平成 24 年度

数学学習指導設計 I

中学校第 3 学年

単元名 :「二次方程式」

J1　青木佑太

田中智輝

岡田麻依

白枝果歩

目次

第1章 単元設定と設定理由 2

第2章 教材研究 3

2.1　学習指導要領の変遷・まとめ 3

2.2　教科書比較 6

第3章 単元の指導計画 11

3.1　問題作成 11

3.2　指導案作成 17

各自の自評 35

第１章　単元設定と設定理由

〇単元設定：第３学年　二次方程式の利用

〇単元設定の理由

　中学校の教科書の二次方程式は式を立てて解くという問題がほとんどで、二次方程式が何を表すものなのかいまいちわからなかった。そこで、二次方程式から四角形の面積など、図形も式で表すことができて図形との関係性がわかるようになってほしいと考えたから。

第 2 章　教材研究

2.1　学習指導要領の変遷・まとめ

教科の目標

数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。

学年別の目標

1 学年
　数を正の数と負の数まで拡張し，数の概念についての理解を深める。また，文字を用いることや方程式の必要性と意味を理解するとともに，数量の関係や法則などを一般的にかつ簡潔に表現して処理したり，一元一次方程式を用いたりする能力を培う。

2 学年
文字を用いた式について，目的に応じて計算したり変形したりする能力を養うとともに，連立二元一次方程式について理解し用いる能力を培う。

3 学年
数の平方根について理解し，数の概念についての理解を深める。また，目的に応じて計算したり式を変形したりする能力を伸ばすとともに，二次方程式について理解し用いる能力を培う。

内容の構成（方程式）
1 学年
１元１次方程式
（ア）方程式の必要性と意味及びその解の意味。
（イ）等式の性質と方程式の解き方。
（ウ）１次方程式を解くことと活用すること。

２学年
連立２元１次方程式
（ア） ２元１次方程式の必要性と意味及びその解の意味。
（イ） 連立方程式とその解の意味。
（ウ） 連立方程式を解くことと活用すること。

３学年
２次方程式
（ア） 二次方程式の必要性と意味及びその解の意味。
（イ） 因数分解や平方完成して二次方程式を解くこと。
（ウ） 解の公式を用いて二次方程式を解くこと。
（エ） 二次方程式を活用すること。

引用
中学校指導要領解説　数学編（文部科学省）

過去の学習指導要領との比較（1，2 次方程式について）

昭和 31 年　数学Ⅱに 2 次方程式あり。

「数学Ｉ」で扱った方程式の種類を拡張し，次数が二次を越える実係数の整方程式・分数方程式・無理方程式について，これらを 2 次方程式の解法に帰着させる解法の原理を明らかにする。

昭和 32 年　昭和 31 年と同じ。

昭和 33 年　中学 3 年に 2 次方程式あり。

式やグラフで関数関係を表わすことの理解を深め，簡単な 2 次関数の特徴や関数と方程式との関係を理解させ，見通しをもって数量的な関係を処理する能力を伸ばす。2 次方程式の必要性を知らせ，一般の 2 次方程式(係数は有理数で，実根をもつもの)が解けるようにする。

昭和 44 年　中学 3 年に 2 次方程式あり。

式を扱いやすい形に変える方法を理解させ，式について見通しをもって能率的に扱うことができるようにする。2 次方程式の必要性を知らせ，その解の意味を理解させるとともに，2 次方程式を解くことができるようにする。

平成元年　中学 3 年に 2 次方程式あり。

　数の平方根について理解し、数の概念についての理解を一層深める。また、目的に応じた式の変形や 2 次方程式について理解し、式についての理解を一層深めるとともに、それらを能率的に活用できるようにする。

平成 10 年　中学 3 年に 2 次方程式あり。

　数の平方根について理解し，数の概念についての理解を一層深める。また，目的に応じて計算したり式を変形したりする能力を一層伸ばすとともに, 2 次方程式について理解し，式を能率的に活用できるようにする。

平成 15 年　平成 10 年と同じ。

2.2　教科書比較

　今回、教科書（大日本図書、学校図書、啓林館、日本文教出版）について、二次方程式の分野の比較をしてみた。

〇流れの比較

◆大日本図書
2 次方程式とその解
因数分解による解き方
平方根の考えを使った解き方
解の公式
2 次方程式のいろいろな解き方
2 次方程式の利用

◆学校図書
2 次方程式とその解
因数分解を使った解き方
平方根の考えを使った解き方
2 次方程式の解の公式
2 次方程式の活用

◆啓林館
2 次方程式とその解き方
2 次方程式の解の公式
2 次方程式と因数分解
2 次方程式の利用

◆日本文教出版
2 次方程式の解
因数分解による解き方
平方根の考え方を使った解き方
2 次方程式の解の公式
2 次方程式の活用

○参考

各社とも、流れはほぼ同じである。しかし、啓林館だけ 2 次方程式の解の公式から 2 次方程式の因数分解の順であるが、その他の社は、2 次方程式の因数分解から 2 次方程式の解の公式である。

○導入問題の比較

◆大日本図書

花壇の縦横長さ

横の長さが縦の長さより 3m 長い長方形の土地がある。

次の(1)、(2)の場合について、縦の長さを求めたい。

縦の長さを xm として、方程式をそれぞれつくってみる。

(1) 周の長さが 22m

(2) 面積が $28m^2$

解法　周の長さと面積は、　$4x+6=22$…①

$x^2+3x=28$…②

(1) 式①と②で、すべての項を左辺に移項して、簡単にする。

(2) (1)の 2 つの式を比べ、共通していることとことなっていることをいう。

◆学校図書

花壇づくり

長さ 20m のロープで周りを囲んで長方形の花壇をつくる。

(1) 縦を 1m にすると、花壇の面積は何 m^2 になるのか。

また、縦が 2m のときはどうか。

(2) 面積が $24m^2$ の花壇をつくるには、縦を何 m にすればよいか。

(3) (2)の問題を次のように考えてみる。

① 縦を xm とすると、横の長さはどう表せるか。

② 長方形の面積が $24m^2$ であることに着目して、

どんな方程式をつくることができるか。

③ ②でつくった方程式の x にいろいろな値を代入して、

方程式を成り立たせる x の値を求める。

④ ③で求めた x の値が、問題に適しているかどうかを確かめる。

解法　花壇の縦を xm とすると、横は(10－x)m と表すことができる。

よって、$x^2-10x+24=0$ の方程式ができ問題を解く。

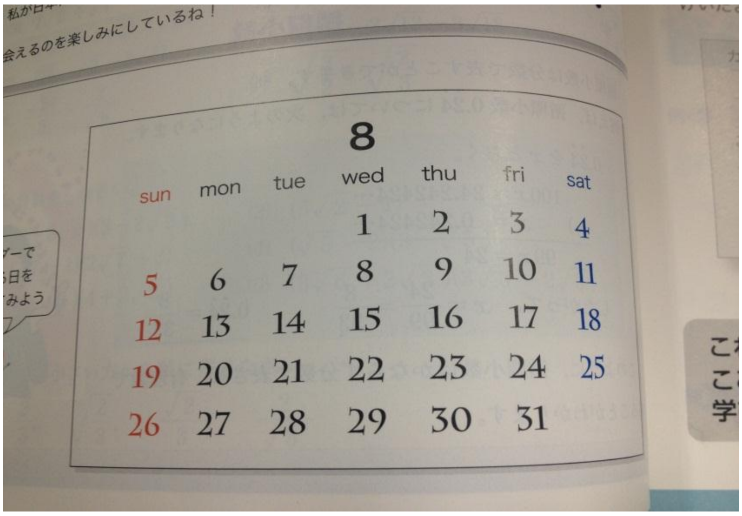
◆啓林館

到着する日

来月のカレンダーを見て、自分が日本に到着する日の

真上にある日の数と真下にある日の数をかけると、176 になる。

自分が日本に到着する日を求める。



解法　到着する日を、x 日とすると、

真上にある日の数は、$x-7$

真下にある日の数は、$x+7$

よって、$(x-7)(x+7)=176$ の方程式ができる。

左辺を展開して、$x^2=225$

$x^2-225=0$

x を求める。

◆日本文教出版

周の長さ

周の長さが 12m、面積が $8m^2$ の長方形をつくるとき、

縦の長さを xm として、x を求める方程式をつくる。

解法　長方形の縦と横の長さの和が 6m になることから、

横の長さは(6－x)m となり、$x^2-6x+8=0$ の方程式ができ x を求める。

○考察

各社を見てみると、導入問題は、長方形の面積、縦横に関する問題を扱っている。方程式がうまく導出出来るように条件が問題にくみこまれている。解法については、どの社も移項して整理すると、xの二次式が 0 に等しいという形になる方程式を用いている。身近な事象を用いることで、とっつきやすくしている印象を受けた。導入題を使って二次方程式に触れた後、定義をきちんと押さえている。

