平成 23 年度

数学学習指導設計Ⅱ

関数　一次関数

テーマ「グラフの利用とグラフから読み取れること」

J4 稲垣幸太
木村光
横田真照

目次

1　単元と単元設定の理由

1.1 単元

関数　　第 2 学年の一次関数

1.2　単元設定の理由

　中学校で習う数学の中で、重要な単元だと考えた。なぜなら、関数は小学校でもある程度、表やグラフを用いて学習しており、また中学校の第 1 学年では、比例・反比例の基本的な学習をする。また、第 3 学年では$y = ax^2$について学習し、その後高校でも数多くの関数とふれあう機会が増える。その中で、一次関数はそれらの基本になると考えた。

　また、「時間と道のり」や「数と重さ」など日常生活の中で具体的な事象の中から、伴って変わる 2 つの数量の変化や対応を調べ、事象の中には一次関数を用いてとらえられるものがあることを知ってもらいたい。そして、変化の割合や、グラフの特徴を理解することで、関数関係を表現する方法を習得し、場面に応じて適切な方法を活用していけるような、一次関数に対する理解力を養えるような授業を作っていきたいと考えた。

　そして僕たちは、中学校数学で一次関数がおもしろいと思っていた。だから、生徒たちにも経験させたいと思いこの単元を選んだ。

2　教材研究

2.1　中学校学習指導要領解説　数学編

　第一学年…具体的な事象から関数関係を理解し、比例・反比例を関数としてとらえ直し、それらの関係を表・式・グラフで表し、それらの特徴を理解するとともに、具体的な事象にも関連付ける学習をしている。

　第二学年…具体的な事象を調べることで、一次関数について学習し、関数関係を見出し表現し考察する能力を養う。

　一次関数は、関数をより深く学習する入り口ともなっている。

一次関数では、
①事象と一次関数
②一次関数の表、式、グラフとそれらの相互関係
③二元一次方程式と一次関数
④一次関数を用いて事象をとらえ説明すること

①事象と一次関数
　具体的な事象の中から取り出した、関数関係になる 2 つの数量がどのような一次関数の式またはグラフで表されるかを考察する。

②一次関数の表、式、グラフとそれらの相互関係
　第一学年では、表を基にして数量の比や増加するか減少するかを考えてきた。ここでは、関数の変化の仕方をさらに関係つに捉えるために、対応する変数の値の変化の割合について学習する。
　一次関数　$y=ax+b$　について、変数 x が x_1 から x_2 まで x_2-x_1 変化すると、それに伴って変数 y の値も y_2-y_1 変化するものとする。この時の変化の割合は y_2-y_1/x_2-x_1 で、常に一定であり a に等しい。これが一次関数の特徴で、グラフが直線になることを意味している。さらに、b は $x=0$ に対応する y の値であることはグラフと y 軸との交点の y 座標であることも理解できるようにする。

③二元一次方程式と一次関数
　二元一次方程式 $ax+bx+c=0$ を考える。
　x のとる値を 1 つ決めれば y の値が 1 つ決まることから、x と y の間の関数関係を表す式見ることができる。例えば、

$$x - 2y + 6 = 0$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

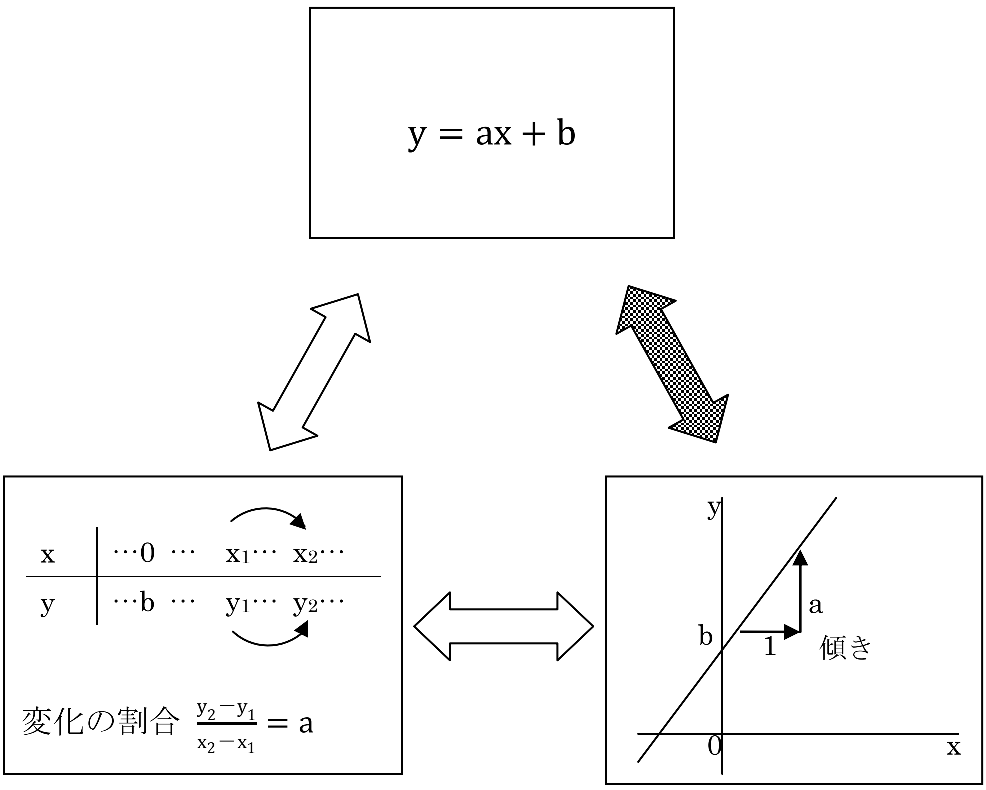
このように変形すると、二元一次方程式が一次関数であることも分かる。

　また、連立二元一次方程式の解とグラフ上の 2 直線の交点の座標であることが視覚的に理解できる。

④一次関数を用いて事象をとらえ説明すること

　何を明らかにするのかという目的意識を持ち、目的に応じて表、式、グラフを適切に選択し説明することが大切である。

　具体的な事象を用いて観察や実験を通して、結果を予測したり、また結果と予測を比較検討し、その食い違いの原因を考え、それを改善するための工夫をしたりすることも出来る。



　表、グラフ、式には、上記の図よりもわかるような関係がある。この中で、式とグラフの関係に目をつけ、式を書くために使われるグラフであるが、式からグラフを描くといったことを多く見るように感じた。

2.2　数学史

座標(グラフ)を利用して代数的な算法によって、図形の性質を研究する幾何学のひとつの分野である解析幾何学の歴史を調べた。

2.2.1　ルネ･デカルト

2 つの実数によって平面上の点の位置(座標)を表すという方法を、ルネ・デカルト(1596~1650)の著書「方法叙説」の中で始めて用いている。「方法叙説」では、幾何学と代数学との相互作用を表している。

デカルトは幾何学の問題を代数学の言葉で言い換えることを求めていた。代数記号を用いない、図で表される幾何学の方は、読んだり理解したりするのが難しいことがある。つまりデカルトの目標は、同じ考えでも使い手にもっと親切な表し方を見つけることだったと考えられる。

解析幾何学で最も重要な技法はグラフを描くということである。幾何学の方法、つまりグラフを描くことを用いて、代数の関数についてその性質を調べられるようになった。ところが、デカルトは「方法叙説」では関数をひとつもグラフにしていない。

2 つの未知数で表される不定方程式(無限に多くの解がある方程式)は全て曲線を表すということ。「曲線を表す」とは、つまり方程式の 1 つ 1 つの解は、それぞれの未知数を表す 2 つの数から成るということをいう。この 2 つの数を平面上の座標を表すと考えられ、その座標の集合の軌跡が二次元空間の曲線をなすということである。

これは、数学者に扱える曲線の語彙を大きく拡張した。ギリシア人は 10 余の曲線しか知らなかった。デカルトの曲線と方程式との間の関係についての見解により、多くの曲線を簡単に生成できた。曲線の式を書いたところで、その曲線の性質についての見通しが得られるわけではない。しかし、デカルトの見解は少なくとも、数学者が研究用に使える曲線を増やす簡単な基準となった。

2.2.2　ピエール･ド･フェルマー

ピエール・ド・フェルマー(1601~1665)の時代には、古代ギリシア語の文献は多く手に入るようになっていた。その中で多くの著作が失われており、それを復元しようという働きがあった。フェルマーはアレクサンドリアのパッポスの著作を読んでいるときにアポロニウスの失われた著作があることに気づいた。アポロニウスが書いたことを再構成しているときに、座標を使って代数学を幾何学にあてはめると、表し方が相当に簡単になることに気づいた。これは、デカルトとは別に行われている。フェルマーは 2 つの未知数から成る不定方程式が、平面上の点を決めることを知った。デカルトと違い、フェルマーは方程式を座標系の上でグラフにした。これは、すぐに特定の型の方程式と、特定の曲線との間に関係がつくことがわかる。

時期的に見れば、フェルマーが解析幾何学の考えに到達したのはデカルトの幾何学より早かった。しかし、幾何学の方が先に広く知れ渡ったため解析幾何学の創設者はデカルトであるといわれている。

2.2.3 関数

関数については、ゴットフリート・ライプニッツ(1646~1716)がはじめて使った言葉で微積分とともに生まれた。「変数 x に伴って変わる量」がライプニッツの関数である。19 世紀に入ると、数学がより厳密な立場を要求されるようになり、式で表せないような関数も考えられるようになった。この時代から「変数 x の値がきまれば、それに対して変数 y の値もきまるとき、y を x の関数という」という定義になった。ここで「値の対応」という形で、関数がとらえられるようになった。

現代数学では、関数の定義を集合の要素の対応として定められている。「2 つの集合 A、B があって、A の要素に対応して、B の要素がただ 1 つきまるとき、その対応の仕方を関数という」この対応を表すのに記号 f を用いて、A の要素 a に対して、対応 f できまる B の要素を $f(a)$ と書く。変数 x、y を用いて表すと $y=f(x)$ となる。

しかし、関数の概念自体はやはり、言葉の生まれたときの「伴って変わる数量」である。

2.2.4 考察

なぜグラフが必要になったかということを、数学史を読み解きながら考えた。どうやらグラフを描くことによって、代数の関数についてその性質を調べられるようになった、と考えられる。そして、曲線のグラフを座標の集合の軌跡と考えることで、多くの曲線の方程式を生成することができるようになったことが印象的だった。

また、デカルトは、グラフは使い手によって親切な表し方だと考え、グラフを描くことに要点を置き、グラフから方程式へ導いているように思える。そして、フェルマーは、方程式からグラフを描き、その特徴を捉えようとしているように思う。

