかといったことは、基本的に子どもたち自身が自らの責任で将来実行することが、これまで以上に必要となるでしょう。

この必要に答えるために、教科書に準じる証明指導が今のままでよいとは思えません。本稿で考察した範囲に限っても、証明指導において、ことがらの基準の正しさを何にするのか、何を推論の前提と定め、どのように用いるのかといったことは、一人一人の子どもが、自らの責任で可能な限り決定することが望まれます。その反面、証明指導が義務教育の一貫であることを考えると、証明の対象となることがらの探求と決定を一人の子どもや子どもたちにすべて委ねることには無理があるでしょう。

(引用:宮崎樹夫『数学教育 No.474 図形の性質と合同・相似指導の展開』明治図書)

### 3.3 考察

子どもが社会の中で、真偽や正誤をどのように定めればよいかなどを将来自らの責任で実行できるようになるために、教科書に準じる証明指導で、ことがらの正しさの基準や、推論をどのようにしていくのかを一人一人の子どもが可能な限り決定することが望まれるが、証明の対象となることがらの探求と決定をすべて委ねることには無理があるということから、教える側がどの程度まで子どもたちに委ねるべきかを考えて証明指導をしていく必要があると感じた。



図 1 の例を付け加えた。

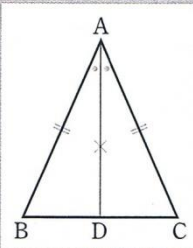
		視点 b	
		対象とされる	対象とされない
視点 a	整理される	例: 対頂角の性質 錯角の性質	例: 同位角の性質 合同条件、相似条件
	整理されない	例: 二等辺三角形の性質 平行四辺形の性質	例: 二等辺三角形で頂点の二等分線が底辺で交わること

図 2 生徒の証明に対する視点

例題 1  $\triangle ABC$  で、 $AB=AC$  ならば  $\angle B=\angle C$  であることを示せ。

証明

$\angle A$  の二等分線をひき、 $BC$  との交点を  $D$  とする。



$\triangle ABD$  と  $\triangle ACD$  で、

$\angle BAD = \angle CAD$  ----- ①

$AB = AC$  ----- ②

また、  $AD = AD$  ----- ③


①、②、③ から、2 辺とその間の角が、それぞれ等しいので、

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$

よって、 $\angle B = \angle C$

三角形の合同条件 P.94

合同だから、  
対応する角は  
等しいね



辺  $AD$  は  $\angle A$  の二等分線で、図を描くと底辺で交わり図 2 の右下に当てはまる。

仮定から  $\angle BAD = \angle CAD$ 、 $AB = AC$  がいて、辺  $AD$  は共通なのでこれらの仮定から使える合同条件を用いる。合同条件は前提として用いられる前に、証明の対象とされなく、学校から与えられるので使えることができる。これらの条件から  $\angle B = \angle C$  という二等辺三角形の性質、つまり図 2 の左下が演繹推論から導かれる。

例題2  $l \parallel m$  として、 $l$  上の点  $A$  と  $m$  上の点  $B$  を結ぶ線分  $AB$  の中点を  $O$  とします。点  $O$  を通る直線  $n$  が、 $l$ 、 $m$  と交わる点を、それぞれ、 $P$ 、 $Q$  とするとき、 $AP=BQ$  を示せ。

**証明**

$\triangle OAP$  と  $\triangle OBQ$  で、

$O$  は  $AB$  の中点だから、  
 $OA=OB$  ……①

対頂角は等しいから、  
 $\angle AOP = \angle BOQ$  ……②

$l \parallel m$  で、錯角は等しいから、  
 $\angle OAP = \angle OBQ$  ……③

①、②、③から、1組の辺とその両端の角が、それぞれ等しいので、  
 $\triangle OAP \cong \triangle OBQ$   
 合同な図形では、対応する辺の長さは等しいから、  
 $AP=BQ$

対頂角や錯角の性質は前提として用いられる前に、証明の対象とされるので、すでに既習済みである。なので、ここでは仮定として使われている。三つの仮定から使える合同条件を用いて  $AP=BQ$  が演繹的に求められた。