○二次方程式の利用問題の比較

◆大日本図書
・カレンダー
・大小 2 つの整数
・連続する 2 つの数
・ヒモの縦横の長さ
・ボールの速さ
・花壇の中の道幅
・ある自然数 x
・紙の折

◆学校図書
・連続する 2 つの数
・花壇の中の道幅
・動点
・ある自然数 x
・容積

◆啓林館
・ステージの縦横の長さ
・連続する 2 つの数
・容積
・動点
・ある正の数 x
・道幅

◆日本文教出版
・連続する 2 つの数
・花壇の中の道幅
・動点
・紙の折
・容積

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
大日本図書	○	○	○	○	○	○	○	○	×
学校図書	×	○	○	○	○	×	×	×	○
啓林館	×	○	○	○	○	×	○	×	○
日本文教出版	×	○	○	○	○	○	×	×	○

①カレンダー
②大小 2 つの整数
③連続する 2 つの数
④花壇の中の道幅
⑤ある自然数 x
⑥紙の折
⑦縦横の長さ
⑧ボールの速さ
⑨容積

○参考
全社、大小 2 つの整数、連続する 2 つの数、花壇の中の道幅、ある自然数 x の問題は扱われている。たくさんの問題を扱っている大日本図書だが、他の 3 社が扱っている容積については、取り扱っていない。

第 3 章　単元の指導計画

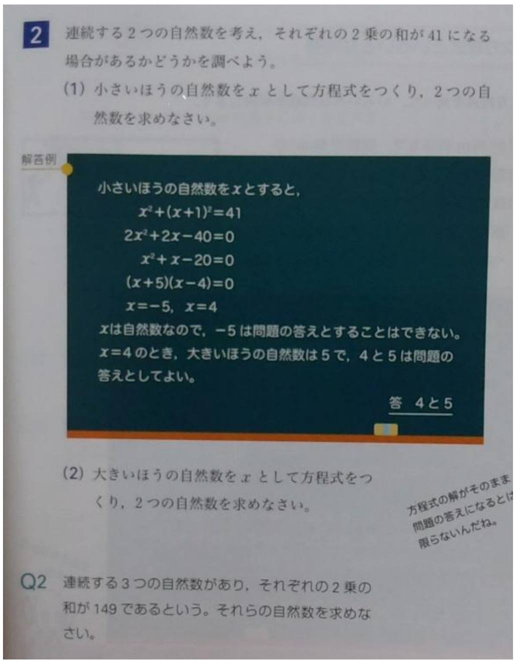
3.1　問題作成

<u>♯3　2012.10.23</u>

数学教育のなかでの活用を吟味

　数学教育のなかでの活用とは、学んだことを学んだ以上に使いこなすことである。学んだこととは、『一般に、すべての項を左辺に移行したとき、左辺が x についての 2 次式、すなわち、a を 0 でない定数、b、c を定数として、$ax^2 + bx + c = 0$の形で表される方程式を、x についての 2 次方程式といい、2 次方程式を成り立たせる x の値をすべて求めること』である。よって、学んだ以上に使いこなすこととは、別資料のような「2 次方程式の利用」で扱われている問題である。身近な事象との関連を考えてみると、①のようなただ計算するだけの問題よりも、②のような実生活に関連性のある問題に力を入れる方が良いと考える。

①



2 連続する 2 つの自然数を考え，それぞれの 2 乗の和が 41 になる場合があるかどうかを調べよう。

(1) 小さいほうの自然数を x として方程式をつくり，2 つの自然数を求めなさい。

解答例

小さいほうの自然数を x とすると，

$x^2+(x+1)^2=41$

$2x^2+2x-40=0$

$x^2+x-20=0$

$(x+5)(x-4)=0$

$x=-5,\ x=4$

xは自然数なので，-5 は問題の答えとすることはできない。

$x=4$ のとき，大きいほうの自然数は 5 で，4 と 5 は問題の答えとしてよい。

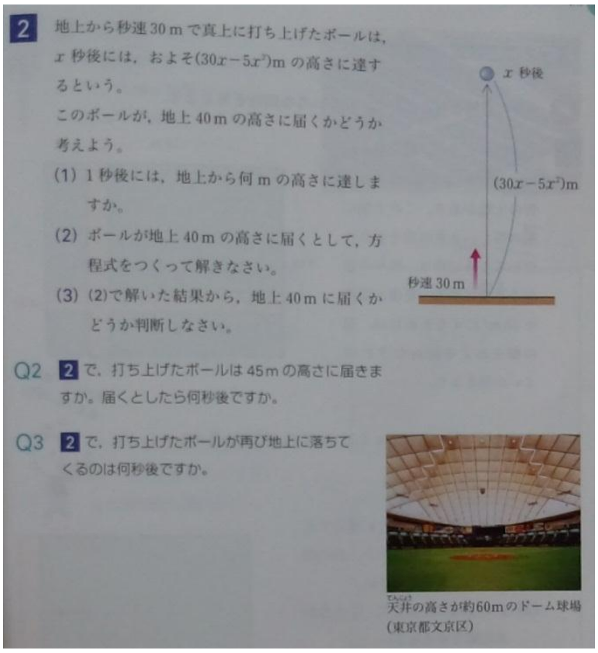
答　4と5

(2) 大きいほうの自然数を x として方程式をつくり，2 つの自然数を求めなさい。

方程式の解がそのまま問題の答えになるとは限らないんだね。

Q2 連続する 3 つの自然数があり，それぞれの 2 乗の和が 149 であるという。それらの自然数を求めなさい。

②



2 地上から秒速 30 m で真上に打ち上げたボールは，x 秒後には，およそ$(30x-5x^2)$m の高さに達するという。

このボールが，地上 40 m の高さに届くかどうか考えよう。

(1) 1 秒後には，地上から何 m の高さに達しますか。

(2) ボールが地上 40 m の高さに届くとして，方程式をつくって解きなさい。

(3) (2)で解いた結果から，地上 40 m に届くかどうか判断しなさい。

Q2 2 で，打ち上げたボールは 45m の高さに届きますか。届くとしたら何秒後ですか。

Q3 2 で，打ち上げたボールが再び地上に落ちてくるのは何秒後ですか。

天井の高さが約60mのドーム球場（東京都文京区）

反省

　ここでは学んだこととは、『一般に、すべての項を左辺に移行したとき、左辺が x についての 2 次式、すなわち、 a を 0 でない定数、b、c を定数として、$ax^2 + bx + c = 0$の形で表される方程式を、x についての 2 次方程式といい、2 次方程式を成り立たせる x の値をすべて求めること』とあるが、学んだこととはこれだけではなく、ほかにもたくさんある。

　実生活に関連性のある問題ではなく、現実場面に存在する問題に力を入れるべきだ。

＃5　2012.11.13

良問を作成するにあたって、あらゆる問題を同じ基準枠で見るということが大切である。そこで、問題の解決が多様である、より発展的な扱いができる、というところに基準枠をおいて問題を分析した。今回は。問題がどれだけ多様に解けるかに注目した。

