

具体的な事象を通して学ぶ二次関数

J5 蜂谷一樹

永井孝基

角田裕介

藤田綾

目次

1 単元目標と設定理由	2
1.1 単元目標	
1.2 単元の設定理由	
2 教材研究	3-10
2.1 中学校学習指導要領解説〈数学編〉における該当箇所	
2.2 各7社の教科書比較	
2.2.1 日常の事象を扱った問題場面	
2.2.2 導入から一般化までの流れ	
2.2.3 導入から一般化までで扱われている問題の意図の考察	
3 単元の指導計画	11
4 授業構成作成の過程	12-18
5 授業構成案	18-23
6 板書計画	23
7 引用・参考文献	23
8 授業を終えて	24-26

1 単元目標と設定理由

1.1 単元目標

第3学年では、これまでと同様に、具体的な事象における二つの数量の変化や対応を調べることを通して、関数 $y = ax^2$ を考察する。その際、表、式、グラフを相互に関連付けながら、変化の割合やグラフの特徴など関数の理解を一層深める。そして、これらの学習を通して、関数関係を見出し表現し考察する能力を一層伸ばす。

また日常生活や社会には既習の関数ではとらえられない関数関係があることを取り扱うことにより、中学校における関数についての学習内容を一層豊かにするとともに、後の学習の素地となるようにする。(中学校学習指導要領解説〈数学編〉pp.124・125 より引用)

1.2 単元の設定理由

関数の分野にとどまらず他の分野においても、具体的な事象との関わりあいの中で学習することが大切であるが、二次関数の分野ではそれが見つけにくく親しみが持ちにくいと考える。しかし、日常をよく見てみればデジタルカメラのズームや視力検査などたくさん二次関数 $y = ax^2$ が存在するのである。このことから、二次関数の導入を生徒に抵抗なく理解させるにはどのようにすればよいかを考えたいと思ったためである。

2 教材研究

2.1 中学校学習指導要領解説〈数学編〉における該当箇所

数学学習指導要領の文言

- (1) 具体的な事象の中から二つの数量を取り出し、それらの変化や対応を調べることを通して、関数 $y = ax^2$ について理解するとともに、関数関係を見だし表現し考察する能力を伸ばす。
- ア 事象の中には関数 $y = ax^2$ としてとらえられるものがあることを知ること。
- イ 関数 $y = ax^2$ について、表、式、グラフを相互に関連付けて理解すること。
- ウ 関数 $y = ax^2$ を用いて具体的な事象をとらえ説明すること。
- エ いろいろな事象の中に、関数関係があることを理解すること。

身の回りの事象との関連について

<事象と関数 $y = ax^2$ >

具体的な事象の中から二つの数量 x, y を取り出し、それらの変化や対応を調べることを通して、二つの数量 x, y の間に、「 x の値が m 倍になれば y の値は m^2 倍となる」という関係があることを知る。

また、表を用いて、 x の値に対応する x^2 と y の値を考察することで、それらの比が一定であることが分かる。このことから、「 y は x の 2 乗に比例する関数である」とみることができる。すなわち、2 乗に比例する関数が、一般的に、 a を定数として $y = ax^2$ という式で表されることを理解する。そして、事象の中には関数 $y = ax^2$ を用いてとらえられるものがあることを知る。

<関数 $y = ax^2$ を用いて事象をとらえ説明すること>

関数は、具体的な事象や場面とのかかわりの中で学習することが大切である。事象を関数 $y = ax^2$ を用いてとらえ説明することを通して、関数関係を見だし表現し考察する能力を伸ばす。

関数 $y = ax^2$ を用いて具体的な事象をとらえ説明する際には、第 1 学年や第 2 学年と同様に、数量の関係を理想化したり単純化したりして考えることによって、関数 $y = ax^2$ とみなし、事象をとらえ説明することも大切である。実験の結果と予測を比較検討し、説明し伝え合う活動を通して、その食い違いの原因を考えたり、よりよい予測のための手立てを工夫したりすることも考えられる。

このように、事象をとらえ説明する能力を伸ばすためには、数学的な表現を用いながら他者に説明するような場面を意図的に設けることが必要である。その際には、表、式、グラフを適切に選択したり、自分の表現を他者の表現と比較することにより、事象の考察を深めることができることを体験できるようにすることが重要である。

2.2 各7社の教科書比較

2.2.1 日常の事象を扱った問題場面

- ・日常の事象を扱った問題場面についてまとめた。

大日本図書

- ＜問題場面1＞正方形の紙の面積
- ＜問題場面2＞斜面を転がる物体の運動
- ＜問題場面3＞自由落下
- ＜問題場面4＞追いつき問題
- ＜問題場面5＞ペットボトルの水を抜く問題
- ＜問題場面6＞制動距離
- ＜問題場面7＞振り子

啓林館

- ＜問題場面1＞斜面をころがる物体の運動
- ＜問題場面2＞物体の落下
- ＜問題場面3＞制動距離
- ＜問題場面4＞振り子
- ＜問題場面外＞平均の速さ
- ＜問題場面外＞パラボラアンテナ

学校図書

- ＜問題場面1＞タイルの枚数
- ＜問題場面2＞斜面を転がる物体の運動
- ＜問題場面3＞追いつき問題
- ＜問題場面4＞制動距離
- ＜問題場面5＞建物の壁にかかる風圧
- ＜問題場面外＞パラボラアンテナ、つり橋のロープ

教育出版

- ＜問題場面1＞斜面を転がる物体の運動
- ＜問題場面2＞自由落下
- ＜問題場面3＞振り子
- ＜問題場面4＞追いつき問題
- ＜問題場面5＞制動距離
- ＜問題場面外＞パラボラアンテナ

数研出版

- ＜問題場面1＞斜面を転がる物体の運動
- ＜問題場面2＞自由落下
- ＜問題場面3＞制動距離
- ＜問題場面4＞追いつき問題
- ＜問題場面外＞パラボラアンテナ

日本文教出版

- ＜問題場面1＞斜面を転がる物体の運動
- ＜問題場面2＞自由落下
- ＜問題場面3＞振り子
- ＜問題場面4＞追いつき問題
- ＜問題場面外＞パラボラアンテナと懐中電灯