#### 4 テーマ設定と設定理由

テーマ<正しい物事の判断>

設定理由

宮崎樹夫さんの『数学教育』を読み、教科書に準じる証明指導では、子供が社会の中で、真偽や正誤をどのように定めればよいかなどを将来自らの責任で実行できるようになることが目的とされている。

このことから、子供一人一人がことがらの正しさの基準や、推論をどのようにしていくのかを自己決定できるような授業が必要である。

## 5 指導案

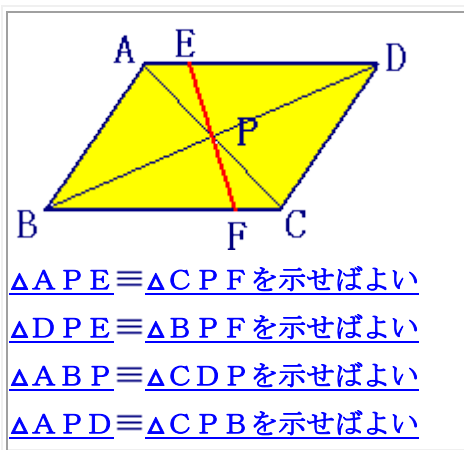
宮崎樹夫さんの『証明指導で何が育成され得るのか』を読み、教科書に準じる証明指導では、子供が社会の中で、真偽や正誤をどのように定めればよいかなどを将来自らの責任で実行できるようになることが目的とされている。

このことから、子供一人一人がことがらの正しさの基準や、推論をどのようにしていくのかを自己決定できるような授業が必要であるので、生徒が「何をすればこの性質が正しいことを示したことになるのか」を自分で見つける力をつけることのできるような問題を考えた。

### 【第1回】

#### 問題

次の図において平行四辺形  $ABCD$  の対角線の交点を  $P$  とするとき、 $PE = PF$  を証明するためには、どの三角形とどの三角形の合同を示せばよいか。



仮定から結論を導く方法（証明）は1つだけとは限りません。上の問題は、解答が2つあります。

この問題の問い方では、生徒が「何をすればこの性質が正しいことを示したことになるのか」を自分で見つける力がつかない。そこで、問い方を考え直し、生徒たちの考えを推測した。

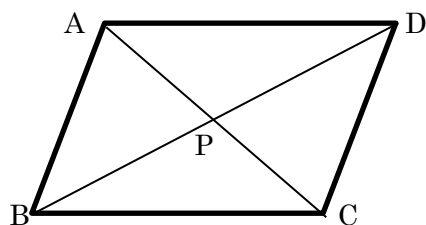
### 【第2回】

#### 問題

平行四辺形  $ABCD$  の対角線の交点を  $P$  とするとき、 $P$  を通る全ての線分は二等分されることを証明せよ。

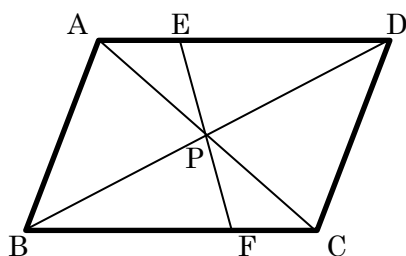
まず問題だけ与えて、生徒に考えさせる。

私たちは、三角形の合同と使う生徒と使わない生徒がいると推測した。  
(合同を使う場合)



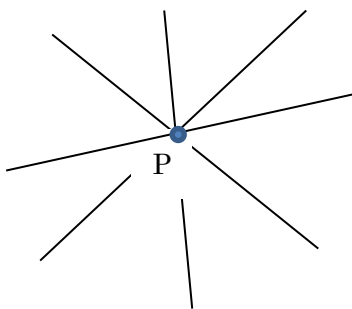
$$\triangle APB \equiv \triangle CPD \text{ より } AP=CP$$