(1) 大小 2 つの数がある。その差は 8 で積が 48 である。このような 2 数を全て求めよ。

● 二次方程式または書き下して差が 8 のとき、積が 48 になる 2 数を探す、2 つの解法が予想できる。しかし 2 数に範囲がないので書き出しは解の予想は立てることができるが、本当に合っているか確かめできない。

(2)周の長さが 38cm、面積 84cm²の長方形の縦と横の長さを求めよ。ただし、横のほうが長いとする。

● 二次方程式または書き下して求める 2 つの解法が予想できる。今回は周りの長さが 38、という範囲があるので書き下しでもすべての値を書き下せば正確な解がでる。

(3)縦 19m 横 36m の長方形の土地がある。図のように同じ幅の道路が縦 2 本、横 1 本通っている。道以外の土地の面積の合計は 480m²である。道幅は何 m か。

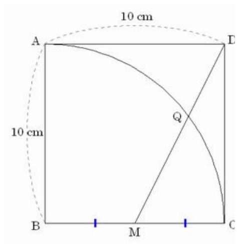
● 二次方程式の解法が予想できる。土地を変形させれば簡単に解くことができる。画用紙などを用意して生徒に渡せば、多様で簡単な方法がいくつか見つかると予想できる。

(4)原価 2000 円の品物に 2x%の利益を見込んで定価をつけた。売り出しの日に x%割引して売った。利益が 210 円だった。X を求めなさい。

● 二次方程式の解法が予想できる。多様な解法はなかなか考えられない。

(5)一辺が 10cm の正方形がある。辺 BC の中点を M とする。B を中心とする半径 BC の円弧 AC と線分 MD との交点を Q としたとき、線分 QD の長さを求めなさい。

● いくつかの考え方と(相似含む)、√計算、三平方の定理、二次方程式などを組み合わせて解くことができる。1 つの単元ではなく、あらゆる知識を使って解けるのがいいのではないかと思われる。

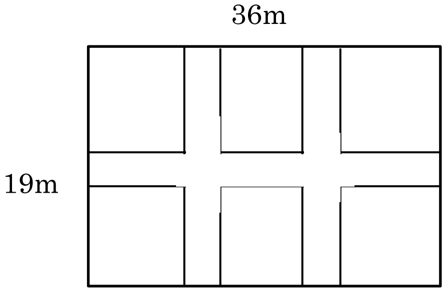


反省

これでは多様ではなく雑多である。多様とは 1 つ 1 つに価値があるもので、雑多は解法が数多いだけで、価値がないものである。多様と雑多の理解不足だった。

＃6　2012.11.06

問題　縦 19m、横 36m の長方形の土地がある。
その土地の中に、同じ幅の道路が縦 2 本、
横 1 本通っている。道以外の土地の面積の
合計は $480\mathrm{m}^2$ である。道幅は何 m か。



解答 1　道幅を x(m)として道を動かさずに考える。

縦の道の面積は $19(\mathrm{m})\times x(\mathrm{m})=19x(\mathrm{m}^2)$

横の道の面積は $36(\mathrm{m})\times x(\mathrm{m})=36x(\mathrm{m}^2)$

縦と横の重なった部分の面積は

$x(\mathrm{m})\times x(\mathrm{m})=x^2(\mathrm{m}^2)$

全体の土地の面積は

$19(\mathrm{m})\times 36(\mathrm{m})=684(\mathrm{m}^2)$

式をつくる

$684(\mathrm{m}^2)-2\times 19x(\mathrm{m}^2)-36x(\mathrm{m}^2)+2x^2(\mathrm{m}^2)=480(\mathrm{m}^2)$

$2x^2-74x+684=480$

$2x^2-74x+684-480=0$

$2x^2-74x+204=0$

$x^2-37x+102=0$

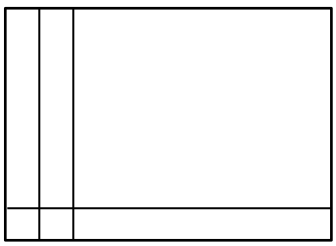
$(x-34)(x-3)=0$

x は道幅であり、道幅が 34(m)は条件に合わないから、

$x=3(\mathrm{m})$

解答 2　道幅を x(m)として道を動かして考えてみる。

縦の長さは $19-x$(m)、横の長さは $36-2x$(m)
と表すことができる。



式をつくる

$(19-x)(36-2x)=480$

$684-38x-36x-2x^2=480$

$2x^2-74x+204=0$

あとは解法 1 と同様

この問題には考え方が 2 つある。

学校の授業では、解答 1 を理解させてから解答 2 を紹介する。

どういう発展を期待したいのか。
→どこに未知数を置くかは変わらないが、図を変形するという多様な考え方をするとより簡単な解法を導き出すことができる。このようにただ二次方程式を使うのではなく、プラスα、図形を変形するという二次方程式と別の知識を活かし、より発展的な考えを生徒に期待する。

反省

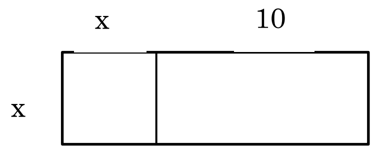
取り上げた問題がありきたりで面白くなかったため、もっと質の高い問題にしなければならなかった。この問題を解いた後に期待できることを考えていなかった。多様をテーマにした内容にした方がよい。

＃7　2012.12.04

問題

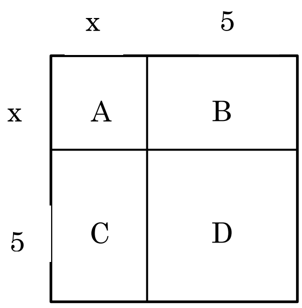
$x^2+10x=39$ の表す面積を図形で表せ。そして x の値を求めよ。

解答 1



$x(x+10)=39$ と式変形させ、
一辺が x と $x(x+10)$である長方形をつくる。
この場合、x に値を入れていき、
面積が 39 となる x の値を探す。

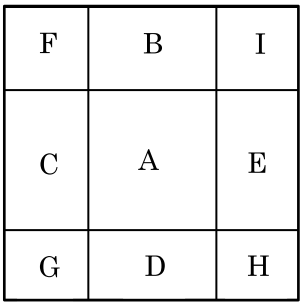
解答 2



右図は A、B、C を合わせた面積は x^2+10x で、
その値は 39 である(もとの方程式に従えば)。
正方形 D の面積は $5\times5=25$ になる。
したがって、A、B、C、D を合わせた面積は
$39+25=64$ である。
A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため
一辺の長さは 8 とならなければならない。
よって $x=3$ とわかる。

解答 3

正方形 A の一辺の長さは x なので面積は x^2。
長方形 B、C、D、E の辺の長さは
どれも x と 2.5 なので面積は $2.5x$。
B、C、D、E の面積の合計は $10x$ になる。
$x^2+10x=39$ なので、正方形 A と
長方形 B、C、D、E を合わせた面積は 39。
小さな正方形 F、G、H、I はそれぞれ
一辺が 2.5 なので面積は 6.25。
正方形 F、G、H、I の面積の合計は 25。
(A)＋(B、C、D、E)＋(F、G、H、I)＝64
右図は正方形なので、一辺は 8 でなければならない。
よって、正方形の一辺は $2.5+x+2.5=8$ より、$x=3$。



このように図形を変形させていけば、いくらでも解答はつくれる。

この問題には $x^2+10x=39$ の解の一つ、$x=3$ は出てくるが、図形を扱っているかぎり長さにマイナスがないため、もう一方の解 $x=-13$ が出てこない。しかし、もし図形の辺の長さにマイナスがあると仮定すれば、$x=-13$ も出てくる。