東京書籍

- ＜問題場面1＞斜面をころがる物体の運動
- ＜問題場面2＞ジェットコースター
- ＜問題場面3＞自転車の制動距離

■問題の分類

- 1: 正方形の面積・周の長さ
- 2: 斜面を転がる物体の運動
- 3: 自由落下
- 4: 追いかっけっこ
- 5: ペットボトルからぬける水と時間
- 6: 制動距離
- 7: 振り子の周期
- 8: タイルの枚数
- 9: 建物の壁にかかる風圧

表 1 各出版社の出題傾向

	大日本	東京書籍	啓林館	教育出版	数研出版	日文	学校図書
1	○	×	×	×	×	×	×
2	○	○	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○	○	×
4	○	×	×	○	○	○	○
5	○	×	×	×	×	×	×
6	○	○	○	○	○	×	○
7	○	×	×	○	×	○	×
8	×	×	×	×	×	×	○
9	×	×	×	×	×	×	○

2.2.2 導入から一般化までの流れ

■ボールが斜面をころがるときの運動〈変数・時間 x ところがる距離 y 〉

- ・啓林館(例題→導入・ $y=2x^2$ ・表→グラフ→一般式の導出)
- ・東京書籍(例題→導入・ $y=0.2x^2$ ・表→一般式の導出)
- ・日本文教出版(例題→導入・ $y=2x^2$ ・表→一般式の導出)
- ・数研出版(例題→導入・ $y=2x^2$ ・表→一般式の導出)
- ・学校図書(例題→導入・ $y=0.5x^2$ ・表→一般式の導出)
- ・大日本図書(例題→導入・ $y=2x^2$ ・表→一般式の導出)
- ・教育出版(例題→導入・ $y=2x^2$ ・表→一般式の導出)

■物体の自由落下〈変数・時間 x と落下する距離 y 〉

- ・啓林館(例→問い・ $y=5x^2$ ・表→距離を求める問題)
- ・東京書籍〈バンジージャンプ〉(問題・ $y=4.9x^2$ ・高さや平均の速さを求める問題)
- ・日本文教出版(例題→問い・ $y=5x^2$ ・図から読み取る→解答例→距離と時間を求める問題)
- ・数研出版(問い・ $y=5x^2$ ・距離を求める問題)
- ・学校図書(例→問い $y=ax^2$ ・グラフ→平均の速さを求める問題)
- ・教育出版(問い・ $y=5x^2$ ・落下距離と時間を求める問題)
- ・大日本図書(例→問い・ $y=5x^2$ ・グラフ→落下距離を求める問題)

■車の制動距離〈変数・時速 x m/sで走る車がブレーキをききはじめてから停止するまでの制動距離 y 〉

- ・啓林館(例・ $y=0.007x^2$ ・グラフ)
- ・東京書籍(問い・比例定数を求め、空走距離、制動距離と停止距離を求める問題)
- ・数研出版(問い・比例定数と距離を求める問題)
- ・学校図書(問い・比例定数を求めて考察したあと距離と時速を求める問題)

■ふりこの運動〈変数・振り子が1往復するのにかかる時間(周期) x と振り子の長さ y 〉

- ・啓林館(問い・ $y=\frac{1}{4}x^2$ ・振り子の長さを求め、1往復するのにかかる時間を求める問題)
- ・日本文教出版(問い・ $y=\frac{1}{4}x^2$ ・1往復するのにかかる時間を求める問題)
- ・教育出版(問い・ $y=\frac{1}{4}x^2$ ・振り子の長さや1往復するのにかかる時間を求める問題)
- ・大日本図書(問い・ $y=\frac{1}{4}x^2$ ・振り子の長さを求める問題)

■正方形のタイルを上から1段目に1個、2段目に3個、3段目に5個と階段状に敷き詰める。〈変数・ x 段目のタイルの枚数を y 枚〉

- ・学校図書(問い・ $y=x^2$ ・グラフ→ x, y の関係が比例かどうか?)
- ・教育出版(問い・グラフ→枚数が100枚ときに何段?)
- ・大日本図書(コラムでの説明)

■風速 x m/sの風が吹く時の、壁にかかる風圧を y パスカルとすると、 y は x に2乗に比例する〈変数・風速 x m/sと風圧 y 〉

- ・学校図書(例→問い・比例定数を求めたあと、風圧を求めよ)

2.2.3 導入から一般化までで扱われている問題の意図の考察

【日本文教出版】

■扱われている問題：斜面をころがる物の運動

■流れ：表(x, y) → 表(x, x², y) → 式 (y = 2x²)

時間(秒)を x、転がった距離(m)を y として、x, y の関数関係を導きだす。

■この問題を扱う意図

斜面をころがる物の速度がどんどん速くなっていくことや、すすむ距離が長くなっていくことは子どもたちにとっても、日常の場面で想像のしやすいことだと考えられる。また、教科書の図や黒板等で子どもたちが実際に長さを測って確認する活動を通して扱うことができるからだと考える。

式が $y = 2x^2$ であることについては導入の問題であるので、比例定数が正の整数になる例を考えることで、子どもたちが表のなかに出てくる数字の規則性に気付きやすいようにという意図であると考えられる。

式を導出した後、すぐに一般化していた。

【東京書籍】

■扱われている問題：斜面をころがる物の運動

■流れ：表(x, y) → 表の規則性の問題 2 題 → 表(x, x², y) → 式 (y = 0.2x²)

時間(秒)を x、転がった距離(m)を y として、x, y の関数関係を導きだす。

■この問題を扱う意図

日文と同様に、斜面をころがる物の速度がどんどん速くなっていくことや、すすむ距離が長くなっていくことは子どもたちにとっても、日常の場面で想像のしやすいことだと考えられる。また、教科書の図や黒板等で子どもたちが実際に長さを測って確認する活動を通して扱うことができるからだと考える。

式が $y = 0.2x^2$ であることについては、一次関数でも変化の対応関係については学んできており、復習という意味でこどもに学習させるなら規則性を見つけるのが困難で、こどもがその既習の内容をしっかりと振り返ることができるような内容にするためであると考えられる。x, y の表と x, x², y の表の間に、表の数値を読み取ったり、その法則性から答えを導き出したりするようなものを問題として扱っていることも振り返りをその学習でしっかりとさせるためであると考えられる。