しかし、これではPを通る全ての線分が二等分されることを証明したことにはならない。  
そこで、下の図を生徒に描かせるよう誘導していかなければならない。

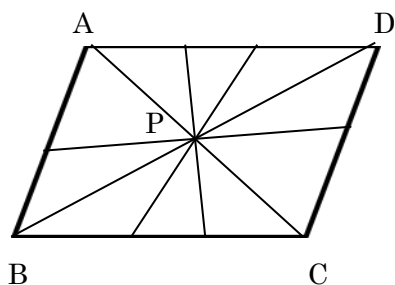


→どのような支援が必要か考える。

点Pを通る線をいくつか書いてもらう。→点Pを通る直線は多数ある。

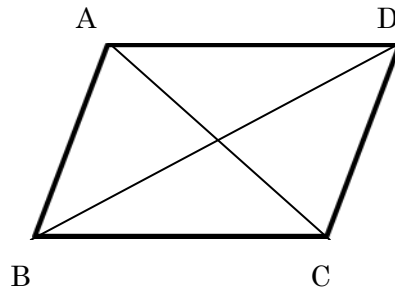


では、平行四辺形の場合ではどうなるか？

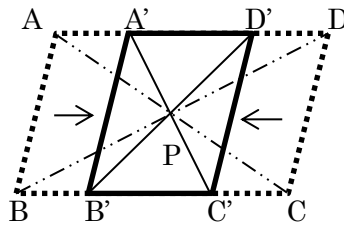


→点Pを通る線分は対角線だけではないと気付かせる。

(合同を使わない場合)



平行四辺形の性質「平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる」より  $AP=CP$ 。辺 AB、辺 DC を平行移動させると、 $A'P=C'P$  となる。



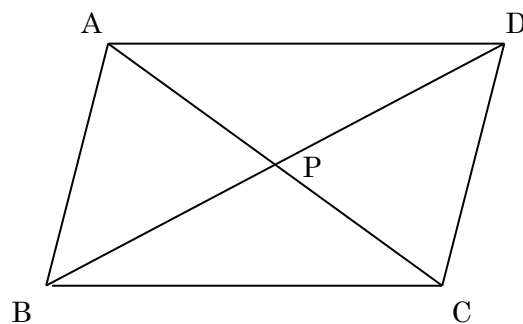
同様にしていくと、点 P を通る線分は二等分されることが証明される。

この考えでは、P を通る全ての線分は二等分されることを証明したことにはならない。証明は、何通りか調べたから全てにいえるという帰納的推論ではなく、演繹推論でないといけない。なので、演繹推論での解法を考え直した。