このように現実ではありえないことでも数学の世界では考えることができる。生徒には、この問題を解くと同時に解いた先に、数学ではありえないことを考えることもあるということを実感させる。

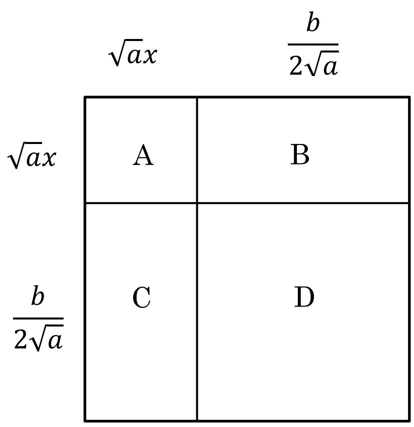
反省

題材は面白いものができた。この問題を通して、生徒にどういう数学をやらせたいか。そのためにこの問題を自分たちで探究しなければならないと思った。具体的には、図形でマイナスの値をどのようにして考えさせられるか、一般化させられるかが挙げられる。

＃8　2012.12.11

問題
　x^2＋10x＝39 を表す面積を図形で示せ。そして x の値を求めよ。

〈解答 2 を一般化する〉



ax^2＋bx＝c とおくと

D＝$\frac{b}{2\sqrt{a}}\times\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{b^2}{4a}$

A+B+C=c

A+B+C+D=c+$\frac{b^2}{4a}$

右図は正方形より

A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため

一辺の長さは$\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}$とならなければならない。

よって$\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$となる。

これを x について解くと

$x=\sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}}-\frac{b}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

〈考察〉

これは解の公式に似ていて、ルートの中身の違いはプラスかマイナスである。解の公式は $ax^2+bx+c=0$ だが、この問題は $ax^2+bx-c=0$ となるため、解の公式にしたときと符号が違う。ルートの直前の符号に関しては、ルートと平方根の概念の違いのためである。『ある与えられた値 a に対して、$a = b^2$ となるような b を一般に、a の平方根という。どんな正の実数 a に対しても平方根は正と負の 2 つ存在し、そのうち正である方を根号$\sqrt{\ }$ を用いて$\sqrt{a}$のように表して「正の（あるいは非負の）平方根」と呼ぶ。このとき、もう一方の「負の平方根」は $-\sqrt{a}$と表すことができる。また、2 つの平方根を合わせて $\pm\sqrt{a}$ と表記することもできる』（Wikipedia 参照）。よってこれは解の公式と変わらない。

反省

　一般化することができた。解の公式の証明に今後使えるのではないかということを発見した。

3.2　指導案作成

#9　2012.12.18

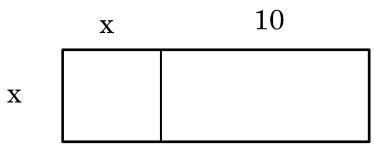
生徒の活動

問題

　x^2＋10x＝39 の表す面積を図形で表せ。そして x の値を求めよ。

解答 1

　x(x＋10)＝39 と式変形させる。

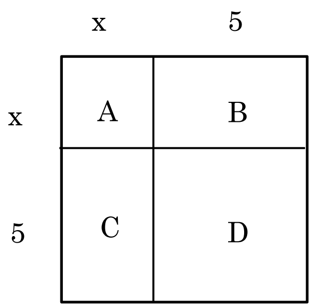


解答 2

　下図は A、B、C を合わせた面積は x^2＋10 x で、その値は 39 である。正方形 D の面積は 5×5＝25 になる。

　したがって、A、B、C、D を合わせた面積は 39＋25＝64 である。A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため一辺の長さは 8 とならなければならない。

　よって x＝3 とわかる



教師の活動

期待すること

　数字だけで書かれた式を、図に置き換えられるようにイメージし、式が何を表しているかをリアルなものにする。

支援

　図がなかなか考えられなかった場合

　⇒一辺が x の正方形をかかせる。

　　一辺が x の正方形の面積は x^2 であり、残りの面積である 10x ぶんをその正方形にどう付け足すかを考えさせる。

解答 3

	2.5	x	2.5
2.5	F	B	I
x	C	A	E
2.5	G	D	H

$\boxed{\text{解答 2 を一般化する}}$

$ax^2+bx=c$ とおくと

$D=\frac{b}{2\sqrt{a}}\times\frac{b}{2\sqrt{a}}=\frac{b^2}{4a}$

A+B+C=c

A+B+C+D=c+$\frac{b^2}{4a}$

下図は正方形より A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため一辺の長さは $\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}$ とならなければならない。

よって $\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ となる。

これを x について解くと

$$x=\sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}}-\frac{b}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$\boxed{\text{期待すること}}$

決められたものを教えられて、それをただ使って解けるだけの生徒にはなってほしくない。公式として教えられた二次方程式の解の公式を図から導き出すことによって、その公式をリアルなものにする。

$\boxed{\text{支援}}$

今回の問題は正方形の一辺の長さを比較するものであるため、両辺を 2 乗した形の $c+\frac{b^2}{4a}=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$ より $\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ で計算させる。

$\boxed{\text{マイナスを考えさせる}}$

　$x^2+10x=39$ の表す面積を図形で表せ。という問題の解答 2、3 において一辺が 8 の正方形になるので、その図形の面積は 8×8=64 となる。問題を解くことによって分かった条件をいかし、図形の辺の長さにマイナスがあると仮定して、x の値を考える。

$\boxed{\text{考え}}$

　64 は 8×8、(-8)×(-8) で表せる。一辺が－8 と仮定すると、解答 2 では、x+5 が－8 になるので､x は－13 となる｡解答 3 では、2.5+x+2.5 が－8 となるので、x は－13 となる。

　図で考える二次方程式には、マイナスの値が存在しない。よって、マイナスの値は出てこない。しかし、もし図形の辺の長さにマイナスがあると仮定すれば、マイナスの値も出てくる。

$\boxed{\text{支援}}$

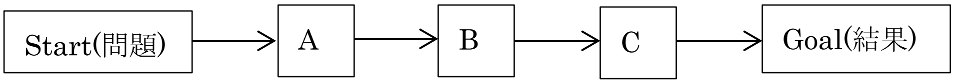
　64 は 8×8、(-8)×(-8) で表せるということを気づかせる。

現実ではありえないことでも数学の世界では考えることができる。この問題を解くと同時に解いた先に、数学ではありえないことを考えることもあるということを実感させる。

反省

　自分たちが受けてきた授業に惑わされていて、教師が誘導しなければできない活動になっている。今のままでは活動がバラバラなので、どういう繋がりがあるか考えなくてはならない。マイナスを考えさせるところでは、もっといい方法があるはずである。