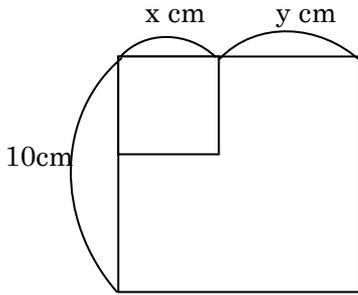
このあと一般化（問題のまとめとしてさらっと触れる程度）

【大日本図書】

■扱われている問題：正方形の辺の長さ・周の長さ・面積の対応関係

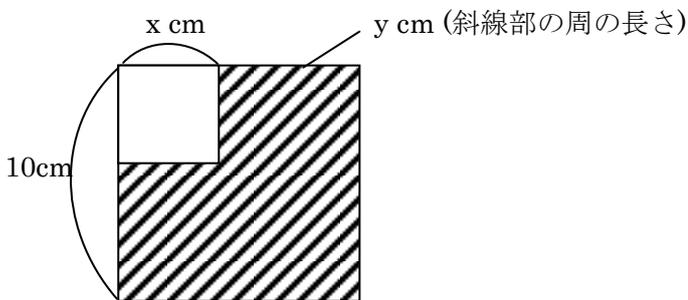
■流れ：

(1) xy のグラフ → y を x の式で表す → どんな関数か考える



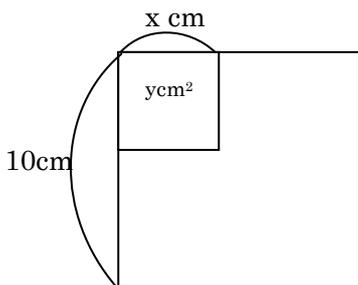
(2) 表(x, y について $x = 1, 3.5, 8$ のとき) → 関数であるかどうか考える

→ 比例か反比例か考える → 一次関数といえるか考える



(3) 表(x, y について $1 \leq x \leq 10$) → 関数であるか考える

→ 比例か反比例か考える → 一次関数といえるか考える



■この問題を扱う意図

「正方形の辺と面積の対応」

(1)のような既習の関数関係の復習から丁寧に導入し、(2)(3)のような未知の関数関係について導き出すことによって、生徒がここで学習する新しい関数である二次関数に興味や疑問を抱くような導入になっていると考えられる。比例・反比例や一次関数であるかといった確認を問題中で繰り返し行っているのは、未知の関数であることを子どもたちにしっかりと認識させるためであると考えられる。

また、(3)で x と y の関係を式に表せという問があるが、正方形の面積なら二次関数を知らなくても導き出せる

ので、これも既習の知識から導くという工夫がされている。また、ここで導き出される二次関数は $y = x^2$ で比例定数が 1 であり、他の係数と比べると規則性を見出しやすい例になっている。

「斜面をころがる物の運動」

次に、斜面をころがる物の運動について扱っており、もう一度どういう関数関係であるかどうかを確認し、表を用いて x と y の対応関係と規則性について確認し $y = 2x^2$ という式を導いている。関数を一般化する前に 2 つの例を扱うことで、 $y = ax^2$ の形を子どもたちに意識させることができるような配慮であると考えられる。

【数研出版】

■扱われている問題：斜面をころがる物の運動（自転車 → ボール）

■流れ：表 (x : 時間, y : 速さ)をつくる → 式を立てる → 表(時間と距離)をつくる

→ 表をもとに x (時間)と y (距離)についての規則性を考える → 表(x, x^2, y)をつくる

→ 式($y = 2x^2$)を立てる

■この問題を扱う意図

他の出版社と同じ斜面をころがる物の運動の問題でも、自転車という例を扱うことで斜面をころがる物の速度がどんどん速くなっていくことや、すすむ距離が長くなっていくことのイメージをしやすくしているのだと考えられる。

また、斜面をころがる物の運動は全 7 社で扱われているが x を時間、 y を速さとしている問題場面はこの一つだけである。意図としては、ひとつの事象のなかにすでに知っている関数関係もあれば知らない関数関係もあるということから子どもの興味や関心をひくような問題設定にしようというものであると考えられる。

【啓林館】

■扱われている問題：斜面をころがる物の運動

■流れ：表(x, y) → グラフ(第一象限のみ) → 比例・反比例・一次関数のグラフの復習

→ 表(x, x^2, y) → 対応関係の考察 → 一般化

■この問題を扱う意図

表からグラフを描くことで、今まで習ってきた関数との違いが目に見えて分かるようにという考えで取り入れられているのだと考える。

【教育出版】

■扱われている問題：斜面をころがる物の運動

■流れ：表(x, y) → 比例するか、一次関数かどうかを考える → 表(x, x^2, y)