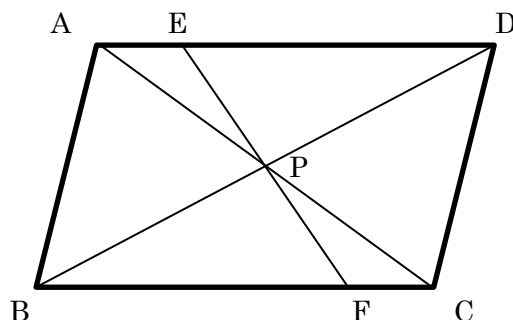
### 【第3回】

問題

平行四辺形 ABCD の対角線の交点を P とするとき、点 P を通る全ての線分は二等分されることを証明せよ。ただし、平行四辺形の性質は既習とする。



<解答例>点 P を通る直線 EF を引く。



証明

$\triangle APE$  と  $\triangle CPF$  において

平行四辺形の性質より

$$AP=CP \quad \text{①}$$

錯角は等しいので

$$\angle EAP=\angle FCP \quad \text{②}$$

対頂角は等しいので

$$\angle EPA=\angle FPC \quad \text{③}$$

一辺とその両端の角が

それぞれ等しいので

$$\triangle APE \equiv \triangle CPF$$

合同な三角形は対応する辺は等しいので

$$EP=FP$$

この証明で、

$\angle EAP$  と  $\angle DAP$ 、 $\angle FCP$  と  $\angle BCP$  は

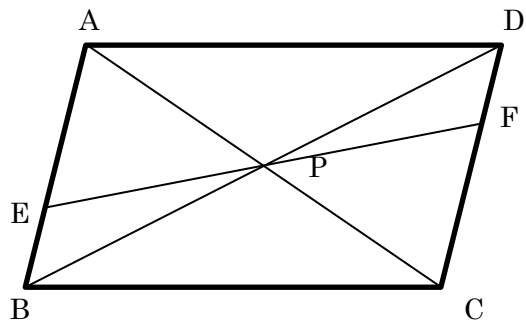
それぞれ同じ角を表わしているので、

点 E、F の位置は影響されない。

従って、

点 P を通る全ての線分は二等分されると

言える。



証明

$\triangle BPE$  と  $\triangle DPF$  において

平行四辺形の性質より

$$BP=DP \quad \text{①}$$

錯角は等しいので

$$\angle EBP=\angle FDP \quad \text{②}$$

対頂角は等しいので

$$\angle EPB=\angle FPD \quad \text{③}$$

一辺とその両端の角が

それぞれ等しいので

$$\triangle BPE \equiv \triangle DPF$$

合同な三角形は対応する辺は等しいので

$$EP=FP$$

この証明で、

$\angle EBP$  と  $\angle ABP$ 、 $\angle FDP$  と  $\angle CDP$  は

それぞれ同じ角を表わしているので、

点 E、F の位置は影響されない。

従って、

点 P を通る全ての線分は二等分されると

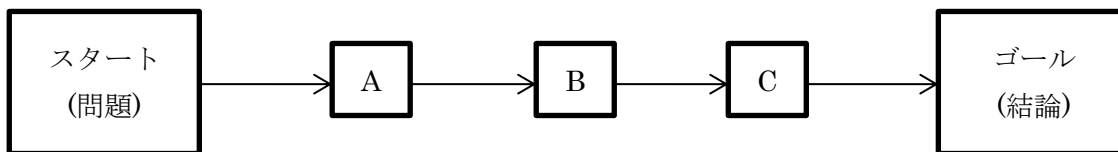
言える。

上の記述から平行四辺形の対角線の交点を通るすべての線分は二等分されることを示したことになる。

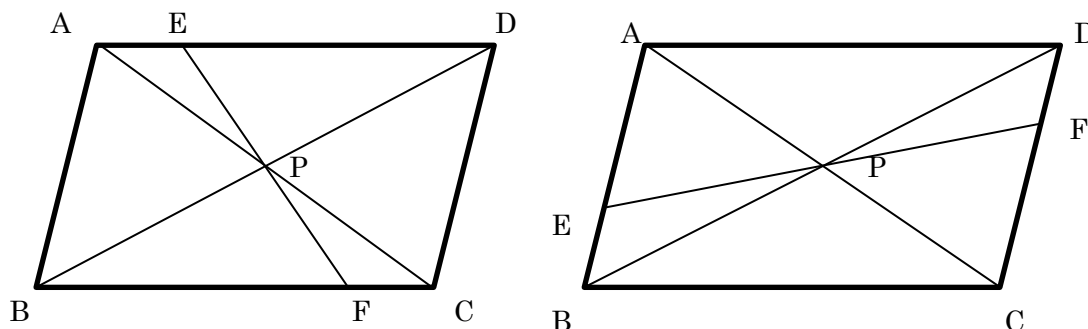
$\triangle APE$  と  $\triangle CPF$  の合同と  $\triangle BPE$  と  $\triangle DPF$  の合同を用いる方法は、どちらの図でも成り立つため、E、F の位置だけでなく図にも影響されないことがわかる。

さらに、問題をスタート、点 P を通る全ての線分は二等分されることをゴールとすると、スタートからゴールまでの過程に3つの活動があると考えた。

【第4回】



解答例 点Pを通る直線EFを引く。



A	{	B	{	△APE と△CPF において平行四辺形の性質より AP=CP
				錯角は等しいので∠EAP=∠FCP
				対頂角は等しいので∠EPA=∠FPC
				一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので△APE≡△CPF
				合同な三角形は対応する辺は等しいので EP=FP
			C	この証明で、∠EAP と∠DAP、∠FCP と∠BCP はそれぞれ同じ角を表わしているので、点 E、F の位置は影響されない。
				また、上記の証明は図にも影響されない。