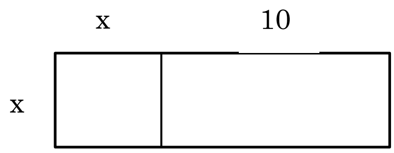
＃10　2013.01.08



活動 A

問題　x^2＋10x の表す面積を図形で示せ。

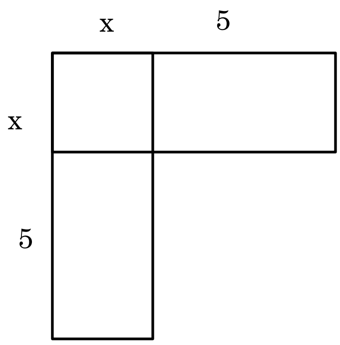
x(x＋10)と変形させる。



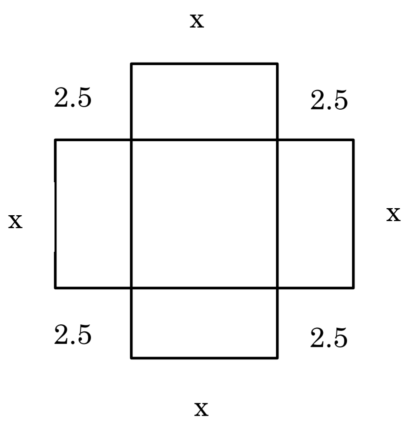
活動 B

その他の図を考える。

①



②



活動 C

面積を 39 とするときの x の値を求めよ。

活動 A

この場合、x に値を入れていき、

面積が 39 となる x の値を探す。

活動 B

①

正方形 D を付け加える。

正方形 D の面積は 5×5＝25 になる。

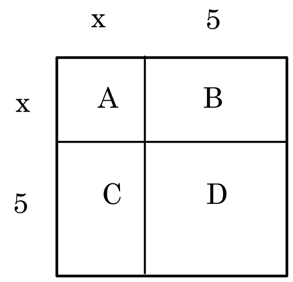
したがって、A、B、C、D を合わせた面積は

39＋25＝64 である。

A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため

一辺の長さは 8 とならなければならない。

よって x＝3 とわかる。



②

正方形 F、G、H、I を付け加える。

正方形 A の一辺の長さは x なので面積は x^2。

長方形 B、C、D、E の辺の長さは

どれも x と 2.5 なので面積は 2.5x。

B、C、D、E の面積の合計は 10x になる。

$x^2+10x=39$ なので、正方形 A と

長方形 B、C、D、E を合わせた面積は 39。

小さな正方形 F、G、H、I はそれぞれ

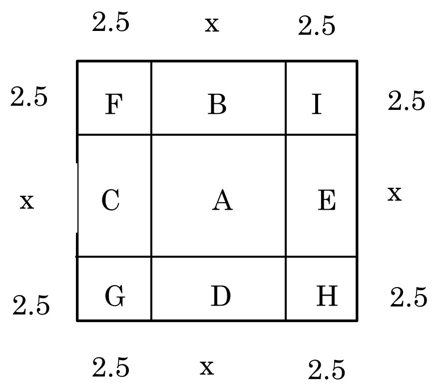
一辺が 2.5 なので面積は 6.25。

正方形 F、G、H、I の面積の合計は 25。

(A)＋(B、C、D、E)＋(F、G、H、I)＝64

右図は正方形なので、一辺は 8 でなければならない。

よって、正方形の一辺は 2.5＋x＋2.5＝8 より、x＝3。



活動 A：式変形をして、図形をかく。

活動 B：その他どんな図形があるか考える。

活動 C：面積を設定して x の値を求める。

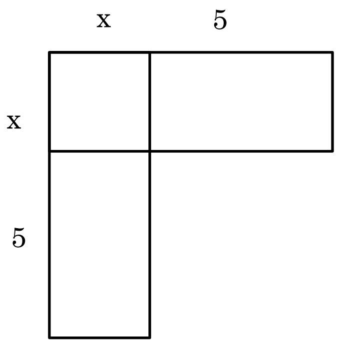
反省

この問題では生徒が理解しにくいと思うので、問題の提示の仕方を変える必要がある。活動がランクアップしていってないため、1 つ 1 つの活動の価値を考えなければならない。

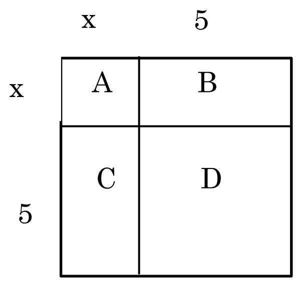
＃11　2013.01.22

Start(問題) → A → B → A’ → Goal(結果)

問題　下図のような面積 39 の図がある。この図の x の値を求めよ。



活動 A



正方形 D を付け加える。
正方形 D の面積は 5×5＝25 になる。
したがって、A、B、C、D を合わせた面積は
39＋25＝64 である。
A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため
一辺の長さは 8 とならなければならない。
よって x＝3 とわかる。

活動 B

図から $x^2+10x=39$ の方程式を読み取り、その方程式を解く。

$x^2+10x-39=0$

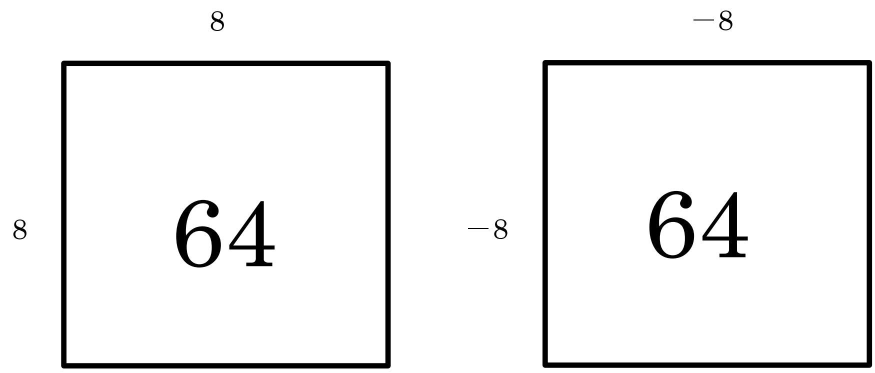
$(x-3)(x+13)=0$

$x=-13,3$

活動 A’

活動 B には負の数の解が出るのに活動 A には出ないのは何故だか考える。
活動 A では図形を扱って解いているので、辺の長さが必ず正の数となるので解も正の数しか出ない。しかし、辺の長さに負の数の考えをもつと負の数の解もでる。

活動 A　　　　　　　　　　　　**活動 A'**



活動 A：図形から x の値を求める。
活動 B：図形から方程式を作り、x の値を求める。
活動 A'：活動 A で、出なかった負の数の x の値を求める。

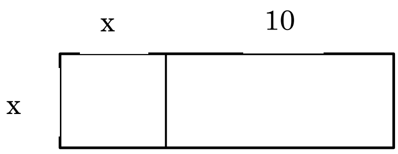
反省
　問題の出し方を変えてみたが、前回よりつまらない問題となってしまった。

＃12　2013.01.29

Start(問題) → A → B → C → Goal(結果)