今の中高生が数学の授業で習っているのはフェルマーの方法に近いと考えられる。

2.3　教科書比較

2.3.1 小学校の教科書にあるグラフ

ここでは、グラフという名のつくものを全て調べたため、小 2 から小 6 までの範囲にわたっている。

啓林館　わくわく算数

2 年上　1.ひょう・グラフと　時計

何して遊ぶか人数を数え、表にし、●を使ってグラフにする。

3 年下　15.表とグラフ

わかりやすく整理するための方法を考えさせる。表にする。ぼうグラフを用いて表す。それぞれ、気づいた点などを聞く。グラフのかき方の説明(表題、目もり、単位、調べた物の名前、ぼうをかく)。

4 年上　5.折れ線グラフ

温度の変化を表、グラフを用いて表す。目もりが何を表しているか、どのように変化しているか、気づいた点を聞く。変わり方が大きいほど、線のかたむきが急になる。

4 年下　14.調べ方と整理の仕方

けがをした場所と種類に分けて表に整理して、2 つのことがらを 1 つの表にまとめる。

4 年下　16.変わり方

棒を 18 本使って長方形を作り、たての本数と横の本数の組がわかりやすいように表にする。言葉を用いて式にする(〔たての本数〕+〔　　　　　〕= 9)。これを□、△を用いて□+△=9 と表す。

1 辺が 1cm の正方形をならべて、階段のかたちをつくり、その関係を表にし、□、△を用いて表す。10 段のときの周りの長さを求めさせ、求め方も説明させる。

水槽に水を入れていき、水のかさと全体の重さの関係を表から折れ線グラフに書く。

6 年上　比例と反比例

水を入れていって時間と水の深さ、水の量と全体の重さなどを、表を用いて表し、表から見てわかる変わり方を調べる。一方の値が 2 倍、3 倍、……すると他方も 2 倍、3 倍、･･・…となる。表を縦に見て考えると〔決まった数〕×〔一方の値〕＝〔他方の値〕となり、横に見て考えると〔他方の値〕÷〔一方の値〕＝〔決まった数〕となる。x、y を用いて比例する関係を表す式は y=〔決まった数〕× x となる。この関係のとき、2 つの量は比例しているという。比例の式から x と y の対応する値を表に書き(x の値が 0 のときも書く)、その点を方眼紙に書き、点をつないでグラフを描く。グラフが直線になることがわかり、グラフから x がある値のときの y のとる値を求めさせる。

面積が 12cm² の長方形で、縦の長さを順に変えると横の長さはどうなるかを、表を用いて表し、表から見てわかる変わり方を調べる。表を縦に見て考えると〔一方の値〕×〔他方の値〕＝〔決まった数〕となる。この関係のとき、2 つの量は反比例するという。また、横に見て考えると一方が 2 倍、3 倍、……すると他方は 1/2 倍、1/3 倍、……になる。x、y を用いて反比例する関係を表す式は y=〔決まった数〕÷x となる。反比例の式から x と y の対応する値を表に書き、その点を方眼紙に書く。グラフは直線にならないことがわかり、さらに細かくすることで曲線になることを知る。

比例・反比例の関係を持つことがらを探す。

6年下　14.資料の調べ方

ちらばりがわかりやすい表の表し方や、柱状グラフ(ヒストグラム)を用いて表す方法を学ぶ。

2.3.2 各出版社の単元の流れと問題

(1)啓林館 未来へひろがる数学
3 章 一次関数
　1 節 一次関数とグラフ
　　1 一次関数
　　2 一次関数の値の変化
　　3 一次関数のグラフ
　　4 一次関数の式を求めること
　2 節 一次関数の方程式
　　1 方程式とグラフ
　　2 連立方程式とグラフ
　3 節 一次関数の利用
　　1 一次関数の利用
　3 章の基本のたしかめ
　3 章の章末問題

　具体例
　上空の温度(高さと気温)、水を熱したときの時間と水温、電話料金プラン(時間と値段)、時間と道のり。
　章末問題では、文章問題が出されておらず、式→グラフ、グラフの特徴(傾き、切片、通る点)→式、グラフ→式
　練習問題が 4 回出てきた。
　ふりかえりとして、単元に入ってすぐ比例の関係を復習させている。

「1 節 一次関数とグラフ」というセクションがある啓林館は、グラフに表すことや、グラフから読み取れることなど、グラフとのつながりを大事にしているのだと思ったが、全体を通して、グラフが多いという印象が残ったわけではない。

⑵東京書籍　新しい数学
3 章　一次関数
　1 節 一次関数
　　1 一次関数
　　2 一次関数の値の変化
　　3 一次関数のグラフ
　　4 一次関数を求めること
　　5 一次関数とみなすこと
　　基本の問題
2 節 一次関数と方程式
　　　1 二元一次方程式のグラフ
　　　2 一次関数のグラフの利用
　　　3 連立方程式とグラフ
　　　基本の問題
　　章の問題 A、B
　　生活と数学

　具体例
　水を入れていき時間と水位、線香(蚊取り線香)に火をつけて時間と線香の長さ、ガソリンと進む距離、地上の気温(高さと気温)、保冷バックに入れていた飲み物の温度がどのようになるか(時間と温度)、乗り物の出会い(時間と道のり)。
　正方形の周の長さと 1 辺の長さ、長方形の面積と縦、横の長さ、図形と一次関数(四角形の周を動く点と 2 つの頂点でできる三角形の面積)
　章末問題には、水道料金(時間と値段)、図形と一次関数(台形)。一次関数の関係から各国の靴のサイズ表を作る。

「数学のまど」として、さおばかりを作る。

(3)教育出版　中学数学

3 章 一次関数

　3 章一次関数を学習する前に

　1 一次関数

　　1 一次関数

　　2 一次関数の値の変化とグラフ

　　3 一次関数のグラフのかき方

　　4 一次関数の式の求め方

　　基本のたしかめ

　2 一次関数と方程式

　　1 二元一次方程式のグラフ

　　2 連立方程式とグラフ

　　基本のたしかめ

　3 一次関数の活用

　　1 一次関数の活用

　　基本のたしかめ

　学習のまとめ

　章の問題

　数学の広場

　関数、比例と反比例、グラフの復習ができるようになっている。

　具体例

・水槽に水を入れたときの水かさと入れた時間の関係。

・階段の傾きを直線の傾きの例えとして使っていた。

・吊るされたばねの長さと、おもりの重さ。

・熱された時間と水温の関系。

具体例は、線香(時間と長さ)、水道料金(時間と値段)、重りの重さとばねの伸び、水を熱した時間と水温、地上からの気温(高さと温度)、人との出会い(時間と道のり)、印刷料金(枚数と値段)。

その他印象に残ったこと。

・新幹線のダイアグラムにも関係していることを、コラムとして記載していた。

　・他の教科書に比べて、水かさの例を多用していたように思えた。図形と一次関数(四角形の周を動く点と 2 つの頂点でできる三角形の面積)

　章末問題では、ガソリンと進む距離、時間と道のり、白熱電球と電球系蛍光灯の比較。

　表→式、式→グラフの特徴、グラフの特徴→式、グラフ→式、グラフ→連立方程式の解

(4)学校図書　中学校数学

3 章 一次関数

　1 一次関数

　　1 一次関数

　　2 変化の割合

　　3 一次関数のグラフ

　　4 直線の式の求め方

　　確かめよう

　2 方程式と一次関数

　　1 二元一次方程式のグラフ

　　2 連立方程式の解とグラフ

　　確かめよう

　3 一次関数の活用

　3 章のまとめと問題

　活用しよう

具体例

・槽に水を入れたときの、水かさと入れた時間の関係。

・吊るされたばねの長さと取り付けられたおもりの重さの関係。

・容器に入れた水を熱し、その時間と温度の関係。

・ある 2 人が、1 人は徒歩、もう 1 人は自転車である距離を移動する。
　この時の、時間と距離をグラフ上に 2 直線のグラフとして示していた。

・直線の式をグラフに描き入れて、どんな絵が現れるかを見る。

(5)大日本書籍　数学の世界

3 章 一次関数

　1 節 一次関数

　　1 関数

　　2 一次関数

　　3 一次関数の値の変化のようす

　　4 変化の割合

　　5 一次関数のグラフ(1)

　　6 一次関数のグラフ(2)

　　7 一次関数のグラフのかき方

　　8 一次関数の式の求め方

　　9 一次関数の表・式・グラフ

　　練習

　2 節 方程式とグラフ

　　1 二元一次方程式のグラフ

　　2 方程式のグラフのかき方

　　3 グラフと連立方程式

　3 節 一次関数の利用

　　1 一次関数とグラフ

　　2 一次関数と実験

　　3 一次関数と図形

　3 章の問題

　いろいろな問題

　3 章の答え

　具体例

・水槽に水を入れたときの、水かさと入れた時間の関係

・階段の傾きを直線の傾きの例えとして使っていた。

・水を熱した時の、時間と水温の関係。

印象に残ったこと

・点が四角形の円状を移動して出来る三角形の面積を一次関数に置き換える問題。

　図形と一次関数(二等辺三角形の周の長さと残りの辺)、三角形の周を動く点と 2 つの頂点でできる三角形の面積、四角形の周を動く点と 2 つの頂点でできる三角形の面積

　章末問題では、図形(台形)、マッチを並べてできる関数。

「一次関数」というセクションの前に「関数」というセクションを置いて、長方形から比例、反比例の関係を考えさせ、その後に一次関数の関係もあることを示している。

(6)日本文教出版　中学数学

3 章　一次関数

1 一次関数

1 一次関数

2 変化の割合

3 一次関数のグラフ

4 一次関数のグラフの特徴

5 一次関数を表す式とグラフ

6 一次関数の求め方

基本の問題

2 一次方程式と一次関数

1 二元一次方程式のグラフ

2 連立方程式の解とグラフ

基本の問題

3 一次関数の活用

1 一次関数の考え方の活用

2 表、式、グラフの活用

3 身近な数量の関係を表すグラフ

(4 電話料金を調べよう)

3 章のくり返し練習

3 章のたしかめ(A、B 問題)

とりくんでみよう

具体例

・水槽に水を入れ始めてからの時間と増えた水位の関係

・ｘ分歩くとき、道のりをｙとした時の一次関数

・傾きを高さと水平距離で表している。高さ/水平距離

(7)数研出版　中学校数学

第 3 章 一次関数

1 一次関数

1 一次関数

2 一次関数の値の変化

3 一次関数のグラフ

4 一次関数の式の求め方

確かめよう

2 一次関数と方程式

1 二元一次方程式のグラフ

2 連立方程式とグラフ

確かめよう、考えよう

3 一次関数の利用

1 一次関数の利用

確かめよう、考えよう

基本問題

第 3 章の問題 A、B

調べよう

取り上げられている身近な事象としての例題、問題は、線香(時間と長さ)、すいそうに水を入れる、抜く(時間と水位)、地上からの高さと気温、時間と道のり(人、電車、かたつむり)、料金プラン(時間と値段)。