従って、点Pを通るすべての線分はPで二等分されるといえる。

〈活動〉

- ・活動 A  
三角形の合同条件を用いて EP=FP を証明する。
- ・活動 B  
点 E,F の位置に影響されないことを示す。
- ・活動 C  
図にも影響されないことを示す。

そして、それぞれの活動をつなぐような支援を考えた。

〈支援〉

活動 A への支援

一般的支援：何を求めようとしているのか。

特殊な支援

- ・何を証明したら P を通るすべての線分が二等分されることを示せるか。
- ・ $AP=CP$  を証明するだけではすべての線分が二等分されることを証明したことにはならないから、他に線を引く必要がある。

活動 B への支援

一般的支援：問題に適しているか。

特殊な支援

- ・なぜ違う図によって同じ証明がつけられるか。
- ・何通りか証明しただけですべてのことについて言えるのか。

活動 C への支援

一般的支援：他の図で考える。

特殊な支援

- ・できた証明で他の図をかく。
- ・三角形の形や大きさが変わっても、含まれている線分  $EF$  は変わらない。

しかし、このような支援ではわからない子をもっと分かりにくくさせる。なので、支援をもう一度考え直し、新たにそれぞれの活動に対する価値も考えた。



## 【第5回】

### 〈支援〉

#### 活動 A への支援

特殊な支援：「どの三角形とどの三角形を証明で使う？」

「三角形の合同条件を使うよね？」

#### 活動 B への支援

一般的支援：「なぜ違う図によって同じ証明がつけられるか？」

特殊な支援：「 $\angle EAP = \angle DAP$ ,  $\angle FCP = \angle BCP$  だから、点 E, F の位置は影響されてないよね？」

#### 活動 C への支援

一般的支援：「できた証明で他の図を書いてみよう」

「三角形の形や大きさが変わっても、含まれている線分 EF は変わらないよね？」

特殊な支援：「みんながつくった図をみて、自分の証明で他の人の図が描けるかな？」

### 〈価値〉

#### 活動 A の価値

ゴールに向かうための基礎となる証明をつくる。

#### 活動 B の価値

点 E, F に影響されないことから、図によらないことがわかり、活動 C につなげることができる。

#### 活動 C の価値

平行四辺形の性質をみたす四角形すべてにおいて同じことがいえる。

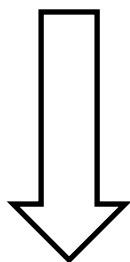
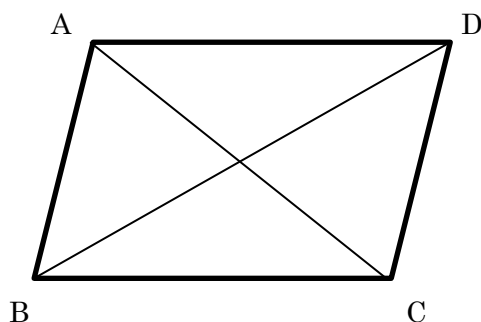
(例：正方形、長方形、ひし形など)