問題　x^2＋10x の表す面積を図形で示し、 面積が 39 となるときの、x の値を求めよ。

活動 A
　x(x＋10)と変形させる。

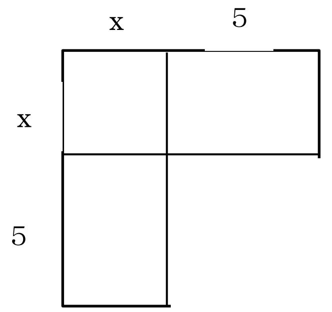


　この場合、x に値を入れていき、
　面積が 39 となる x の値を探す。
　x＝3 とわかる。

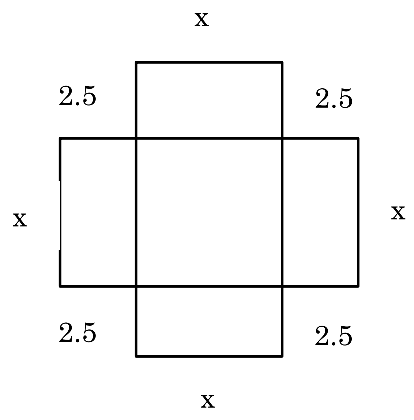
活動 B

その他の図を考える。

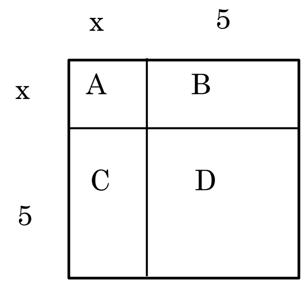
③



②



①



正方形 D を付け加える。

正方形 D の面積は 5×5＝25 になる。

したがって、A、B、C、D を合わせた面積は

39＋25＝64 である。

A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため

一辺の長さは 8 とならなければならない。

よって x＝3 とわかる。

④

正方形 F、G、H、I を付け加える。

正方形 A の一辺の長さは x なので面積は x^2。

長方形 B、C、D、E の辺の長さは

どれも x と 2.5 なので面積は 2.5x。

B、C、D、E の面積の合計は 10x になる。

正方形 A と長方形 B、C、D、E を合わせた

面積 x^2＋10x は 39。

小さな正方形 F、G、H、I はそれぞれ

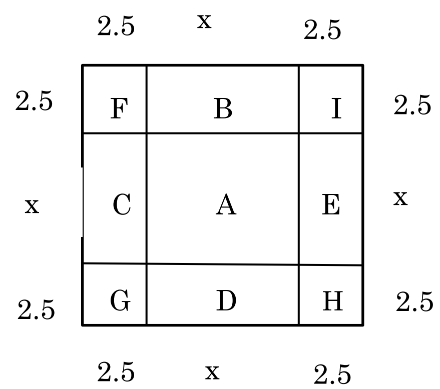
一辺が 2.5 なので面積は 6.25。

正方形 F、G、H、I の面積の合計は 25。

(A)＋(B、C、D、E)＋(F、G、H、I)＝64

右図は正方形なので、一辺は 8 でなければならない。

よって、正方形の一辺は 2.5＋x＋2.5＝8 より、x＝3。



活動 C

それぞれの図から式を立てて x を求める。

活動 A の図より

$x^2+10x=39$

$x^2+10x-39=0$

$(x-3)(x+13)=0$

$x=3$、-13

活動 B①の図より

$x^2+5x+5x=39$

$x^2+10x-39=0$

$(x-3)(x+13)=0$

$x=3$、-13

活動 B②の図より

$x^2+2.5x+2.5x+2.5x+2.5x=39$

$x^2+10x-39=0$

$(x-3)(x+13)=0$

$x=3$、-13

活動 A、活動 B①、活動 B②の図より、式を立てて解くと、
それぞれで $x=3$、-13 の値が出てくる。しかし、
図から考えると、x はプラスであることが分かる。
よって $x=3$ だけである。

活動 A : 式変形をして、図形をかく。x に値を入れていき、面積が 39 となる x の値を出す。
活動 B : 他にどんな図形があるか考える。図形から正方形の面積を活用して x の値を出す。
活動 C : 図から式を立てて x の値を出す。

活動 B は図だけから解いているが、活動 C は図から式を立てて解いている。
活動 B から活動 C は、図に対してのイメージを持ってから解くことができる。

反省

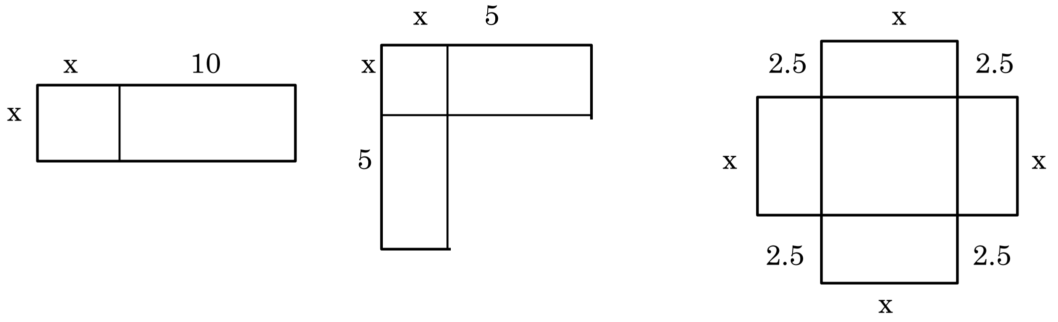
活動の流れはだいたいできてきたが、活動 C がただの計算問題になってしまったため、改良が必要である。活動 N と支援と練り上げを考えなければならない。

2013.02.12

問題　x^2＋10x の表す面積を図形で示し、
面積が 39 となるときの、x の値を求めよ。

一般的な支援：「ノートに思いつくだけ図形をかきだそう。」
特殊な支援　：「x×x を使ってできる図形を考えよう。」

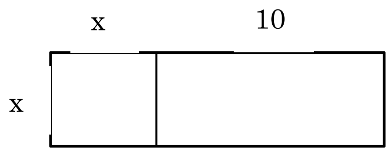
活動 A



価値：自分が思いつく限りの図形をかくことで、
なにを表している式なのかをイメージしやすい。

一般的な支援：「四角形の面積の求め方はどうかな。」
特殊な支援　：「実際に x に 1 から数を入れて考えよう。」

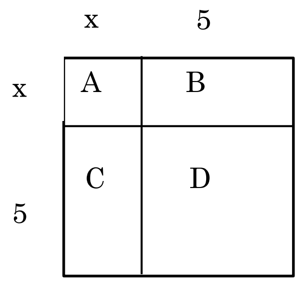
活動 B



この場合、x に値を入れていき、面積が 39 となる x の値を探す。
x＝3 とわかる。
価値：図形から答えを導き出すことができる。

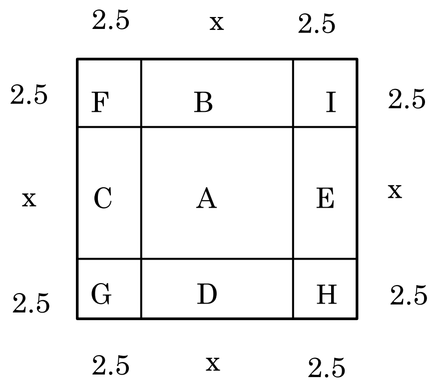
一般的な支援：「その他の図形でも x の値を求められるかな。」
特殊な支援　：「活動 B のように四角形の面積を求める
公式を利用して求めよう。」
「どんな図形を付け加えたらいいかな。」

活動 C



① 正方形 D を付け加える。
正方形 D の面積は 5×5＝25 になる。
したがって、A、B、C、D を合わせた面積は
39＋25＝64 である。
A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため
一辺の長さは 8 とならなければならない。
よって x＝3 とわかる。

② 正方形 F、G、H、I を付け加える。
正方形 A の一辺の長さは x なので面積は x^2。
長方形 B、C、D、E の辺の長さは
どれも x と 2.5 なので面積は 2.5x。
B、C、D、E の面積の合計は 10x になる。
正方形 A と長方形 B、C、D、E を合わせた
面積 x^2+10x は 39。
小さな正方形 F、G、H、I はそれぞれ
一辺が 2.5 なので面積は 6.25。
正方形 F、G、H、I の面積の合計は 25。
(A)＋(B、C、D、E)＋(F、G、H、I)＝64
右図は正方形なので、一辺は 8 でなければならない。
よって、正方形の一辺は 2.5＋x＋2.5＝8 より、x＝3。