図形と一次関数、四角形の周を動く点と 2 つの頂点でできる三角形の面積

2.3.3　考察

【小学校の教科書】

　小学校の教科書は、中学と比較すると、具体例を上げていたり、絵を使って説明されている場面が多々見られた。これは、子供にとってわかりやすいというのはもちろん、表やグラフというものを初めて扱うにあたって、なぜこの単元を勉強するのか、勉強して何になるのか、ということが少しでもわかる助けにもなっているのではないかと感じた。また、

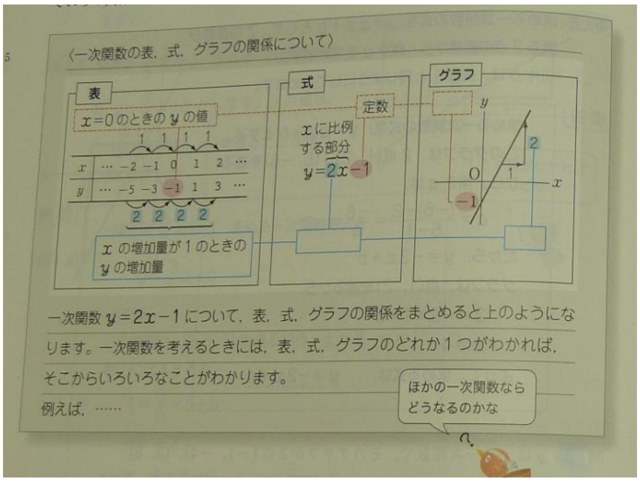
【導入】

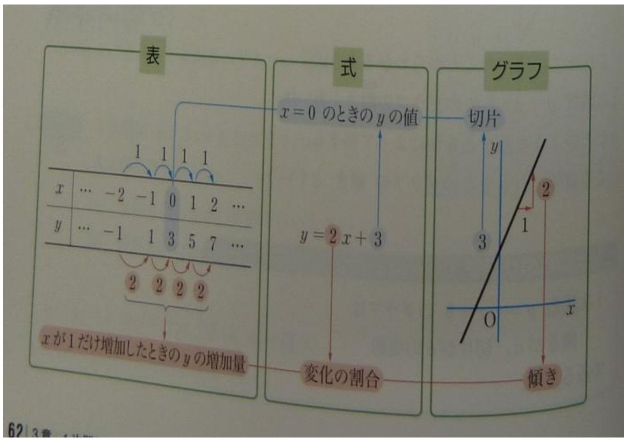
　すいそうに水を入れ、時間と水位の関係が一次関数であることを示すことから始める教科書は、啓林館、教育出版、学校図書、大日本書籍、日本文教出版、数研出版があった。これは、最初から水が入っていない場合と、入っている場合を考えることができ、入っていない場合は、比例の関係であることを知ることで、一次関数の単元に入りやすくしていることと、比例は一次関数の特別な形であることを知ることができる。

　東京書籍はやかんを熱して、時間と水の温度の関係が一次関数であることを示すことから始めていた。

【表と式とグラフの相互関係】

　全ての教科書において、下の写真(左：啓林館、右：東京書籍)のように、表、式、グラフの関係をまとめている。同じ値を持つものを色で分けて、関係をさらに分かりやすくしている。





学校図書	大日本書籍	日本文教出版	数研出版
変化の割合	xが1ずつ増加するときのyの増加量	変化の割合	変化の割合
x＝□のときのyの値	x＝0のときのyの値	x＝0のときのyの値	x＝0のときのyの値
xの□	変化の割合	xの係数	xの係数
定数の部分	x＝0のときのyの値	定数項	定数項
傾き	傾き	傾き	傾き
□	切片	切片	切片

		啓林館	東京書籍	教育出版
表	a	xの増加量が1のときのyの増加量	xが1だけ増加したときのyの増加量	変化の割合
	b	x=0のときのyの値	x=0のときのyの値	x＝0のときのyの値
式	a	□	変化の割合	xの□
	b	定数	x=0のときのyの値	定数の部分
グラフ	a	□	傾き	□
	b	□	切片	y軸上の切片

また、図の中に入れる言葉が異なっていたので、図にしてまとめてみた。

図の中の a、b の意味は、y=ax+b のときの定数 a、b である。表、式、グラフの中で、定数 a、b は何と定義されているかを示した。□は空欄のことである。

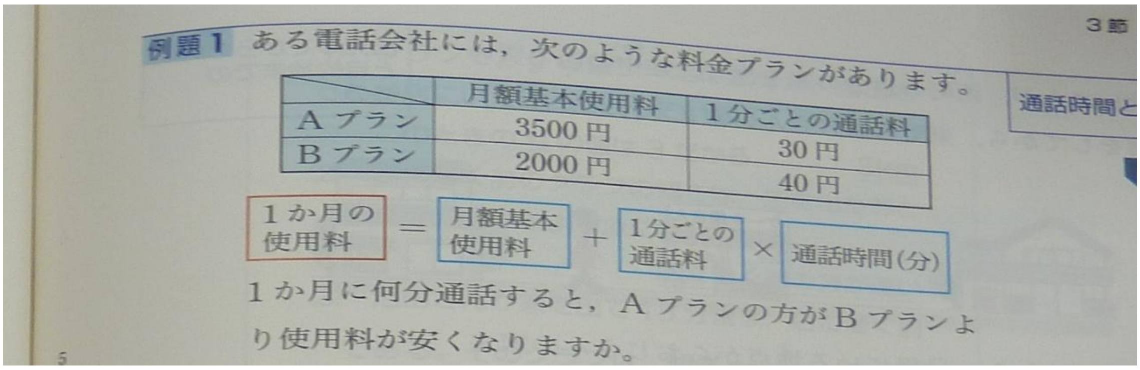
図から、a、b の値の意味としては間違ってはいないと思われる。しかし、式から読み取れる a の値の意味は、係数であるということではないだろうか。それが、表から読み取れる変化の割合と一致するということが授業を通してわかるのではないかと思う。

写真のような図は、学習指導要領にも書いてあり、全ての教科書に載っているところから考えても重要なところであることには違いない。

【グラフの利用】

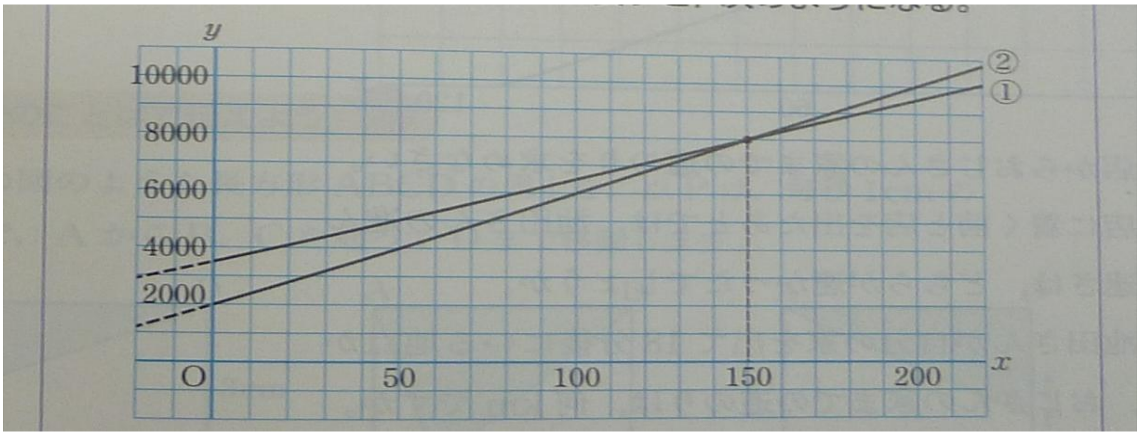
グラフの利用に関する具体例を 2 つ挙げた。

1 つ目はまず、与えられた表から連立方程式に持ち込みグラフに示し、2 直線の関係をグラフから読み取るような問題である。



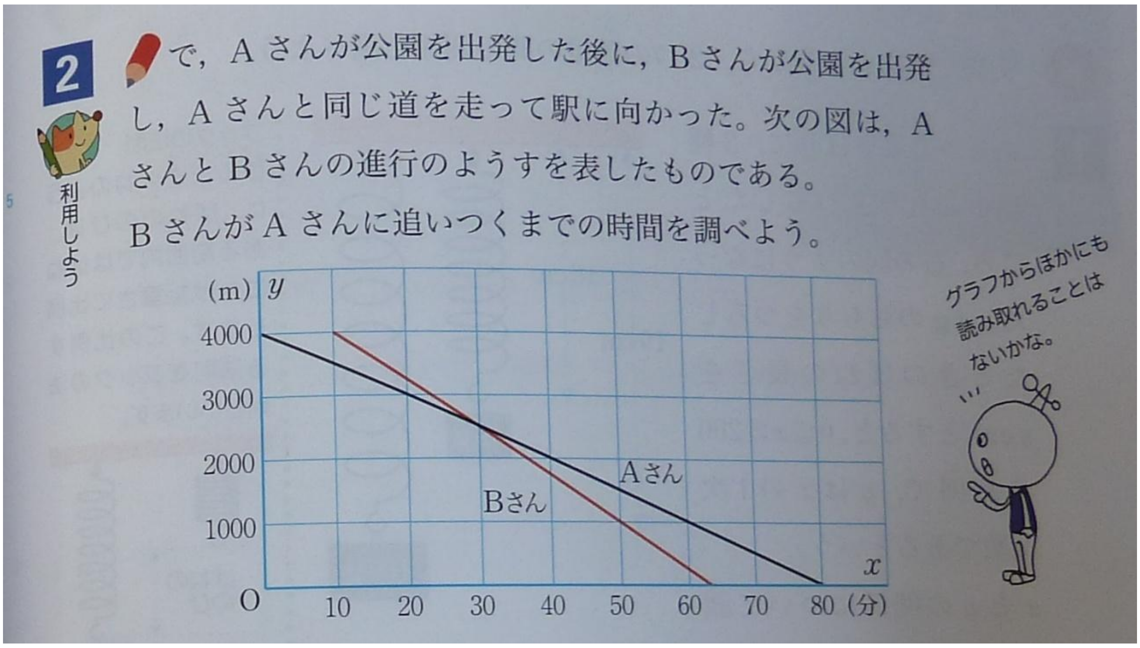
この問題は 2 つのプランのうち何分以上話すと特になるか、ということを求める。
実際、答えを求めるだけならば、連立をとけばよい。

しかし、ここではグラフを示して解答している。(グラフは以下に示す。)



これは 2 つのプランを一目で比べやすい。表や式だけで見ると、どういう場合によってどちらのプランが良いのか、ということが分かりにくかったが、グラフに示すことで視覚的に確認でき、かなり分かりやすくなっていると思われる。