## 【第6回】

今までのことを指導案の形でまとめた。

スタート（問題）

平行四辺形 ABCD の対角線の交点を P とするとき、  
点 P を通る全ての線分は二等分されることを証明せよ。

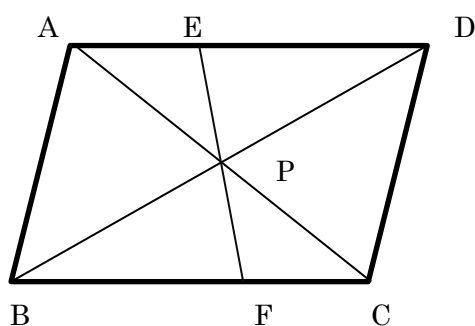


・特殊な支援

「三角形の合同条件を使うよね？」

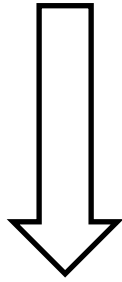
「どの三角形とどの三角形を証明で使う？」

活動 A：三角形の合同条件を用いて  $EP=FP$  を証明する。



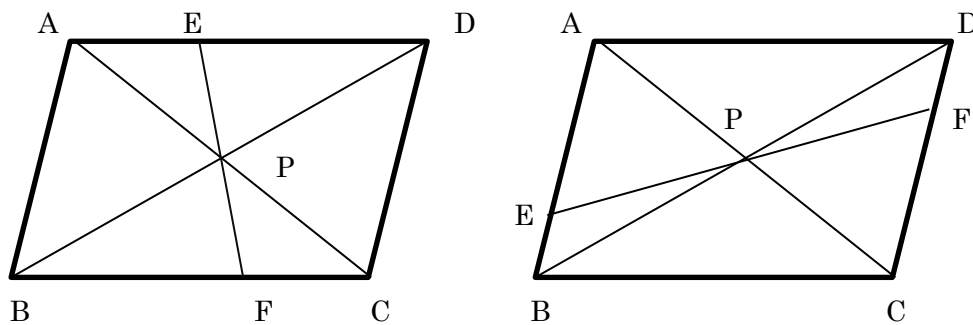
$\triangle APE$  と  $\triangle CPF$  において  
平行四辺形の性質より  $AP=CP$   
錯角は等しいので  $\angle EAP=\angle FCP$   
対頂角は等しいので  $\angle EPA=\angle FPC$   
一辺とその両端の角が  
それぞれ等しいので  $\triangle APE \cong \triangle CPF$   
合同な三角形は対応する辺は  
等しいので  $EP=FP$

価値：ゴールに向かうための基礎となる証明を作る。



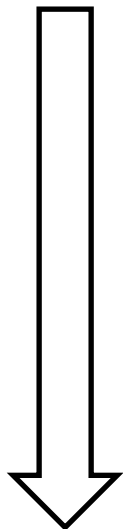
- 一般的支援  
「異なる図をかいて証明してみよう。」
- 特殊な支援  
「点 E,F を違うとり方したらどう図になる？」

活動 B : 点 E,F の位置は影響されないことを示す。



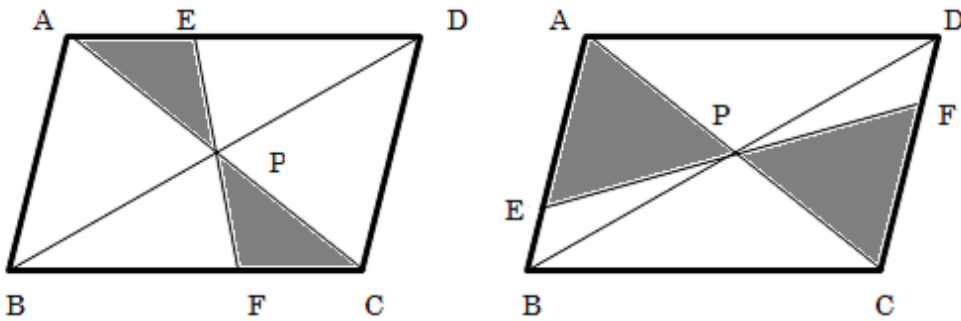
この証明で、 $\angle EAP$  と  $\angle DAP$ 、 $\angle FCP$  と  $\angle BCP$  はそれぞれ同じ角を表しているので、点 E、F の位置は影響されない。

価値 : 点 E,F に影響されないことから、図にも依らないことがわかり、次の活動につなげることができる。



- 一般的支援  
「なぜ違う図に対して、同じ証明が作られる？」
- 特殊な支援  
「作った証明から他の図はかけるかな？  
台形はこの証明からかけるかな？  
「台形ではできないことを証明の中から  
見つけられるかな？」

活動 C：図に影響されないことを示す。



$\triangle APE$  と  $\triangle CPF$  において

平行四辺形の性質より  $AP=CP$

錯角は等しいので  $\angle EAP=\angle FCP$

対頂角は等しいので  $\angle EPA=\angle FPC$

一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので  $\triangle APE \cong \triangle CPF$