→ 式を立てる → 問題 → 一般化

■この問題を扱う意図

他社と同様に、想像がしやすい例であり、実際に進んだ距離を測る活動などを通して学習することができるためであると考えられる。

【学校図書】

■扱われている問題：タイルの枚数

■流れ：

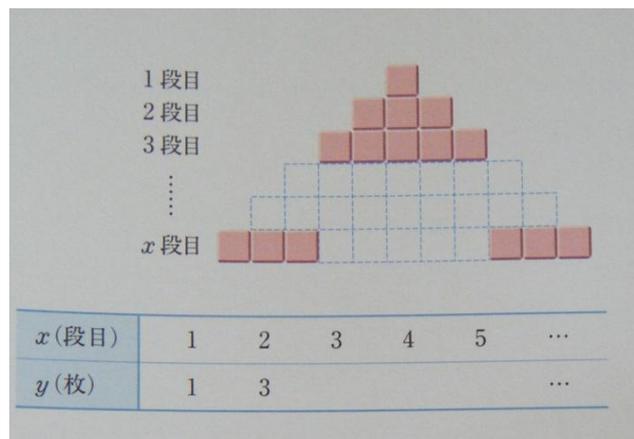
「タイルの枚数」

段の数を x (段)、段ごとのタイルの枚数を y (枚)として、 x と y の関係を調べる。



$x = 2$ まで y の値も埋めてある表を用いてその表を完成させる。

$$\text{式} : y = 2x - 1$$



段の数を x (段)、タイルの総数を y (枚)として、 x と y の関係を調べる。

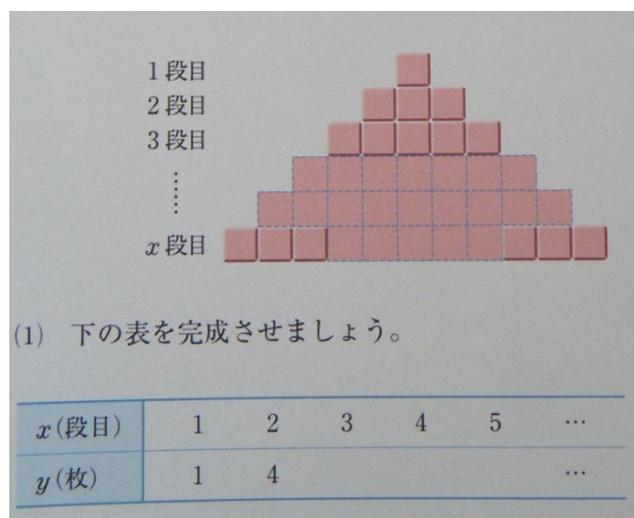


$x = 2$ まで y の値も埋めてある表を用いてその表を完成させる。



式で表す

$$\text{式} : y = x^2$$



→ 比例・反比例・一次関数かどうかを考える

「斜面をころがる物の運動」

表(x, y) → 表(x, x^2, y) → 式($y = 0.5x^2$)を立てる → 一般化

■この問題を扱う意図

タイルの総数を y とする場合は、導き出される式が $y = x^2$ であり、これは表で考える際に、どのような変化をしているか判断しやすいということの方があげられる。

3 単元の指導計画

第1章 <時間数>

(1) $y = ax^2$ の導出 2 時間

・デジタルカメラの例を用いた一般式の導出 . . . 1 時間目(本時)

・さまざまな事象における二次関数 2 時間目

(2) $y = ax^2$ のグラフ 3 時間

(3) 変化の割合・増減と変域 . . . 4 時間

(4) $y = ax^2$ の利用 2 時間

第2章

いろいろな関数 1 時間

発展問題 1 時間

<計 13 時間>

4 授業構成作成の過程

授業構成案 1

<準備物> 定規

問

ある風景をデジタルカメラで撮った写真1(横15cm×縦12cm)がある。この風景を、撮影する位置を変えずに1.5倍、2倍、2.5倍、3倍と倍率のみ変えたもの(写真1のアップ)が写真2である。写真1中の写真2との辺の比、面積、面積比を求めなさい。これを参考に、写真1のある部分を写真3として撮りたい。その部分は写真1全体の面積の4%を占めていた。写真3を撮るには、デジタルカメラの倍率は何倍にしたらよいか。

支援

- ・定規で写真1に写真2の部分の面積を図に描いてみよう。
- ・黒板【(写真1の面積)÷(写真1にある写真2の部分の面積)=(面積比)】

<活動 C₁> 定規を用いて、辺の比と面積を求め、
辺の比より写真ごとの面積比を導き出せる。

1.5倍のとき

(辺の比)=1:1.5

(写真1中の面積)=80

2倍の時

(辺の比)=1:2

(写真1中の面積)=45

2.5倍の時

(辺の比)=1:2.5

(写真1中の面積)=28.8

3倍の時

(辺の比)=1:3

(写真1中の面積)=20

それぞれの辺の比から面積比を導き出す。

1.5倍のとき

(面積比)=1:2.55

2倍の時

(面積比)=1:4

2.5倍の時

(面積比)=1:6.25

3倍の時

(面積比)=1:9

<活動 C₂> 定規を用いて、辺の比と面積を求め、
面積より写真ごとの面積比を導き出せる。

1.5倍のとき

(辺の比)=1:1.5

(写真1中の面積)=80

2倍の時

(辺の比)=1:2

(写真1中の面積)=45

2.5倍の時

(辺の比)=1:2.5

(写真1中の面積)=28.8

3倍の時

(辺の比)=1:3

(写真1中の面積)=20

それぞれの面積から面積比を導き出す。

(面積比)=

(写真1の面積)÷(写真1中の写真2の部分の面積)

1.5倍のとき

(面積比)=1:2.55

2倍の時

(面積比)=1:4

2.5倍の時

(面積比)=1:6.25

3倍の時

(面積比)=1:9

<活動 B>表の中から対応関係を探し、規則性を見つけ出すことができる。

写真 2 を用いて写真 1 の面積と写真 1 中の写真 2 の面積との比を出す。

1.5 倍のとき (写真 1 の面積) : (写真 1 中の写真 2 の面積) = 2.55 : 1

2 倍のとき (写真 1 の面積) : (写真 1 中の写真 2 の面積) = 4 : 1

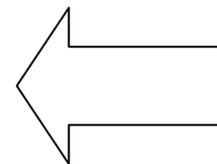
2.5 倍のとき (写真 1 の面積) : (写真 1 中の写真 2 の面積) = 6.25 : 1

3 倍のとき (写真 1 の面積) : (写真 1 中の写真 2 の面積) = 9 : 1

倍率・辺の比・面積・面積比の表を作る。

倍率	(1)	1.5	2	2.5	3
辺の比	1 : 1	1.5 : 1	2 : 1	2.5 : 1	3 : 1
面積	180	80	45	28.8	20
面積比	1 : 1	2.55 : 1	4 : 1	6.25 : 1	9 : 1

表の中からそれぞれ倍率との関係を考える。



支援

- ・倍率 1 倍の時の面積比はどうなるだろう？
- ・表にある数字の中から何か規則性が見出せるかな？

支援②

- ・4%の部分の倍率を求めるのに使えるような関係はあるかな？

<活動 A₁>4%の部分の面積及び面積比を求め、表から倍率を導き出すことができる。

写真 1 の面積は $15 \times 12 = 180$

よってある部分の面積は $180 \times 0.04 = 7.2$

x 倍のとき

(写真 1) : (写真 1 中の写真 2 の面積)