2 つ目の問題では、与えられたグラフから、2 直線の式を求めるといった問題である。
注目したのは、はじめからグラフを与えられている、ということである。



ここに示されたグラフにより、ある 2 人の位置や時間の関係が視覚的に読み取ることが出来る。

そして、この教科書では右に示されたキャラクターが言っているようにグラフから、さらに何か読み取ることが出来るのではないか、ということを生徒自身に考えさせることで、自分で模索する力をつけることも考えているのではないかと思われる。

式からグラフを求める問題の方が、グラフから式を求める問題よりも比較的多いと思っていたが、実際 2 点が分かっている直線や傾きと 1 点が分かっている直線の式を求める問題などのグラフの条件から求める問題がグラフから式を求める問題に含まれるので、両問題がバランスよく掲載されているのではないかと思われる。

しかし、グラフに慣れるためにまず式からグラフを求める問題は、かなり詳しく記載されているようである。前回疑問視されていた、なぜ教科書にざっと目を通したとき式からグラフへの転換の方が重要視されているように感じるのかということはそういう理由からかと思われる。

3　単元のテーマと指導計画

3.1　テーマと設定理由

・テーマ
　グラフの利用とグラフから読み取れること

・テーマの設定理由
　僕たちの班は、この講義の初めからグラフについて考えてきた。教材研究を通して、表とグラフと式の相互関係やグラフの利用について調べた。そして、グラフをどのように利用するのか、何が分かるのかを生徒に考えさせることが大切で、生徒の一次関数の理解力を確認するのにも役立つと考えた。
　また、一次関数の中でグラフを描いたり、そこから考えることが楽しかった、おもしろかった経験が僕たちにあった。そういった経験を生徒たちにもさせたいと思いました。

3.2　指導計画

第 2 学年

3 章　一次関数	19 時間
1．一次関数とグラフ	
1．一次関数の導入	2 時間
2．一次関数の値の変化	1 時間
3．一次関数のグラフ	4 時間
4．一次関数の式を求めること	3 時間
2．一次関数と方程式	
1．方程式とグラフ	2 時間
2．連立方程式とグラフ	1 時間
3．一次関数の利用	4 時間
基本の確かめ、章末問題	2 時間

「3.一次関数の利用」で指導時数を 4 時間とった。この 4 時間では、日常生活の具体的な事象の中から一次関数を見いだし問題を解決する授業を考えている。連立二元一次方程式を利用したり、グラフを利用して解決するような問題を考えられるが、その中でもグラフに要点を持つような問題を考えた。

・学習内容

事象の中から一次関数を見いだし、一次関数を用いて問題を解決する。その中で、グラフを用いて問題を考える。

・目標

一次関数のグラフを利用して問題を解決することができる。グラフのよさを理解する。

・中心となる考え

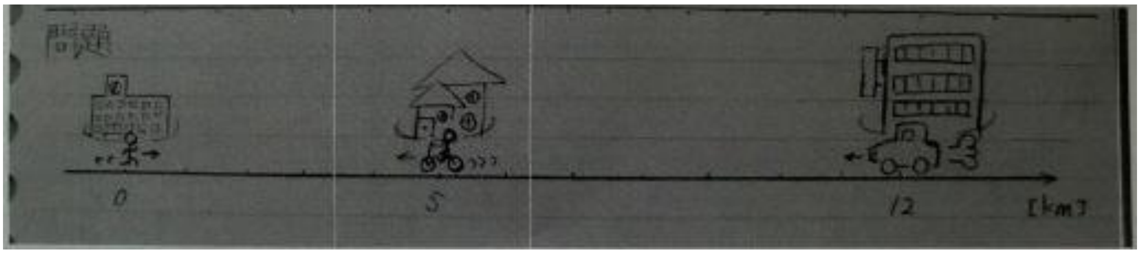
グラフを利用し、そしてそのグラフから情報を読み取ることができたり、グラフで表現することができる。

3.3　指導案作成の過程

1回目

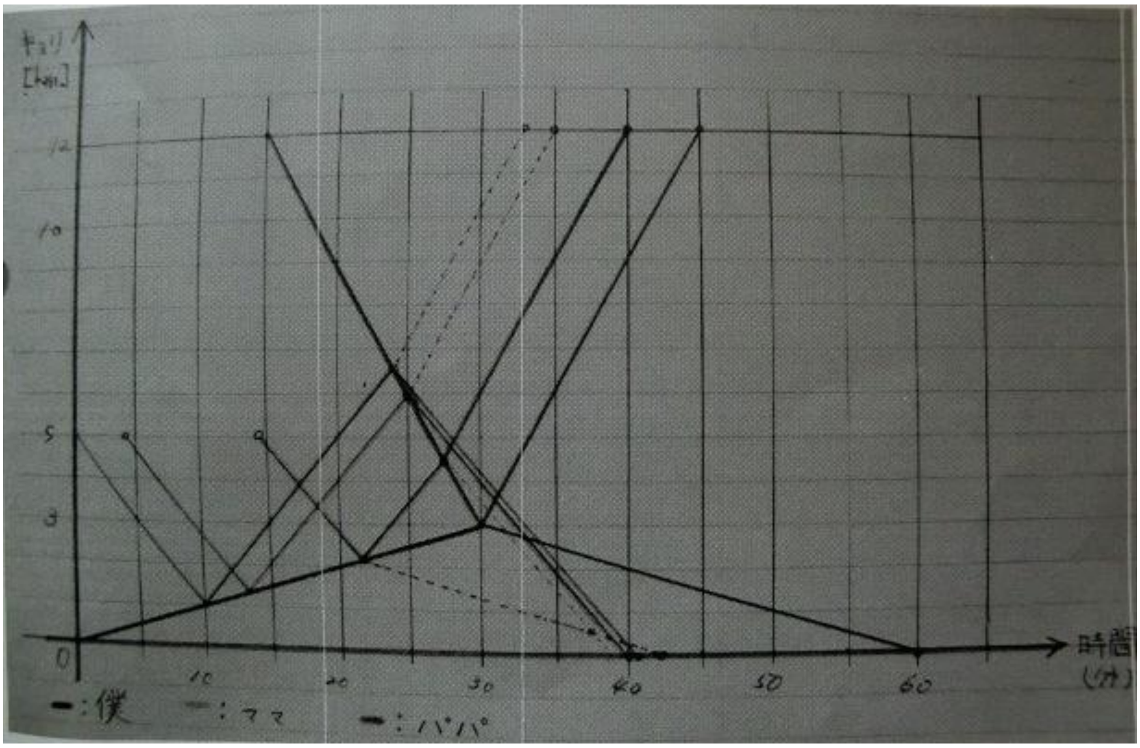
出発してから出会うまでの時間、そして折り返して元の場所に帰ってくる時間

　僕の宿題とパパの会社の書類が入れ替わっていました。僕は時速6 km で、8時に出発、パパは車で時速 36km で8時 15 分に出発します。学校と会社の距離は、12km です。（数値直線で示す）



問1．僕とパパが出会い、僕の宿題とパパの書類が入れ替わるのは何分でしょう。また、僕が学校に、パパが会社にそれぞれ何分に帰ることができるでしょうか。

問2．パパは8時 40 分までに会社に、僕は8時 40 分までに学校に帰らなければいけません。
学校から会社方向に 5km の場所に家があり、ママが自転車で時速2 km で移動できます。
何時何分に出れば間に合うでしょう。



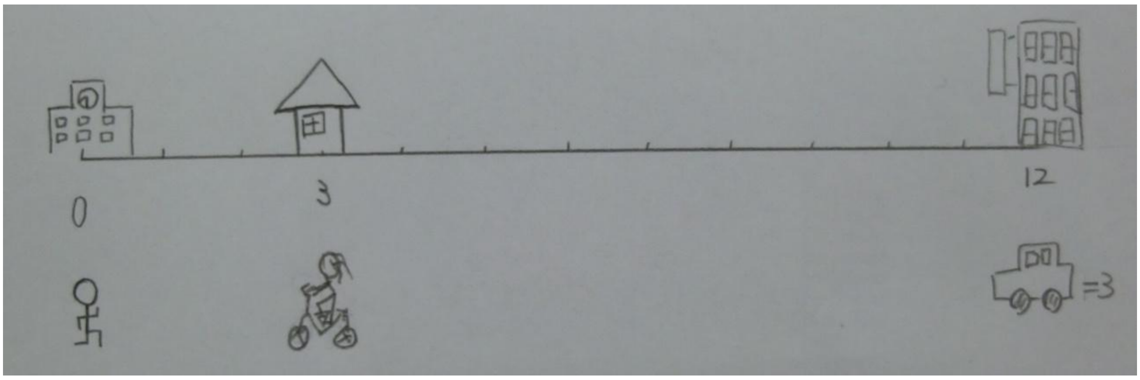
問１
A. 文章を単純な一次関数のグラフに示し、交点を求めることで求めたい値を得ることができる。
B. 交点から進む向きが変化したことにより傾きが変わる。交点から直線のグラフを y＝３を軸にして折り返したグラフになる。

問２
C. より多くの条件が入ることによってグラフが複雑化するとともに、グラフ上に用途に合わせた直線を書き加えることができることを示している。

問題のネタは良かった。しかし、問題が細切れになっていて、僕たちが考えていた生徒の期待する活動は、期待する活動として成り立っていない。
グラフを描くにあたって、グラフに必要なこと、グラフから読み取れることを考える。