価値：考えの幅を広げ、図形から答えを導き出すことができる。

一般的な支援：「図から式を立てて計算すると、
値にマイナスとプラスがでる。」

活動 N

それぞれの図形から式を立てて x を求める。

活動 B の図形より

$x^2+10x=39$

$x^2+10x-39=0$

$(x-3)(x+13)=0$

$x=3$、-13

活動 C①の図形より

$x^2+5x+5x=39$

$x^2+10x-39=0$

$(x-3)(x+13)=0$

$x=3$、-13

活動 C②の図形より

$x^2+2.5x+2.5x+2.5x+2.5x=39$

$x^2+10x-39=0$

$(x-3)(x+13)=0$

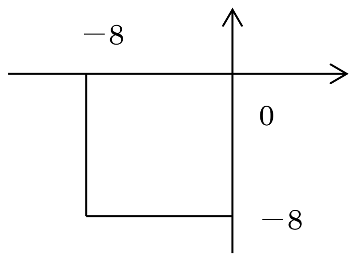
$x=3$、-13

活動 B、活動 C①、活動 C②の図形より、式を立てて解くと、

それぞれで $x=3$、-13 の値が出てくる。

しかし、図形から考えると、x はプラスであることが分かる。

よって $x=3$ だけである。



上図のように考えると$(-8)\times(-8)=64$ となるので一辺は $x+5=-8$

よって $x=-13$

価値：座標軸上で表してみると、マイナスの長さも考えられることがわかる。

練り上げ

(1) x^2＋10x を表す図形の確認（x×x を使うことの共有）

(2) 図形が 3 通りに決まることについての議論（(1)の根拠）

▸図形の追加による変化の仕方

▸具体的な図形の結果を表すこと

(3) 図形から、どのようにして計算しやすい方法を見つけるか

・四角形の面積の求め方を利用して x の値を導こう

方法 1：x に値を代入・検証

方法 2：図形を追加して正方形の一辺に着目

(4) マイナスの解についての議論

・図形の辺のプラスとマイナスの考え方

(5) 次時への課題

・式をイメージしやすくなったことで、文章から二次方程式を立てる

反省

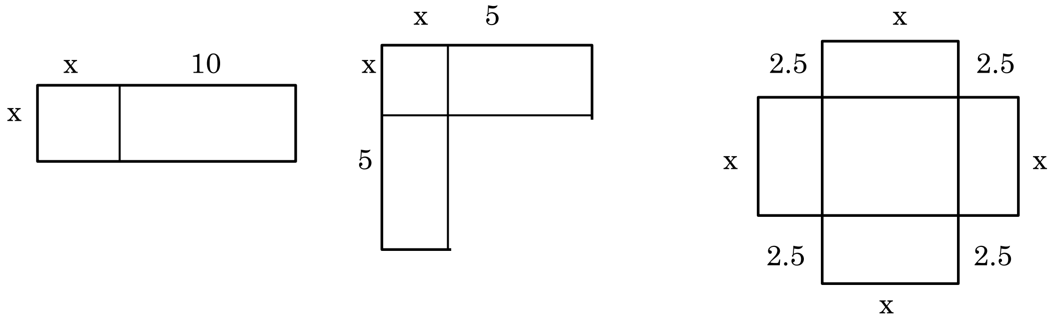
支援の言い回しを生徒にもわかるものにして、練り上げを詳しく図形など用いて丁寧に書く。

2013.02.18（完成版）

問題　x^2＋10x の表す面積を図形で示し、
　　　面積が 39 となるときの、x の値を求めよ。

一般的な支援：「ノートに思いつくだけ図形をかきだそう。」
特殊な支援　：「x×x を使ってできる図形を考えよう。」

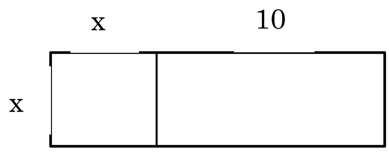
活動 A



価値：自分が思いつく限りの図形をかくことで、
　　　なにを表している式なのかをイメージしやすい。

一般的な支援：「四角形の面積の求め方はどうかな。」
特殊な支援　：「実際に x に 1 から数を入れて考えよう。」

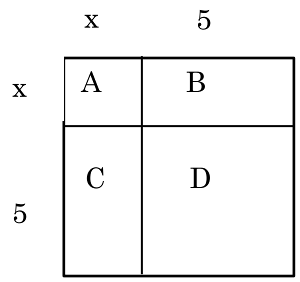
活動 B



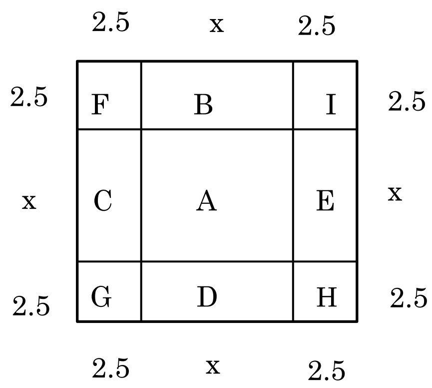
この場合、x に値を入れていき、面積が 39 となる x の値を探す。
x＝3 とわかる。
価値：図形から答えを導き出すことができる。

一般的な支援：「その他の図形でも x の値を求められるかな。」
特殊な支援　：「四角形の面積を求める公式を利用して求めよう。」
　　　　　　　「どんな図形を付け加えたらいいかな。」

活動 C



③　正方形 D を付け加える。
正方形 D の面積は 5×5＝25 になる。
したがって、A、B、C、D を合わせた面積は
39＋25＝64 である。
A、B、C、D を合わせた図形は正方形であるため
一辺の長さは 8 とならなければならない。
よって x＝3 とわかる。



④　正方形 F、G、H、I を付け加える。
正方形 A の一辺の長さは x なので面積は x^2。
長方形 B、C、D、E の辺の長さは
どれも x と 2.5 なので面積は 2.5x。
B、C、D、E の面積の合計は 10x になる。
正方形 A と長方形 B、C、D、E を合わせた
面積 x^2＋10x は 39。
小さな正方形 F、G、H、I はそれぞれ
一辺が 2.5 なので面積は 6.25。
正方形 F、G、H、I の面積の合計は 25。
(A)＋(B、C、D、E)＋(F、G、H、I)＝64
右図は正方形なので、一辺は 8 でなければならない。
よって、正方形の一辺は 2.5＋x＋2.5＝8 より、x＝3。

価値：考えの幅を広げ、図形から答えを導き出すことができる。

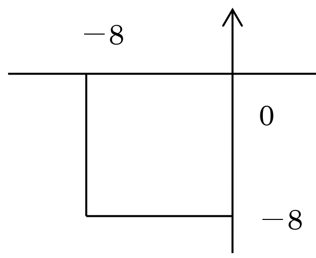
一般的な支援：「図形から式を立てて計算すると、
値にマイナスとプラスがでるね。
辺のマイナスの値について考えてみよう。」

活動 N

それぞれの図形から式を立てて x を求める。

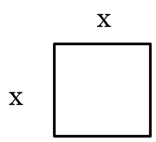
活動 B の図形より	活動 C①の図形より	活動 C②の図形より
$x^2+10x=39$	$x^2+5x+5x=39$	$x^2+2.5x+2.5x+2.5x+2.5x=39$
$x^2+10x-39=0$	$x^2+10x-39=0$	$x^2+10x-39=0$
$(x-3)(x+13)=0$	$(x-3)(x+13)=0$	$(x-3)(x+13)=0$
$x=3$、-13	$x=3$、-13	$x=3$、-13

活動 B、活動 C①、活動 C②の図形より、式を立てて解くと、
それぞれで $x=3$、-13 の値が出てくる。
しかし、図形から考えると、x はプラスであることが分かる。
よって $x=3$ だけである。

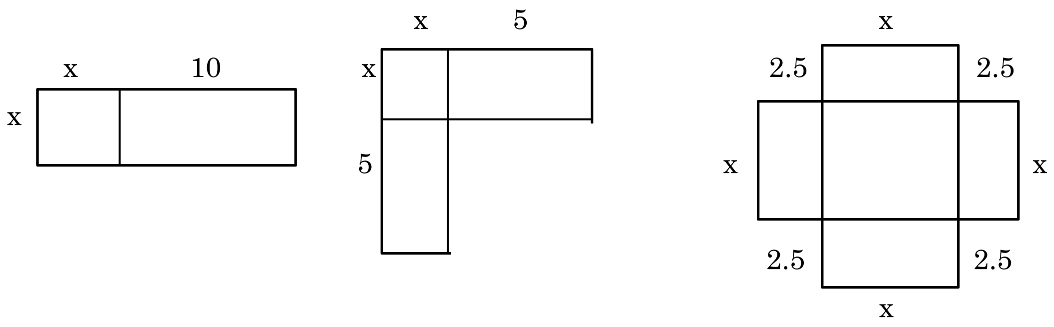


上図のように考えると$(-8)\times(-8)=64$ となるので一辺は $x+5=-8$
よって $x=-13$
価値：座標軸上で表してみると、マイナスの長さも考えられることがわかる。