= $180 : 7.2 = 25 : 1$

表の規則性に当てはめて、倍率を導き出す。

<活動 A₂>4%の部分の面積及び面積比を求め、式から倍率を導き出すことができる。

活動 A で作った表より $y = x^2$ の式を導き出す。

活動 B₁ と同様に面積比を求める。

求めた式に当てはめて、倍率を導き出す。

<集団の話し合い>

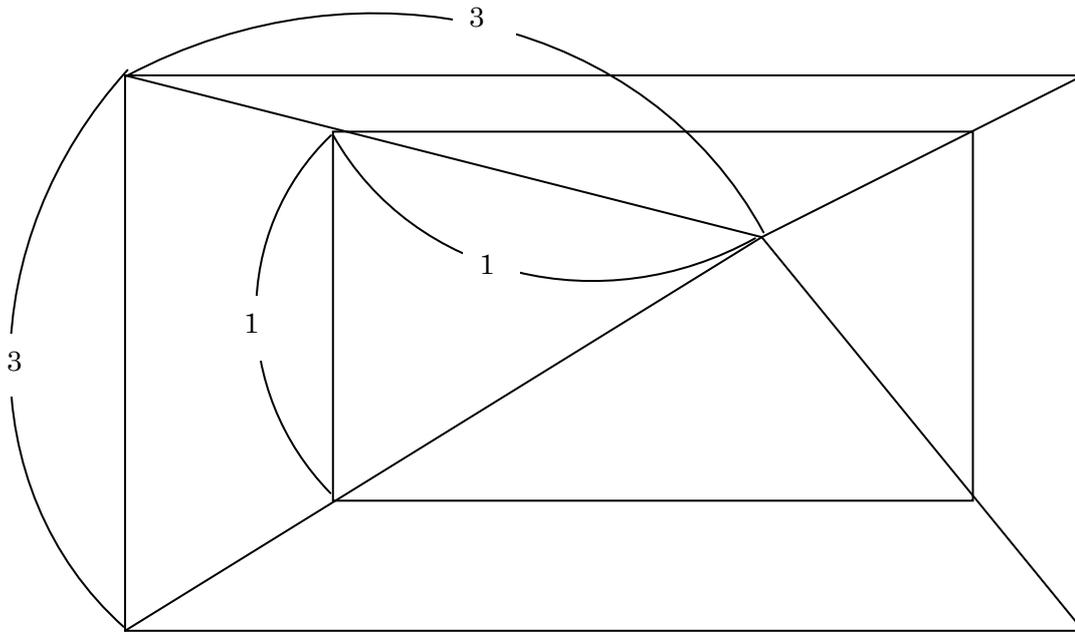
○与えられたそれぞれの写真の辺の比、面積、面積比を確認し、表を完成させる。

○表から関係を考え、4%の部分の倍率を確認する。

○表から考えた規則性をもとに、式を導き出す。(生徒に発表させる)

○一般式 $y = ax^2$ を導出する。

■辺の比について



(ex)

辺の比が $1 : 3$ であることから、面積比が $1 : 9$ であることが分かる。

改善点

- ・問題提示において「辺の比」「面積」「面積比」を問うのであれば「辺の長さ」も問わなければ問題として不自然。
- ・問題文で示す条件が多い。
 - …2倍3倍の写真などは、問題文としてではなく、問題提示として扱うことで問題文をシンプルにし、子どもの問題へのアプローチが多様になるようにした方がよい。
- ・辺の比から面積比を求めることは出来ない。
 - …写真の縦と横の比がそれぞれ $1:3$ になることが分かっても、その縦の 3 と横の 3 をかけていい保証がなく、面積比が $1 : 9$ になると示すことは出来ない。
- ・今回の指導案で示した解決の過程以外に、2通りの解決へのアプローチがある。
 - …先に4%の面積を求め、そのサイズから考える方法と、写真1何枚分になるかを考える方法がある。

授業構成案 2

■この問題提示によって考えられる子どもの問題へのアプローチ

<パターン 1>

4%の写真が写真1の中に何枚並ぶかを考える→表で調べる

<パターン 2>

4%の面積を出す→それに合う長方形を考える→サイズから倍率を探す

<パターン 3>

面積の比を求める→表を作って対応を考える→4%の面積を求め、倍率を出す

問

ある風景をデジタルカメラで撮った写真1(横15cm×縦12cm)がある。この写真1のある一部分のアップした写真3がほしい。その部分は写真1全体の面積の4%を占めていた。写真3を撮るには、デジタルカメラの倍率は何倍にしたらよいか。

■板書の工夫

黒板には【(写真1の面積)/(写真1にある写真2の部分の面積)=(面積比)】

<活動A>面積の4%の写真が写真1の中に何枚並ぶかを考え、表より倍率を求めることができる。

<活動A₁>提示された面積また、4%の部分の面積を求める。

縦を a cm、横を b cm とおいた時、4%の面積(a×b)は

$$a \times b = 180\text{cm}^2 \times (4 \div 100)\% = 7.2\text{cm}^2 \dots \textcircled{1}$$

2倍のときは、面積が 45cm²

3倍のときは、面積が 20cm²

4倍のときは、面積が 11.25cm²

また1倍のときは、面積が 180cm²である。

より一般的な支援

- ・今、分かっている規則は何だろう？
- ・1倍の時の面積はどうなるだろう？

より特殊な支援

- ・求めた面積は写真1の中に何枚並ぶかな？

<活動A₂>求めた写真3の面積から、縦横の長さを求める。

12 : 15 = 4 : 5 = a : b とすると、

$$5a = 4b \text{ から } a = (4b)/5 \dots \textcircled{2}$$

①,②より、

a=2.4 b=3 である。

よって $12 \div 2.4 = 5$ 、 $15 \div 3 = 5$

より一般的な支援

- ・倍率がこのように求まる根拠は何だろう？

より特殊な支援

- ・表などを用いて規則性を示してみよう。

<活動A₃>写真1の中に写真3が並ぶ枚数から倍率を求める。

写真1の中に、4%の面積の写真は何枚並ぶかを確かめる。

問題提示より、2倍の時は4枚、3倍の時は9枚と分かっているので並んだ枚数、25枚から倍率を求める。

<活動 B> 4%の面積を求め、それに合う長方形を考え、サイズから倍率を探す。

<活動 B₁> 提示された面積また、4%の部分の面積を求める。

4%の面積は

$$a \times b = 180 \text{cm}^2 \times (4 \div 100) = 7.2 \text{cm}^2 \dots \textcircled{1}$$