2 回目

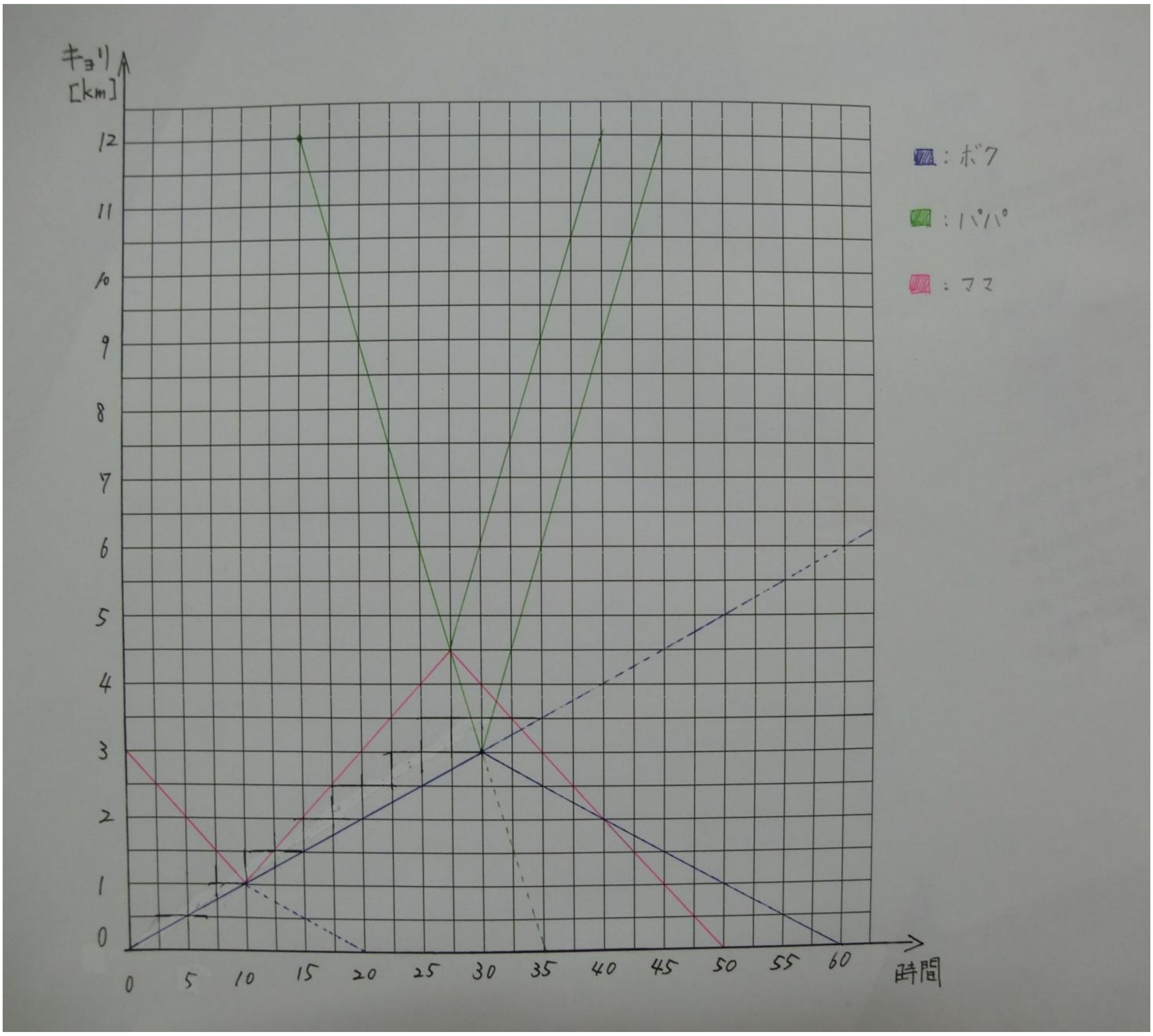
問題
絵を見て、子どもたちにどういう状況なのか考えて、問題を一緒に作る。
僕の宿題とパパの会社の書類が入れ替わっていた。
僕は間違いに気づき、ママに連絡してから 8 時 15 分に学校を出た。ママも同時刻に家を出たものとする。パパも間違いに気づき 8 時 30 分に会社を出た。



僕とママが合流する時間とパパとママが合流する時間を調べよ。
資料が会社に届く時間と宿題が学校に届く時間を調べよ。

期待する活動
A. ママの行動を考えずに僕とパパが直接合流して、交換した後にそれぞれ学校と会社に戻る時間を求める。
B. ママの行動を考えると、より早く僕とパパがそれぞれ学校と会社に戻れる時間を求められる。

C. グラフを式に戻すことができるか？



問題提示はしっかりする。位置関係や速度を載せる。

ぼくは学校に何時までに戻ればいい？
パパは会社に何時までに戻ればいい？

こういう条件があればどうだろう。

グラフは子供によって、異なる。

まだまだ、期待する活動は成り立っていない。

3回目

問題

僕の宿題とパパの会社の書類が入れ換わっていました。

僕は8時に、パパは8時15分に宿題と書類が入れ換わっているのに気がつきました。

僕の学校とパパの会社とは、12km の距離があります。また、学校から会社方向 5km の場所に家があり、ママは家にいます。

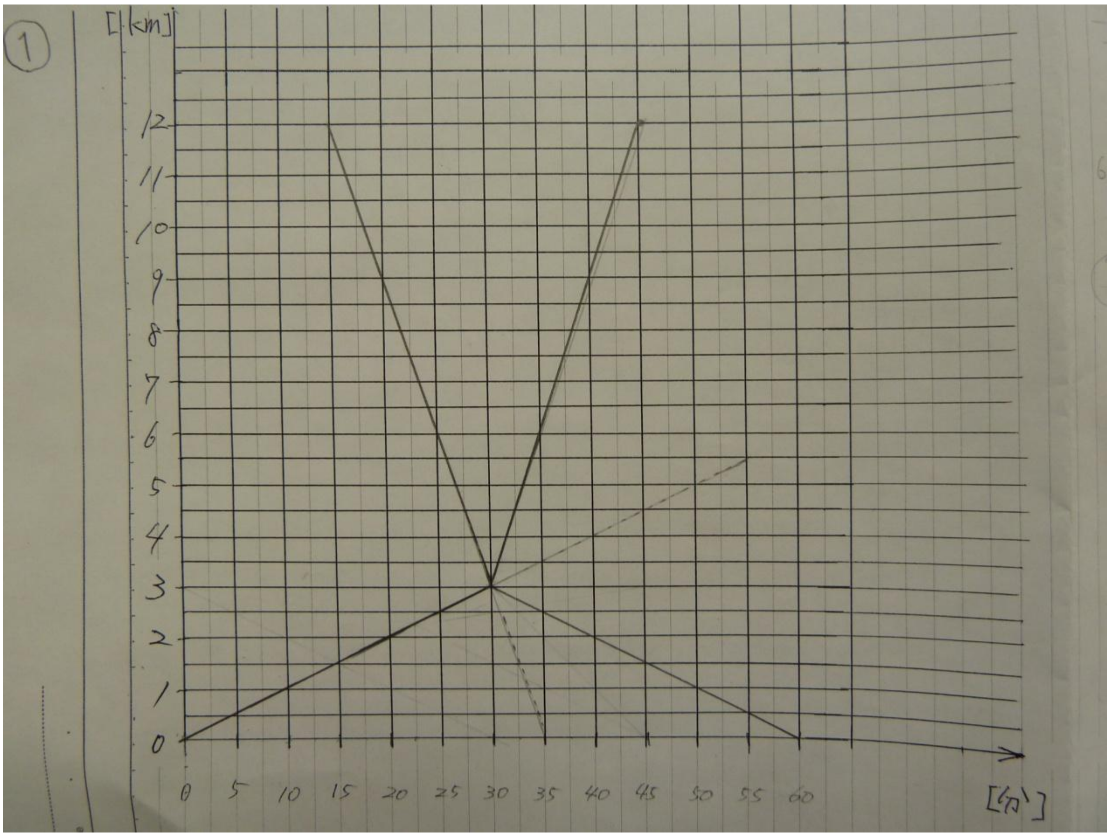
パパは車で時速 36km、僕は走って時速 6km で移動します。

僕は8時45分には学校にいなくてはいけなくて、宿題を提出しなければいけません。また、パパは8時50分までに書類を持って会社にいなければなりません。

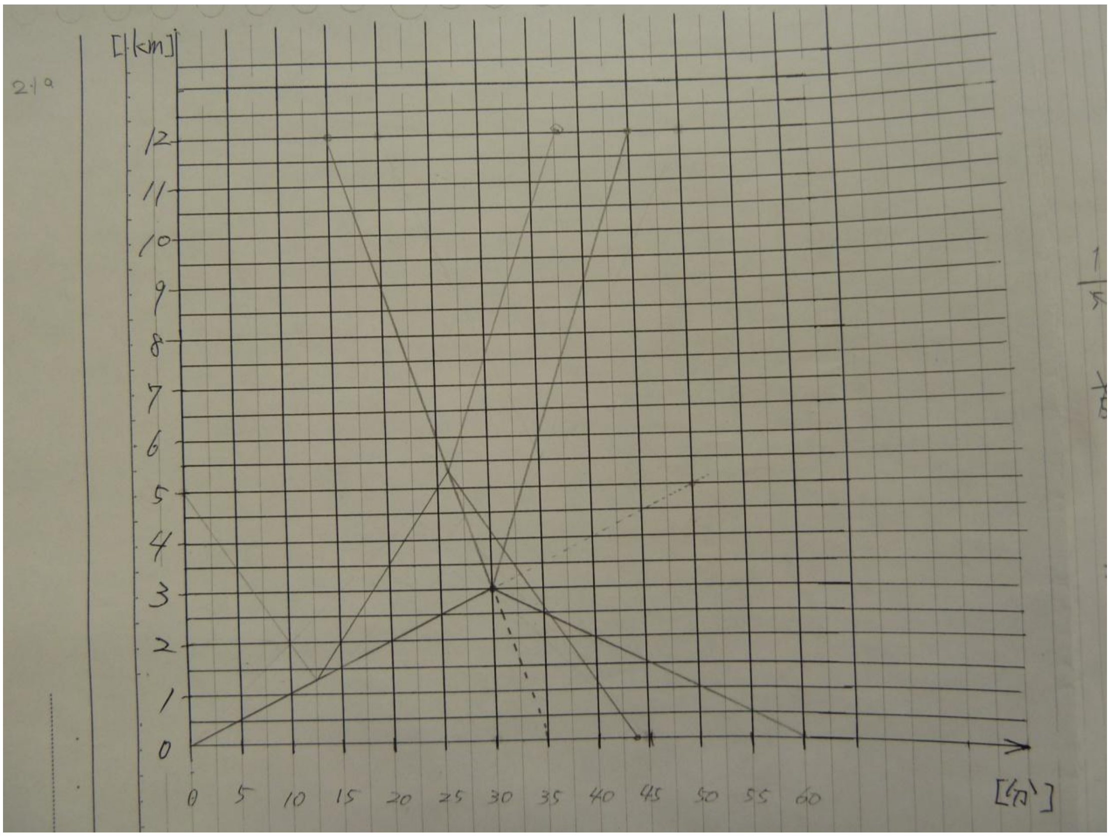
条件に合うようにするには、どんな方法で移動すればいいだろうか。(信号待ち等は無視できるものとする。)