合同な三角形は対応する辺は等しいので  $EP=FP$

また、上記の証明は図にも影響されない。

ここが台形ではできない。

価値：台形では点 P によって二等分されないことに気付く。

練り上げを考えた。

練り上げ

- (1) 一つの線分において、点 P は線分を二等分されることの確認。
- (2) 一つの線分を証明しただけでは、すべてが証明できるとは限らない。
- (3) 証明していることは同じなのに図が異なることに気づき、点 E、F は位置によらないことがわかる。
- (4) 図に影響されないことについての議論。  
(どんな四角形でも同じことがいえるのではないか。)
- (5) 活動 C の価値で台形では点 P によって二等分されないことに気づき、平行四辺形の性質を持つ四角形では、点 P を通る全ての線分は二等分されることがわかる。

このままでは、実際に指導するとき困るので、せりふ調に書き直した。

【第7回】

練り上げ

数学的活動

T：この問題ではどの証明方法を使うかな？

S：合同条件。

T：そうだね、三角形の合同条件を使います。

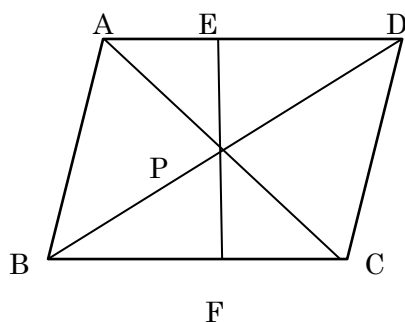
T：では、どの三角形とどの三角形を証明したらいいかな？

S： $\triangle APD$  と  $\triangle CPB$  ではないですか？

T：それでは P をすべての線分が二等分されることを証明したことにはならないよね？ほかに点 P を通る線分は引けるかな？引いてみよう。

(生徒に図を描かせる。)

S：



T：このとき、どの三角形とどの三角形を証明する？

S： $\triangle APE$  と  $\triangle CPF$  です。

T：では証明してみましょう。

<活動 A>

$\triangle APE$  と  $\triangle CPF$  において

平行四辺形の性質より  $AP=CP$

錯角は等しいので  $\angle EAP=\angle FCP$

対頂角は等しいので  $\angle EPA=\angle FPC$

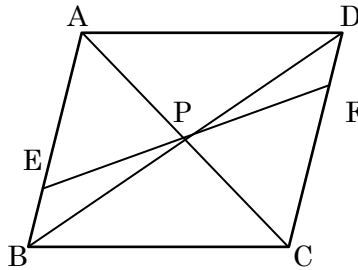
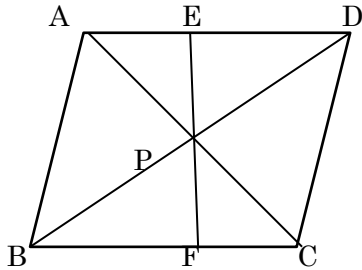
一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので  $\triangle APE \equiv \triangle CPF$

合同な三角形は対応する辺は等しいので  $EP=FP$

T：これでは、点 P を通るすべての線分が二等分されることをいえないよね？異なる図を描いて証明してみよう。点 E,F を違うとり方をしたらどういう図になるかな？

<活動 B>

S :



T : 各自で描いた図を証明してみよう。二等分されることを証明できましたか？

S : できました。

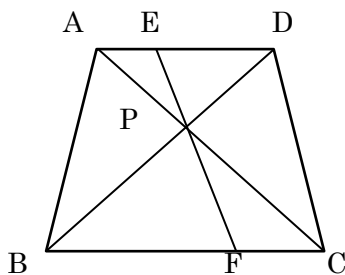
T : みんなはどんな図を描いているかな？見せ合おう。気づいたことはありますか？

S : 証明していることは同じなのに図は違います。

T : そうだね。点 E, F の位置が違っていても、点 P を通る線分は二等分されています。つまり、点 E, F の位置は影響されていません。点 E, F の位置が影響されていないことから、図にも依らないことが分かります。