2倍のときは、面積が 45cm²

3倍のときは、面積が 20cm²

4倍のときは、面積が 11.25cm²

また1倍のときは、面積が 180cm²である。

より一般的な支援

- ・今、分かっている規則は何だろう？
- ・1倍の時の面積はどうなるだろう？

<活動 B₂₋₁> 表より規則性を考え、4%の面積に対応する倍率を求める。

倍率と面積を表にする。

倍率(倍)	1	2	3	4	...	??
面積(cm ²)	180	45	20	11.25	...	7.2

ここから、 $180 \div 4 = 45$ $180 \div 9 = 20$ $180 \div 16 = 11.25$ から
 倍率が 2、3、4 と増えていくにつれて、面積は元の面積の $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$ となっている。

ここから、規則性を見つけ 7.2cm²の倍率が何倍かを求める。

B₂₋₁へのより特殊な支援

- ・対応関係が見やすいように表にしてみよう。

B₂₋₂へのより特殊な支援

- ・縦と横を文字で置いて、方程式を立ててみよう。

<活動 B₂₋₂> 辺の比から倍率を予想し、倍率を求めることができる。

ここで、 $12 : 15 = 4 : 5 = a : b$ とすると、

$$5a = 4b \text{ から } a = (4b) / 5 \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

$a = 2.4$ $b = 3$ である。

よって $12 \div 2.4 = 5$ 、 $15 \div 3 = 5$

ここで、辺の比から 4%の面積を撮るには、倍率が 5 倍ではないかと推測出来る。

ここで、問題提示で与えられた倍率を考えてみる。

c と d を用いて

$$c \times d = 45 \text{ cm}^2 \text{ (2倍)}$$

$$c \times d = 20 \text{ cm}^2 \text{ (3倍)}$$

$$c \times d = 11.25 \text{ cm}^2 \text{ (4倍)}$$

<活動 C>面積比を求め、表を作って対応を考え、4%の面積を求め、倍率を出す

<活動 C₁>定規を用いて、辺の比と面積を求め、面積比を求める。

2倍の時 (辺の比)=1:2

(写真1中の面積)=45

3倍の時 (辺の比)=1:3

(写真1中の面積)=20

4倍の時 (辺の比)=1:4

(写真1中の面積)=11.25

(面積比)=(写真1の面積)/(写真1中の写真2の部分の面積)

2倍の時 面積の比は 1:4

3倍の時 面積の比は 1:9

4倍の時 面積の比は 1:16

以上よりそれぞれの面積比は

2倍の時 (面積比)=4

3倍の時 (面積比)=9

4倍の時 (面積比)=16

より一般的な支援

・倍率を出すのに必要なものは何だろうか？

より特殊な支援

・定規で写真1に写真2の部分の面積を図に描いてみよう。

より一般的な支援

・倍率1倍の時の面積比はどうか？

より特殊な支援

・求めたものを表に表してみよう。

<活動 C₂>表の中から対応関係を探し、規則性を見つけ出す。

倍率・辺の比・面積・面積比の表を作る。

表の中からそれぞれ倍率との関係を考える。

倍率	(1)	2	3	4
縦の長さ	12	6	4	3
横の長さ	15	7.5	5	3.75
辺の比	1:1	2:1	3:1	4:1
面積	180	45	20	11.25
面積比	1:1	4:1	9:1	16:1

表の中からそれぞれ倍率との関係を考える。

より一般的な支援

・表にある数字の中から何か規則性が見出せるかな？

・4%の部分の倍率を求めるのに使えるような関係はあるかな？

より特殊な支援

・倍率と面積比に注目しよう。

<活動 C₃₋₁>表を用いる

写真1の面積は $15 \times 12 = 180$

よってある部分の面積は $180 \times 0.04 = 7.2$

x倍のとき

(写真1):(写真1中の写真2の面積)
= $180 : 7.2 = 25 : 1$

表の規則性に当てはめて、倍率を導き出す。

<活動 C₃₋₂>式を用いる

活動Aで作った表より $y = x^2$ の式を導きだす。

活動B₁と同様に面積比を求める。

求めた式に当てはめて、倍率を導き出す。

<集団の話し合い>

- 活動 A・B・C それぞれの解き方を確認。
- 与えられたそれぞれの写真について倍率・縦横の辺・辺の比・面積・面積比を確認し、表を完成させる。
- 表から関係を考え、4%の部分の倍率を確認する。
- 一般式 $y=ax^2$ を導出する。

5 授業構成案

指導内容	学習活動と学習内容	支援・指導上の留意点
問題提示	<p>T: これはどこの写真かな?</p> <p>S: ○○ー!</p> <p>T: そう! 今日の授業ではこの○○の写真を使います。</p> <p>T: いまこの写真のある一部分だけをアップにした写真がほしいです。その部分の面積は写真1全体の4%を占めています。</p> <p>T: いまここに2倍した写真と写真があります。 みんなで、写真1の何枚分になっているか確認しよう!</p> <p>T: 何枚分?</p> <p>S: 4枚!</p> <p>T: じゃあ次は3倍の写真です! これはどうかな?</p> <p>S: 9枚!</p> <p>T: そうです。でも2倍や3倍では4%の面積を写すには足りないようです。何倍にすればよいか考えてみよう。</p>	<p>←黒板で写真2を写真1の上でスライドさせる</p> <p>←同様に写真をスライドさせる。</p>

	<p>問</p> <p>ある風景をデジタルカメラで撮った写真 1(横 15cm×縦 12cm)がある。この写真 1 のある一部分のアップした写真 3 がほしい。その部分は写真 1 全体の面積の 4%を占めていた。写真 3 を撮るには、デジタルカメラの倍率は何倍にしたらよいか。</p>	
<p>自力解決</p>	<p><期待する活動 A></p> <p>面積が 4%の写真が写真 1 の中に何枚並ぶかを考え、表より倍率を求めることができる。</p> <p>《A₁》</p> <p>□写真 1 の面積を、定規を用いて出し、そこから 4% の面積を求める。</p> <p>(式) $180 \times 4/100 = 7.2 \text{ cm}^2$</p> <p>□写真 1 の縦横の比を出して、4%の面積の縦横の長さを求める。</p> <p>縦横をそれぞれ a,b とすると</p> <p>$12 : 15 = 4 : 5 = a : b$</p> <p>$5a = 4b$ から $a = (4b)/5$</p> <p>$a = 2.4$ $b = 3$ である。</p> <p>《A₂》</p> <p>□4%の面積の長方形を写真 1 のなかで並べて(又は線を描き込んで)並ぶ枚数を確認する。</p>	<p>《A₁》</p> <p>T₁: 今、分かっている規則は何だろう？</p> <p>T₁: 1 倍の時の面積はどうなるだろう？</p> <p>T₂: 写真の縦と横は倍率が変わっても同じ比のはずだよな？</p> <p>《A₂》</p> <p>T₂: 2 倍の時は 4 枚、3 倍の時は 9 枚だから、逆から考えたら、25 枚の時どうなる？</p>