1. 僕の移動とパパの移動に関するグラフが描ける。

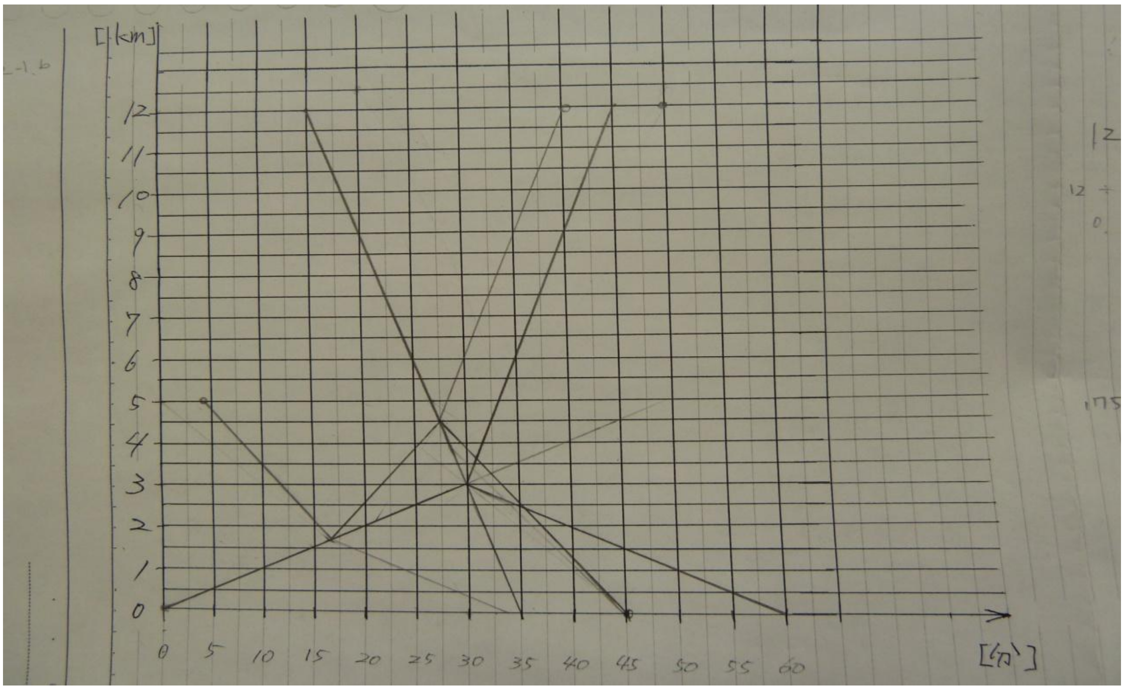
このときに、僕が条件に合わず、学校に間に合わないと気づく。



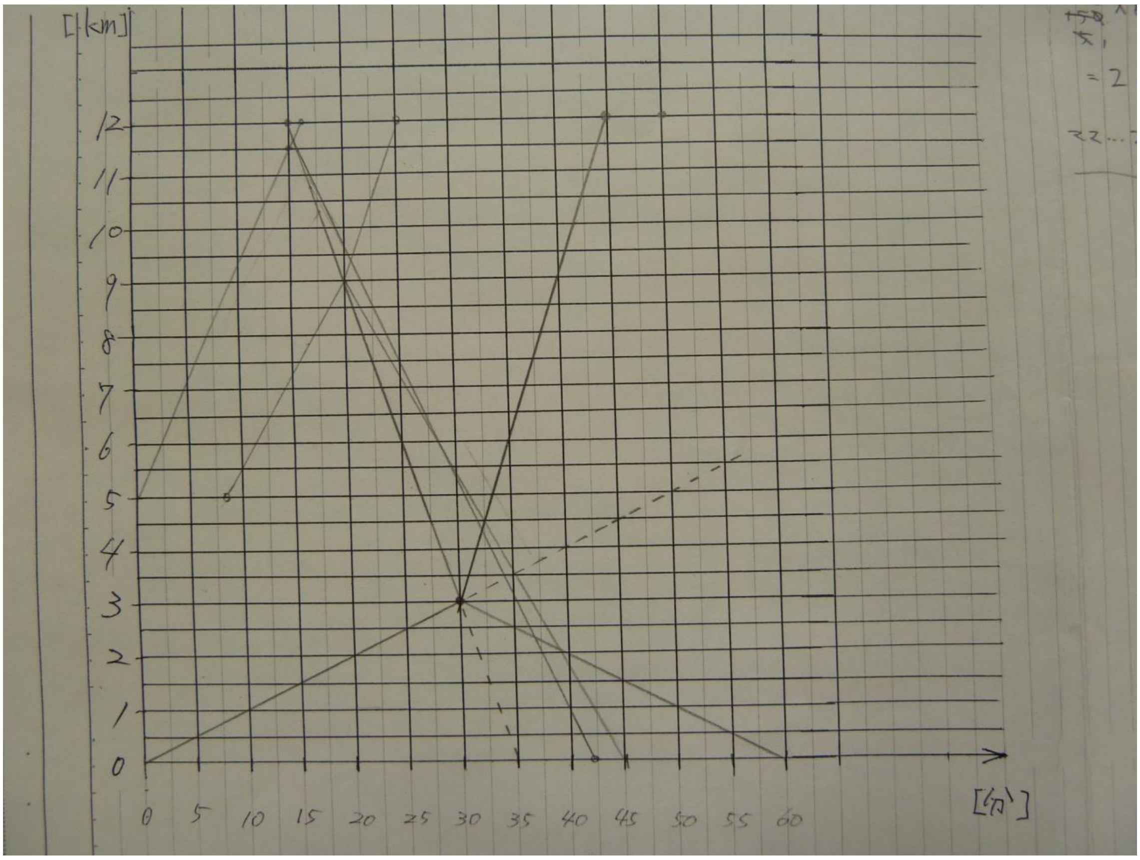
2. 1で描けたグラフを用いて、ママが8時に出発して、時間に間に合うように考える。もしくは、時間に間に合うようにグラフを描き始め、ママが何時に出発するのかを考える。



2-1．ママが学校に向かって、その後会社に向かう。

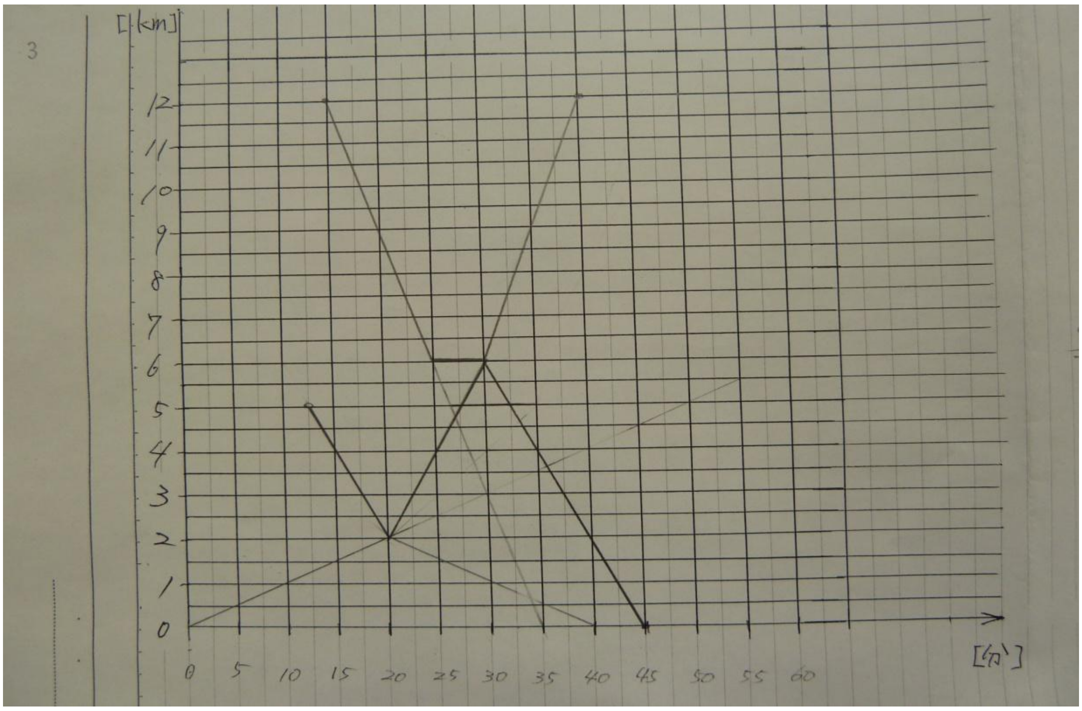


2-2．ママが会社に向かって、その後学校に向かう。条件に適しないことに気づいて、2-1 の方で考える。

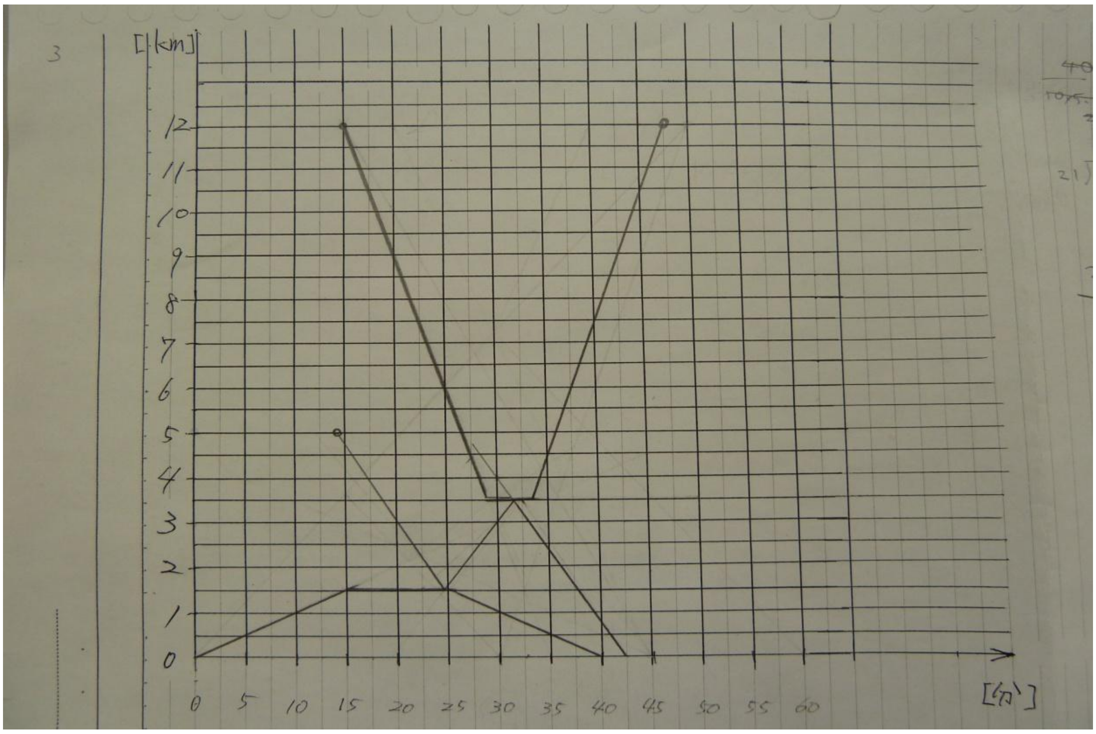


3. 移動だけではなく、その場で待っていることを考える。

(a)パパがその場で待つ時間帯がある場合



(b)僕とパパの両方とも、その場で待つ時間帯がある場合



前回の指摘を受け、条件を与えて生徒によって異なるグラフを描かせるようにした。
どのような考え方できるのか、いくつかの案を載せた。
これは指導案ではなく、教材研究。
問題把握をどこまでするのか、させるのか。
生徒にグラフを描かせたいと思わせるような問題にする。
期待する活動や支援を考える。