T : では、どんな四角形でも点 P を通る線分が二等分されることがいえますか？

<活動 C>



$\triangle APE$  と  $\triangle CPF$  において

平行四辺形の性質より  $AP=CP$

錯角は等しいので  $\angle EAP=\angle FCP$

対頂角は等しいので  $\angle EPA=\angle FPC$

一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので  $\triangle APE \equiv \triangle CPF$

合同な三角形は対応する辺は等しいので  $EP=FP$

また、上記の証明は図にも影響されない。

ここが台形ではできない。

T：長方形やひし形は証明できるけど、台形では点 P を通る線分は二等分されないことが分かりました。つまり、平行四辺形の性質を持つ四角形では、点 P を通るすべての線分は、点 P で二等分されることがいえます。

【まとめ】

「何をすればこの性質が正しいことを示したことになるのか」を自分で見つけることができた。

## 6 感想

半年間の授業を通し、指導案をつくる大変さや重要性を実感しました。自分たちの決めたテーマに沿った問題をつくり、生徒に期待する活動を考え、それぞれの活動をつなぐような支援を考えることはとても難しく苦戦しました。しかし、グループで話し合うことによって、自分一人では思い浮かばなかったことに気付くことができ、より良い指導案ができたのではないかと思います。この講義で学んだことを活かし、生徒一人一人にあった支援をすることで生徒が自己解決できる力を身につけられるような授業ができるよう、もっと数学について考えていこうと思う。

岩佐 美樹

指導案を通して、指導する側は生徒の活動の過程を考え、それぞれの活動をつなぐような支援をしていくことが大切であるということが分かった。問題を見て、結論までたどり着くためにどのような活動をしていけばよいか、自分で理解できる生徒もいれば何から始めればよいか分からない生徒もいるので、それぞれの生徒に合った支援を考えることが必要であると感じた。実際に指導することになったときは、問題を通して、何をすれば結論にたどり着き、何をすれば物事が正しいかどうかを証明できるか、生徒が自分で判断し、解決することができるような支援をできるようにしたい。

倉崎 裕子

今までは授業というものは受けるものでしかなかった。しかし、この講義ではそれを作るという初めて教える立場に立ったようなものでした。なので、みんなでいろいろと話し合い、考えたり悩んだりしました。一番苦労したのは指導案作成です。問題を考えて、問題に対して生徒に期待する活動を考え、期待する活動へと導く支援を考え、練り上げを考える。これらのことを今まで考えることがなかったのでよい経験になりました。今はグル

一ワークで週に何回か集まって一つの授業を半年かけて作りましたが、これを何枚も作るとなるととても気が遠いです。だが、何人かで行うことで、自分では思いつかなかったことに気付けることをこの講義で学びました。

若林 宥哉

この講義を通して、指導案に対する気持ちが自分の中で変わった。問題作成では、作った問題はテーマにそっているか、証明は演繹推論になっているかなど 1 番よく考えさせられた。1つの問題をつくるのがここまで大変だとは思わなかったし、問題をつくるためにも教材研究を丁寧に行うことが必要であることもよく分かった。指導案作成でも、授業を想定して作ることの大切さが改めて実感できたと思う。今まで他の講義で何度か指導案を書いてきたが、それらの指導案はどれほど考えが甘かったか、授業を想定していなかったかを痛感した。今年の夏には教育実習が始まるので、この講義で学習したことを実習に活かしていきたいと思う。

林田 笑美

## 7 引用・参考文献

- ・ 数学教育研究会 『数学教育の理論と実際〈中学校・高等学校（必修）〉』 聖文新社
- ・ 宮崎樹夫 『数学教育 No.474 図形の性質と合同・相似指導の展開』 明治図書
- ・ 『未来へひろがる 数学 2』 啓林館
- ・ 『数学の基本問題』 <http://www.geisya.or.jp/~mwm48961/math/m2gou02.html>  
(2013.02.22 アクセス)