	<p>□問題提示での倍率と写真の枚数の対応から、25枚が5倍であることを求めることができる。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p><期待する活動 B> 4%の面積を求め、それに合う長方形を考え、サイズから倍率を探す。</p> </div> <p>《B₁》</p> <p>□写真1の面積を、定規を用いて出し、そこから4%の面積を求める。</p> <p>(式) $180 \times 4/100 = 7.2 \text{ cm}^2$</p> <p>□図に線を描き込み、2、3、4倍の面積を求める。</p> <p>2倍のときは、面積が 45cm^2 3倍のときは、面積が 20cm^2 4倍のときは、面積が 11.25cm^2 また1倍のときは、面積が 180cm^2である。</p> <p>《B₂₋₁》</p> <p>□倍率と面積を表に書き、規則性を見つける。 (倍率1倍の時の面積は180であることが分かる。)</p> <p>□表の規則性より、4%の部分の面積を求める。</p> <p>《B₂₋₂》</p> <p>□写真1の縦横の比を出して、4%の面積の縦横の長さを求める。</p>	<p>T₁: 倍率がこのように求まる根拠は何だろう？</p> <p>T₂: 表などを用いて規則性を示してみよう。</p> <p>《B₁》</p> <p>T₁: 2、3、4倍の面積はどうやったら測れるかな。</p> <p>T₂: 倍率が1の時はどうかな？</p> <p>《B₂₋₁》</p> <p>T₁: 倍率と面積に規則性はないかな？</p> <p>T₂: 対応関係が見やすいように表にしてみよう。</p> <p>《B₂₋₂》</p> <p>T₂: 縦と横を文字で置いて、方程式を立ててみよう。</p>
--	---	---

縦横をそれぞれ a,b とすると

$$12 : 15 = 4 : 5 = a : b$$

$$5a = 4b \text{ から } a = (4b)/5$$

a=2.4 b=3 である。

□辺の比から 4%の面積を撮るには、倍率が 5 倍ではないかと推測出来る。

$$12 \div 2.4 = 5, 15 \div 3 = 5$$

<期待する活動 C>

面積比を求め、表を作って対応を考え、4%の面積を求め、倍率を出す

《C₁》

□図に線を描き込み、2、3、4 倍の面積、縦横の辺、辺の比、面積比を求める。

$$(\text{面積比}) = (\text{写真 1 の面積}) / (\text{写真 1 中の写真 2 の部分の面積})$$

《C₂》

□それぞれ求めたものを表に表し、規則性を見つける。

倍率	(1)	2	3	4
縦の長さ	12	6	4	3
横の長さ	15	7.5	5	3.75
辺の比	1 : 1	2 : 1	3 : 1	4 : 1
面積	180	45	20	11.25
面積比	1 : 1	4 : 1	9 : 1	16 : 1

《C₃₋₁ C₃₋₂》

□式または表を用いて 4%の面積と倍率を求める。

<表より>

$$\begin{aligned} &(\text{写真 1}) : (\text{写真 1 中の写真 2 の面積}) \\ &= 180 : 7.2 = 25 : 1 \end{aligned}$$

<式より>

T₂ : 写真の縦と横は倍率が変わっても同じ比のはずだよな？

T₂ : 2、3、4 倍の面積を実際測ってみよう。

T₁ : 表にある数字の中から何か規則性が見出せるかな？

T₁ : 4%の部分の倍率を求めるのに使えるような関係はあるかな？

T₂ : 倍率と面積比に注目しよう。

	<p>$y = ax^2$の規則性を導き出し、あてはめて考える。</p>	
<p>集団の話し合い</p>	<p>(問題を子どもに板書させる)</p> <p>T: じゃあどうやって考えたかをそれぞれ教えてください。</p> <p>SA: 何枚並ぶか考えました。</p> <p>SB: 面積と倍率の関係から考えました。</p> <p>SC: 面積比と倍率の関係から考えました。</p> <p>T: この表のなかで規則性が一番探しやすいのはどれだろう?</p> <p>S: 面積比と倍率!</p> <p>T: どんな関係になってるかな?</p> <p>S: 面積比がいつも倍率の二乗になってる</p> <p>T: そうだね。じゃあ、8倍のときの面積比は?</p> <p>S: 64!</p> <p>T: じゃあ、10倍のときは?</p> <p>S: 100!</p> <p>T: そうだね。これをいままで習った関数みたいに表すと</p> $y = x^2$ <p>と表せるね。yはxの二乗に比例するといいます。</p> <p>T: これを二次関数といいます。一般的に表すと、</p>	<p>○事前に生徒をあてておき、板書するよう言うておく。</p> <p>○生徒の意見を否定するのではなく、別の解法に導く。</p> <p>○なるべく、生徒から答えを導き出す。</p>

	$y = ax^2$ <p>と書くことができます。a は比例定数と言います。</p> <p>T : 今は比例定数が隠れているんだけど、なにかわかるかな？</p> <p>S : 1</p> <p>T : そうだね。いまは 1 だったけど、いろんな場合があるから比例定数を a とおくんだよ。今まで習った関数と同じだね。</p>	
--	--	--