4 回目

問題

僕の宿題とパパの会社の書類が入れ換わっていました。

僕は 8 時に学校で、パパは 8 時 15 分に会社で、宿題と書類が入れ換わっているのに気がつきました。

僕の学校とパパの会社とは、12km の距離があります。また、学校から会社方向 5km の場所に家があり、ママは家にいます。

パパは車で時速 36km、僕は走って時速 6km で移動します。

僕は 8 時 45 分には学校にいなくてはいけなくて、宿題を提出しなければいけません。また、パパは 8 時 50 分までに書類を持って会社にいなければなりません。

条件に合うようにするには、どんな方法で移動すればいいだろうか。(信号待ち等は無視できるものとする。)

現段階でわかっていることを生徒と一緒に整理する。絵や数直線を使うなどして、学校、会社、家の位置関係を把握して、僕やパパがどの方向に向かって移動するのか矢印などで表す。

支援 A(一般)：一次関数を表すのに使った方法は、何があったかを思い出してみよう。
支援 A(特殊)：ママを考えずに、僕とパパだけの関係を一次関数で表してみよう。

支援 A－1(特殊)：表に必要な事項は何か。
1 分経つごとに何 km 進むのか。

〇活動 A－1

《表》

時間(分)	0	1	・・・	15	16	・・・	30	・・・	45	・・・	50	・・・	60
僕のいる地点(km)	0	0.1		1.5	1.6		3		1.5		1		0
パパのいる地点(km)	12	12		12	11.2		3		12		12		12

僕とパパは、30 分、学校から 3km の場所で会って宿題と書類を交換し、パパは 8 時 45 分に会社に着き、僕は 60 分(9 時)に学校に着く。

支援 A－2(特殊)：比例定数 a に値する数値は何か。(速度)
定数項 b に値する数値は何か。(出発する場所の学校からの道のり)
連立方程式の解は何か。(2 人が会ったとき)
2 人が会ってから、比例定数の符号はどうなるのか。(反対)

〇活動 A－2

《式》

時間を x(分)、道のりを y(km)として式を書いくと、

僕　：y=0.1x

パパ：y=－0.6x+12

となり、連立方程式の解は 2 人が会ったときであるから、120/7 分後、12/7km の場所である。この後は符号が逆になるから、

僕　：y=－0.1x+12/7

パパ：y=0.6x+12/7

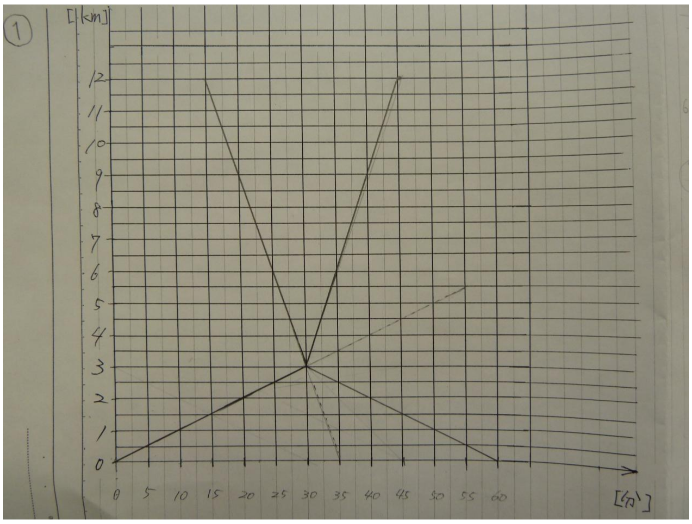
と書ける。よって、2 人が会ってから、僕は 120/7 分後に学校に着き、パパは 120/7 分後に会社に着く。

支援 A－2(一般)：僕とパパとで時間 15 分の差があるから、パパの式は、上の式ではない。
つまり、ここで出た時間などは問題と一致しない。
他に、一次関数を表す方法はないか。

支援 A－3(特殊)：何を軸にとるか。(道のりと時間)
グラフの傾きは何か。(速度)
通る点は条件からどの点になるか。
グラフ用紙がほしい生徒には配布する。

○活動 A－3

《グラフ》



僕とパパは 8 時 30 分に、3km の場所で会い、パパは 8 時 45 分に会社に着き、僕は 9 時に学校に着く。

支援 B，C(一般)：このままでは、僕は学校に遅刻してしまう。問題文を読んで、どうにかして僕が時間に間に合うようにしよう。(ママが家にいること、ママをどのように移動させますか。)

支援 B(特殊)：ママの速度が決まってないから、なかなか先に進めないときは、ママの速度を時速 18km として考えてみよう。

○活動 B－1

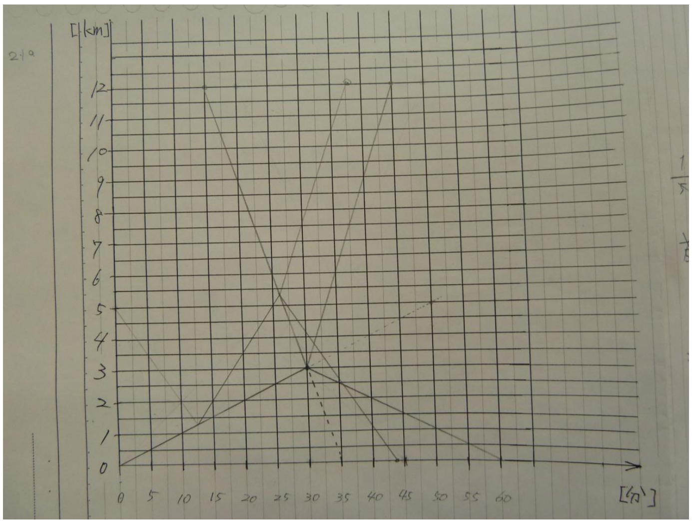
《表》

時間(分)	0	1	・	12	13	・	15	16	・	・	45	・	50
僕のいる地点(km)	0	0.1		1.2	1.3						0		0
ママのいる地点(km)	5	4.7		1.4	1.1						0		
パパのいる地点(km)	12	12		12	12		12	11.7					12

支援 B(一般)：細かい数字を考えると、表では表しきれない。他の方法を考えてみようい
つ、どこで会ったのかは聞かれていない。僕、パパが時間に間に合えばい
いのだから、それが分かるほかの方法を考えよう。

支援 B－2(特殊)：ママはどちらの方向に向かったのだろうか。

○活動 B－2



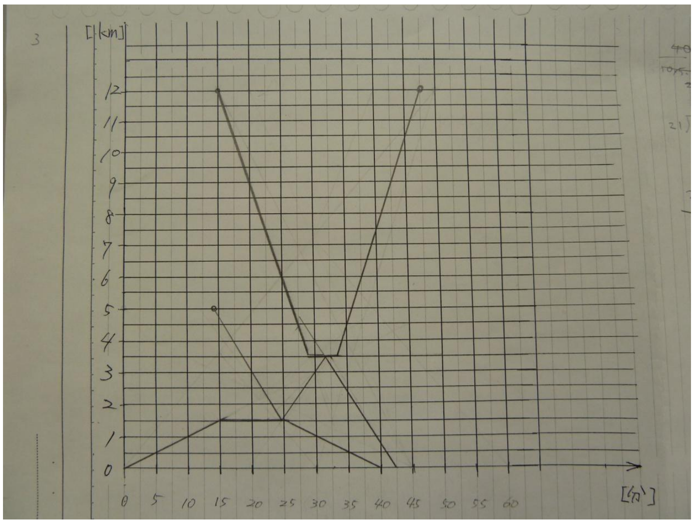
《グラフ》

初め、ママは学校方向に向かい僕に会って宿題を受け取り、会社方向に向かいパパに会って宿題と書類を交換し、学校方向に向かって宿題を学校で僕に渡す。

支援 C(一般)：ママの移動時間、移動距離ができるだけ短くなるように考えてみよう。
支援 C(特殊)：ずっと移動していないといけないのかな。
移動していないとは、どのように表したらいいのかな。

○活動 C

《グラフ》



移動しなくて、一定距離で待っていることをグラフ上で表す。それは、時間軸に平行なグラフになる。

グラフで描かれたママの直線の傾きから速度を求めることができる。

正解は生徒の考えでそれぞれ違う。遅刻ぎりぎりに到着するようにする生徒や、時間に余裕があるように5分前には到着しているようにする生徒など、様々だと考えられる。

その考えをクラスに発表する。僕やパパが待っている状況を表したグラフも生徒たちから発表させる。

一次関数を表す方法は表、式、グラフがある。しかし、今回の問題のように複雑な数量の関係でも、グラフを用いることで条件に合うように問題を解くことができる。

問題把握のシーン、黒板を使うならそのことを書く。

前回より支援を考えてみたが、活動A,B,Cの支援ではなく、全体を通した支援ではないと、生徒の活動は細切れになってしまう。

練り上げを考える。

3.4　指導案

○問題

　僕の宿題とパパの会社の書類が入れ換わっていました。

　僕は 8 時に学校で、パパは 8 時 15 分に会社で、宿題と書類が入れ換わっているのに気がつきました。

　僕の学校とパパの会社とは、12km の距離があります。また、学校から会社方向 5km の場所に家があり、ママは家にいます。

　パパは車で時速 36km、僕は走って時速 6km で移動します。

僕は 8 時 45 分には学校にいなくてはいけなくて、宿題を提出しなければいけません。

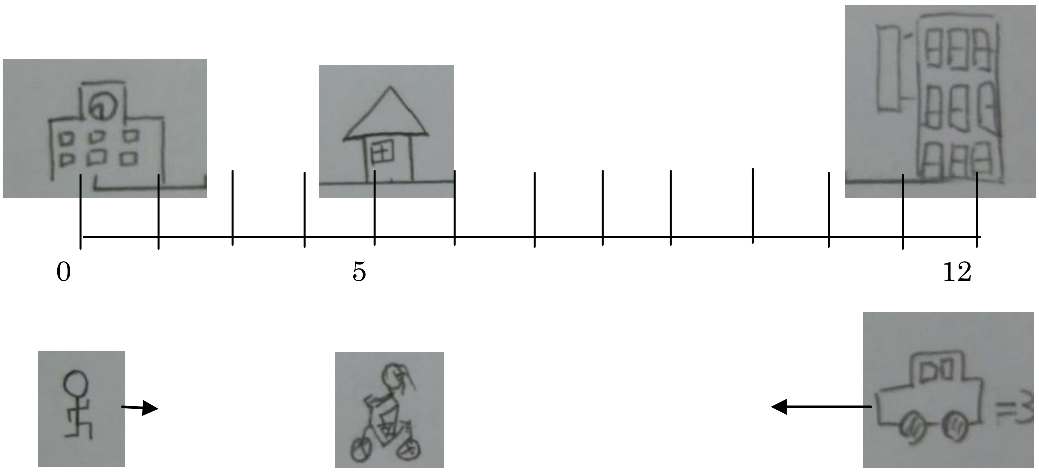
また、パパは 8 時 50 分までに書類を持って会社にいなければなりません。

条件に合うようにするには、どんな方法で移動すればいいだろうか。(信号待ち等は無視できるものとする。)