練り上げ
(6) x^2+10x を表す図形の確認（x×x を使うことの共有）



T「x^2+10x を表す図形になっているかな？」
S「なっています。」



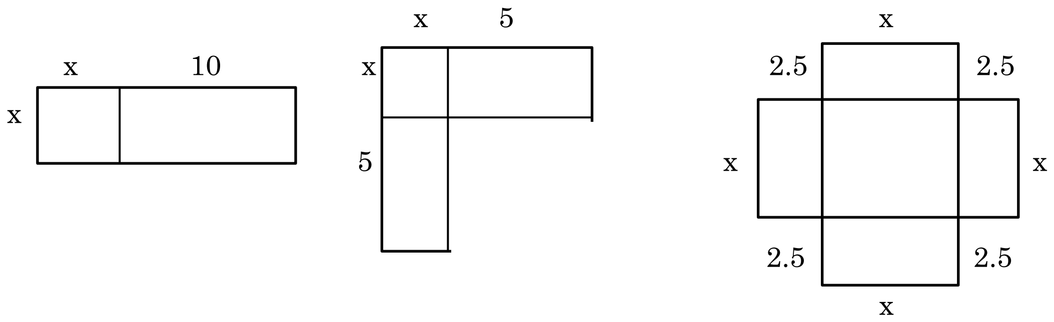
(7) 図形が 3 通りに決まることについての議論（(1)の根拠）

▸図形の追加による変化の仕方

▸具体的な図形の結果を表すこと

T「この 3 通り以外にはかけないかな？」

S「この 3 通りしかかけません。」



(8) 図形から、どのようにして計算しやすい方法を見つけるか

・四角形の面積の求め方を利用して x の値を導こう

方法 1：x に値を代入・検証

方法 2：図形を追加して正方形の一辺に着目

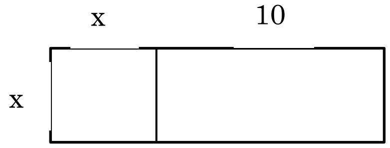
T「$x^2+10x=39$ の 39 とは図形でいう何のことかな？」

S「面積です。」

T「そうだね。では、四角形の面積の求め方の公式はどうだったかな？」

S「縦×横です。」

T「じゃあ、それを使って解いてみよう。」



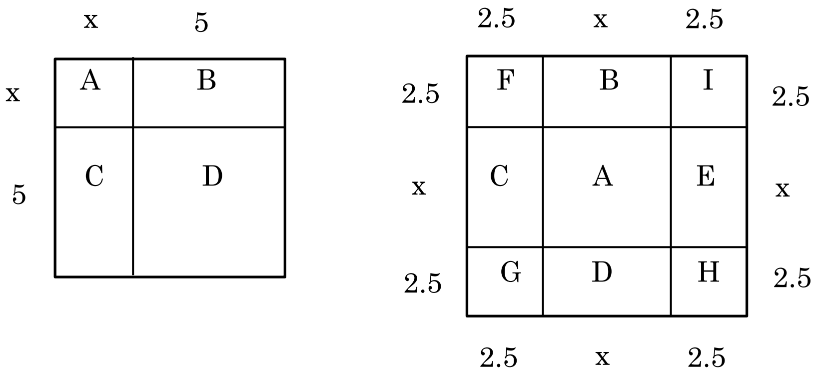
S「他の図形でも x の値はでるかな？」

T「さっきと同じように四角形の面積の公式を使って
求めるにはどうすればいいかな？」

S1「図形を分けます。」

S2「図形を付け加えます。」

T「そうだね。図形を分ける方法はもうできるね。
では、図形を付け加える方法を考えよう」



(9) マイナスの解についての議論

・図形の辺のプラスとマイナスの考え方

S「方程式を解くと x＝－13 がでてくるけど、図形で考えると x＝3 しかでません。」

T「よく気づいたね。じゃあ、図形でマイナスの値について考えてみよう。」

(10) 次時への課題

・式をイメージしやすくなったことで、文章から二次方程式を立てる

各自の自評

今回、数学学習指導分析Ｉで指導案を作ってみて感じたことは、とにかく大変でした。「二次方程式の応用」とテーマが決まってからまず、自分たちが教える立場として二次方程式について調べることから始まり、ある程度二次方程式について知ったうえで、問題作成に移りました。最初は自分たちが受けてきた授業に引っ張られてなかなかよいものが出ませんでした。図書館の本や、インターネットでたくさんの問題を見ていく中で、今回の二次方程式を図でイメージして解くという問題に辿り着きました。今までに教科書では見たことなく面白い問題が出来たと最初は思っていましたが、ここから指導案を作成するにあたって、かなりの苦戦をしました。活動の繋がりがなかったり、ただ雑多を並べたりと思うように指導案が出来ませんでした。何回も何回も指導案を直してやっと今回の完成版が出来ました。今回、私は自分でどんな授業をしたいかをしっかり持つことが大切と実感しました。ただ、教科書に書いていることをつらつら教える授業ではなく、その後、生徒にとってどんな発展があるかを考え問題を作成する。今回の授業で学んだことを今後の指導案作成に活かしたい。

青木　佑太

今回数学指導設計Ｉという授業を受講してたくさんのことを学べたと思います。
まず、一番に教師になるということがこんなにも大変なことなのだということを感じました。私たちは１つの授業を作りあげるのに半年使いましたが、本来なら毎日授業があるので、毎晩しないといけないと思います。半年かけてやったことを一晩でやりあげると考えるとすごく大変だと思います。そのことに気付けたのはこの授業を受講したからであって、今まで受講してきた教職の授業では学べないことでした。また、正確に伝える難しさも学びました。頭では分かっていても文章で表現したり、言葉として話すのはとても難しかったです。この半年間苦労をたくさんしましたがそれ以上のたくさんのことを学ぶことが出来ました。これを将来に役立てていけたらいいと思います。これから将来教師という職業につけるように頑張っていきたいです。

田中　智輝

この授業を通して指導案を作るときの難しさを学んだ。まず、子どもの視線になり、実行しそうな活動を予想することは、授業を作るうえで、必ずしていかなければならない。それによって問題解決までが生徒にとって分かりやすく進むように支援する必要がある。そのひとつひとつの行動、考えを予想するのは、難しいし、グループ内で意見がばらつくことが多かった。このように、グループでは、自分の意見とはまったく違う意見がある時もあった。その時は、意見をグループで共有し、議論することで、さらによい意見になることが多かった。半年間で、ひとつの指導案を作ってきたが、それに至るまでには、他にもたくさんの案を考えてみた。一度は試してみたが、その案の意味をよく考えると消去される。案ひとつひとつには意味があり、その意味がうまく全体に当てはまっているかが重要になると思った。

グループで話し合ったことなどを大切にしていきながら、指導設計の授業で学んだことを活かして実のある実習にしていきたい。

岡田　麻依

この数学学習指導設計Ｉを通して、指導案を作ること、また話し合いをすることの大変さも学ぶことができました。私は、教師は授業をしていく中で教科書の通りに教えていけばいいと思っていましたが、教科書を比較し批判する眼を持ち、良問を考えていくことが必要だということが分かりました。また、今までに自分が受けてきた授業にも批判の眼を向け、その授業の何が良かったのか、何が悪かったのかを考えることで、よりよい授業を作り出すきっかけにもなることを学びました。指導案を作っていくうえでまず大変だったのは、良問を探して考えるという作業でした。今までに受けてきた授業にとらわれていたため、良問とはどういうものかということに辿り着くのに苦労しました。問題が決まってからが一番大変で、活動を繋がるようにしたり発展させたりというこということにこれだけ苦戦を強いられると思っていませんでした。

私はこの講義を受けたことによって、教育実習で役立つ力が身についてきたのではないかと思います。これからここで学んだことを生かし、授業を展開できるようになりたいです。

白枝　果歩