T : 教師の発問

S : 生徒の発問

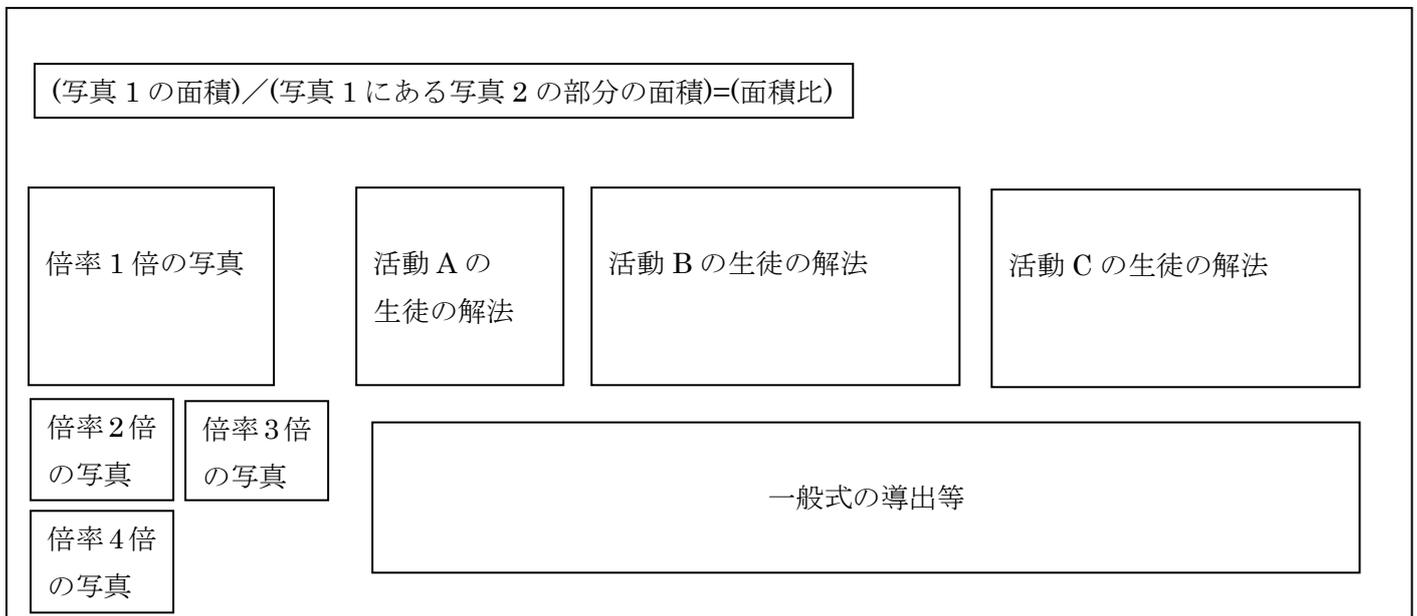
T₁ : より一般的な支援

T₂ : より特殊な支援

□ : 生徒の活動

○ : 指導上の留意点

6 板書計画



7 引用・参考文献

中学校学習指導要領解説〈数学編〉

教育科学 数学教育 2003 年 10 月号 明治図書

8 授業を終えて

蜂谷 一樹

私が半年間受けた数学学習指導設計Ⅱから感じたことは、問題解決がある授業にするために必要な問題作りがこんなにも難しいものなのか、といったものでした。簡単だとは思ってなかったけど、こんなに時間を費やし、思考するものだとも考えていませんでした。単元設定から始まり、教科書比較、日常にある二次関数を調べたあとに、問題開発をし、指導案を書いたがどれも欠けてはいけないものであることが分かりました。

現時点での自分たちの知識不足、人の話を聞いて理解する力のなさ、文章力のなさ、問題解決のある授業とはなにか？といった点を感じられる、素晴らしい講義、グループワークだったと思います。

今後、僕の目標に向かう時にこの講義はかならず役に立つと思います。そしてなにより、生徒にとってよりよい授業が作れるようになった時、この講義を受けた意味があるのではないかと感じました。

永井 孝基

今回の数学学習指導設計Ⅱを受講して初めて指導案を考える機会があったが、半年間もの時間をかけて1時間分の授業構成を仕上げるのが精一杯で、改めて授業を行うことが簡単なことではないということに気付かされた。また今まで教科書について深く考えたことがなかったが、二次関数の範囲の教科書比較を行って、教科書の例などは中学生にしてみると非日常的なものが多く、生徒に馴染みにくいということも考えさせられた。その点で言えば、先生に言われた「手触り感」という言葉から、生徒に二次関数をより身近に考えてもらうべく、自分たちで実際に問題を考えたことは非常によい経験が出来たと思う。この講義ではグループの皆で意見を出し合い1つの指導案を作成したが、実際に教師になった際には今回のような指導案を自分1人で毎回の授業について作成しなければならないので、1回分の指導案をよりスムーズに作成するための力量が必要であると感じた。

生徒の、問題に対する様々な取り組み方に臨機応変に対応し、支援をするためにも、いかにしっかりとした指導案を組み立てるかが私たちの考えた、またこれからは自分自身で考えていくべき課題となってくる。

まずは教師への第1歩として、教育実習に行かしていただく際に今回の講義で学んだことを活かして指導をしていきたいと思う。

角田 裕介

数学学習指導設計の授業を半年間受けて大変なこと難しいことはたくさんあったが、身についたこと、気づいたこともたくさんあり、とても有意義な時間がすごせたと思う。はじめて授業の指導案を作ってみて、授業をすることがこんなに難しいことなのかと改めて実感した。今まで受けてきた授業が多くの教材研究のもとに成り立っていて、多くの労力を必要としていることがわかった。そして、1回指導案を作れば終わりではなくそのクラス、生徒にあわせてよりあったものつくっていくことが大切だと思った。そしてこの授業では長い時間をかけて指導案を作成したが、実習などではもっと早い時間で作らなければならない。そのための実力をこれからつけていきたいと思います。

藤田 綾

今回の数学学習指導設計は、9月に教育実習を経験し、それを踏まえての2度目の受講となりました。そのこともあって、私の中で前回よりも大変充実した半年間となったように思います。この授業を通して感じたのは、第一に授業を作るということのむずかしさ、そして第二に自分にはない人の考えを知ることの大切さです。

問題開発を中心に、教材研究や問題場面の比較検討を行ってきました。子どもが親しみの湧くような新しい問題を考えることも、そこから多様な解決を考え、適切な支援を考えることも班員が意見を出し合い、考えていく中で徐々にいいものになっていったように感じました。先生からのご指摘も、班員とともに考えていく中で、自分達のなかで深い理解に変わっていったように思います。

本来ならば、半年もかけて一つの指導案を作るわけにはいかないですし、ここまでの意見交換もできません。この活動は、子どもと同様に私たちも自分自身の困難や課題に出会い、それを解決していくことで私たちが今後向き合うべき問題を解決する能力を養うような授業だと思います。これから現場に出た時に、自分の向き合っている課題を見極め、解決出来るような教師になりたいと感じました。