　わかっている事柄を一緒に整理する。

　(学校と会社、家の位置関係、僕、パパがどの方向に進んでいるのか、絵や矢印を使って黒板に描き、状況を生徒に把握させる。)

〈黒板〉



　では、どのように移動したらいいだろうか。

より特殊な支援

・一次関数を表す方法には何があったか。

○活動 A-1

僕、パパ、ママのそれぞれの道のりと時間の関係を表にする。

時間(分)	0	1	2	…	15	16	…	30	…
僕いる所(km)	0	0.1	0.2	…	1.5	1.6	…	3	…
パパのいる所(km)	12	12	12	…	12	11.4	…	3	…
ママのいる所 (km)	5	a+5	2a+5	…	15a+5	16a+5	…	30a+5	

ママの欄は、未知数(ここでは a)として表を埋めた。

どこで会うことができたのかわかる。

より特殊な支援

・いろんな表現の仕方を考えてみよう。

○活動 A-2

僕、パパ、ママのそれぞれの道のりと時間を式にする。

僕　：y＝0.6x

パパ：y＝－0.6x+21　　(x≧15)

ママ：y=ax+5

パパの式は、傾きと通る点から導き出すことができる。

連立方程式の解が、2 人が出会った場所、時間である。

僕とママは、8 時 5/(0.1－a)分、0.5/(0.1－a)km の所で出会う。

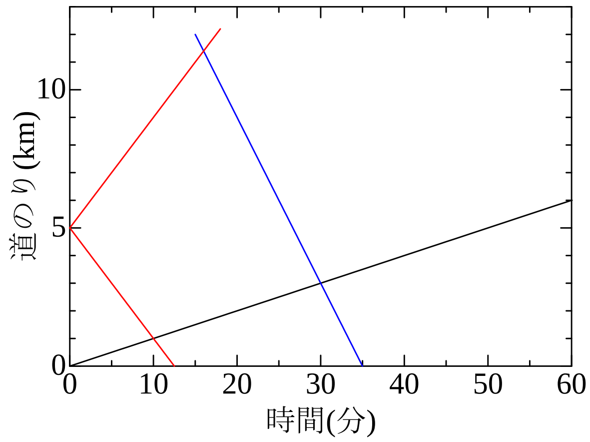
僕とパパは、8 時 30 分、3km の場所の所で出会う。

パパとママは、21/(0.6+a)分、12.1/(0.6+a)km の場所の所で出会う。

どこで会うことができたのかわかる。

より特殊な支援
・グラフ用紙がほしい生徒には配布する。

○活動 A-3
　僕、パパ、ママのそれぞれの道のりと時間の関係をグラフにする。



僕　：黒
パパ：青
ママ：赤
　ママの傾きはグラフでは 0.4、-0.4 の場合を考えたが、生徒によって異なり、ママのグラフの数は何本でもかまわない。
　2 人が出会った場所は、2 直線の交点であるから、グラフよりわかる。

より一般的な支援
・出会ってから、どう移動するか。
・条件に合うか。
より特殊な支援
・移動が変われば、何が変化するだろうか。

○活動 B-1
　出会った後の行動を表で表す。

時間(分)	0	1	2	…	15	16	…	30	31	…	45	…	60
僕 い る 所 (km)	0	0.1	0.2	…	1.5	1.6	…	3	2.9	…	1.5	…	0
パパのいる所(km)	12	12	12	…	12	11.4	…	3	3.6	…	12	…	12
ママのいる所 (km)	5	a+5	2a +5	…	15a +5	16a+5	…	30a +5	31a +5	…	45a +5	…	60a +5

(条件に合うように考えるには、表では複雑すぎて書き表せない。特にママの)

より特殊な支援
・一目で、どのように移動したかがわかる方法はないだろうか。

○活動 B-2

出会った後の行動を式で表す。

比例定数の符号は逆向きになる。定数項が変わる(傾きと直線の通る点より求められる。)

僕　：y=－0.1x+0.1/(0.1－a)
ママ：y＝－ax＋5(0.1)/(0.1-a)
僕とママが会った後

僕　：y=－0.1x＋6
パパ：y＝0.6x－15
僕とパパが会った後

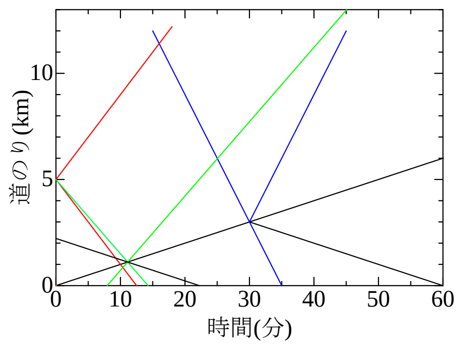
ママ：y=ax+(12.1－12a)/(0.6+a)
パパ：y=0.6x－0.5/(0.6+a)
ママとパパが会った後

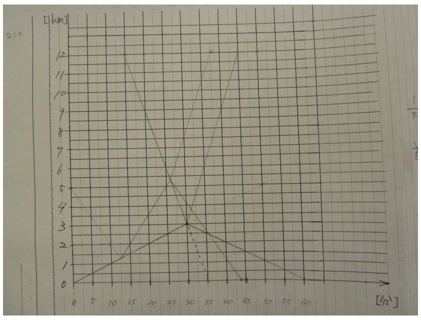
上の式は、僕、パパ、ママが移動し始めて、最初に出会った 2 人の出会った後の行動を表す式である。

(条件に合うようにするには、式では複雑であるから、書くには困難である。)

○活動 B-3

出会った後の行動をグラフにして表す。



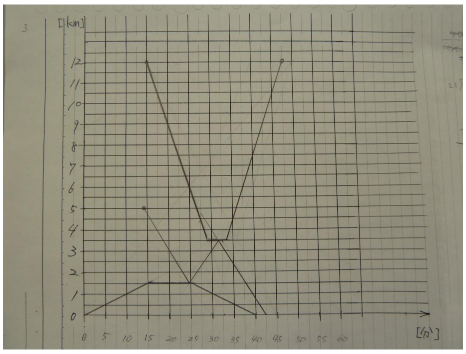


出会った後は傾きの符号が逆になる。

(条件に合うように線を書き加える。)

より一般的な支援
・グラフで表すことができることは、ほかにはないか。
・条件に合えばいい。
より特殊な支援
・時間、移動距離、速度を考えて描いてみよう。

○活動 C



移動せず、ある場所で待っていることをグラフに表すことができる。

条件に合うように、出発時間や待ち合わせ場所などを、生徒個人で考える。

○活動 N
自分が作った移動のわかるグラフから、ママの速度を導き出す。
誰が、誰といつ、どこで出会ったのかなど、説明をできるように自分でまとめる。

最低限全員が活動 B までできている。

○練り上げ

どのような表し方で問題を解き始めたかみんなで話し合う。

・表(A-1、B-1)、式(A-2、B-2)、グラフ(A-3、B-3)それぞれどのように考えたか。

グラフを用いて表すことによってわかることを話し合う。

・いつ、どこで会ったのか一目でわかる。

・移動している、待っているかがグラフからだと安易にわかる。

引用・参考文献

「はじめからの数学①幾何学~空間と形の言語~」　ジョン・タバク著　松浦俊輔 訳　青土社

個人の感想

授業設計にも基本があることが初め驚きだった。しかし、指導案があることによって自らが指導する授業に一貫性が生まれ、授業をしていく中で気づいたことを既存の指導案に組み込むことによって、さらにいいものに仕上げていくことができる。

教材研究のひとつとして役に立つこともあると思う。

指導論の方の講義と同時進行だったのでよくわかった。

稲垣幸太

学習指導設計を通し自分が学んだことは、教員という職業に対する熱意の大切さです。

自分は教員免許取得のための科目を受けるにあたって、絶対に教員になりたいという気持ちを持たないままこれまでやってきました。もちろん免許がとりたいのは本心ですが、職業を教員に決めてはおらず、そこまで強い気持ちを持っていませんでした。そして、この講義が始まって自分の気持ちの足りなさに気づきました。

まず、1時間の授業に対して一つの指導案を作るというのに驚きました。自分がこれまで受けてきた授業がそんなに考えて決められていたというのももちろん知らなかったし、グループで集まって指導案を考えるときも、時間をかけてもなかなか答えが見つからず、常にこれでいいのかなぁ、という不安なままレポートを提出していました。

そして、毎回の講義で直すべき点などを指摘され、その点を修正することも自分にとっては、とても難しく感じました。指摘されたところをどう直せばいいのか、ということがなかなか分からず、そのことに関して話し合う時間が多かったように思います。

そうやってグループワークを続ける中で、教員になるということの大変さに少しだけ気づくことができたように思います。その大変さについて自分の中ではいろいろと考えた上で、免許を取ることを決意したつもりでしたが、頭で想像するのと実際にやってみるのとでは全く違いました。指導案を考える際に、ただ教科書に沿って授業を進めるのではなく生徒に期待する活動や色々な生徒の場合を考えて、それに対する支援も考えるということも全く知りませんでした。自分の教員への熱意が足りないことに気づき出してからは、本当に教師になりたいのか、ということを考えるようになりました。グループワークにも全然自分は役に立たず、ほとんど班員に助けてもらってレポートを作成し、最終レポートまでたどり着けました。

今回の反省を生かすために、改めて自分の本当の気持ちを考えてから教員免許の取得について考えていこうと思います。そういう意味でこの講義を受けたことは、自分にとって意味のあることだったと思

っています。

木村光

　授業の計画を立てると考えると、そのような経験がなく、自分の好きな問題を考えて授業をつくるので、楽しくできるのではないかと思っていました。しかし、今回の数学学習指導設計Ⅱの講義で、1つの授業をつくることがどんなに大変なことなのか、自分の授業に関する考えが甘かったことを感じました。生徒の期待する活動を考えるなど、どのようにして、生徒自身に考え、取り組ませることができるのか、また生徒にどのような支援をしてあげられるのか、僕たちが考えるべきことがとても多かったです。また、学習指導要領をまとめたり、教科書比較をすることで今まで考えていなかった、単元としての目的を知ることができました。

　反省すべき点も多々あり、今後に活かせる講義になりました。この指導案をつくった半年間はいろいろあって大変で難しいと感じました。そして、とても大事な時間でした。

横田真照