数学学習指導設計Ⅱ

最終課題レポート

因数分解

J2 吾郷将樹
岸川友飛
堤本洋介

目　　次

1　単元設定の理由

#1 (2011/10/18)

(数と式)
　第三学年　式の展開と因数分解

設定理由

・自分たちが中学時代には何のためにやっているか分からずただ計算の仕方だけ覚えてやっていたから。
・因数分解することで計算が工夫でき簡単化できることに気付かせたい。

(例 1) 51^2-49^2の計算

$$\begin{aligned}51^2-49^2 &= (50+1)^2-(50-1)^2\\ &= (2500+100+1)-(2500-100+1)\\ &= 200\end{aligned}$$

(例 2) 51^2-49^2 の計算

$$\begin{aligned}51^2-49^2 &= (51+49)(51-49)\\ &= 100\times 2\\ &= 200\end{aligned}$$

・式の展開と因数分解をやるときに公式ばかりにとらわれていたと思う。
もっと、公式の意味などあるのではないかと思った。
・式の展開と因数分解と聞くと「公式を覚えないと」というイメージがある。

2　学習指導要領

#2 (2011/10/25)

「学習指導要領解説を読んでの分析」

★教科の目標

●数学的活動を通して、数量や図形に関する～ 態度を育てる。（p14 の引用）

数学的活動について・・・生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み

教師の説明を一方的に聞くだけの学習や、単なる計算練習を行うだけの学習などは数学的な活動には含まれない。(p15 下 7 行目)

楽しさを知る→楽しさを実感する（p16　上 3 行目）

「情意的な側面を大切にする。（p17　下 7 行目)」とは？

[意見] では、こういった活動はどのような活動に入るか。
学習に対する意欲を高めることを重視している。

★学年の目標

●公式を用いての展開及び因数分解の方法について理解し、いろいろな式を見通しをもって<u>能率的</u>に扱うことができるようにする。(p24 引用)

[意見] 能率的＝ 無駄なくはかどること
能率的にというと公式を暗記して公式にあてはめて解くイメージがある。

●自然数の素因数分解～その意味を理解できるようにする。(p24 引用)

[意見] その意味とは？

★第 3 学年(数と式)の内容

●式の展開の公式として

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

これらは、今後の学習においてしばしば活用される典型的なものであり、<u>公式の持つ意味</u>とそれを活用することのよさを理解し、<u>式を能率よく処理する</u>ことができるようにする。

(p112 引用)

[意見] 公式の持つ意味？

●因数分解の学習には、式の処理だけではなくその意味を読み取る行為が含まれていることを理解できるようにする。(p112 引用)

(例) $13^2 - 12^2 = (13+12)(13-12) = 25$ のように変形することで、計算が容易になるばかりではなく、25 が5^2であることを考えると、直角三角形の三辺の長さ 5,12,13 を見つけだすことができる。

[意見]意味を読み取る行為がふくまれていることをあまり理解出来ていないと思う。
また、私たち自身もその意味についてあまり理解できていない。

●文字を用いた式でとらえ説明する

[意見]今まで文字を用いた公式で学習してきたが、どうして文字式がもちいられているのか？
文字式だと公式を覚えることに意識がいってしまうのではないか？

●文字を用いた式での因数分解に相当するもの(p113 引用)

[意見] 意味がよく分からなかった。

[授業を通して]

今回は学習指導要領の分析をした。因数分解の意味を考えたとき、何かを求めるために因数分解を使うが、因数分解の形を作ってからが本当の学習になる。しかし、多くは因数分解をできたら終わってしまう。なので、私たちはその後の授業を考えていく必要がある。また、公式の意味や因数分解の意味についても考えていく必要がある。次回は、教科書分析をして各社の教科書の比較をしていく。

3　教科書分析

【1】教科書の比較

#3 (2011/11/8)

学校図書　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岸川友飛

・因数分解に入る前に式の除法や乗法で式の整理の練習をしている。

・(x+y+○)のような時には x+y=A とおいて二つの文字として式の展開をしている。
(違う文字に置き換えるという動作→多公式を単公式と考えて整理する。)
→手際よく計算するための一つの手段だと感じた。

・因数分解に入る前の式の展開のところで公式$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ などの公式が入っていた。

・長方形や正方形などの面積を求めるところに式の展開や因数分解が使われている。
→なぜ、面積を求めるのに使われるか？

・因数分解に入る前に素数・素因数の紹介がされていた。

・(積の形)　=　(和の形)
因数分解　　　式の展開

・「公式による因数分解」というページがあってやっぱり公式を使うとイメージがある。

・(教科書の流れ) 式の計算→式の展開→素因数分解→因数分解→式の活用

日本文教出版

・(教科書の流れ) 式の計算→式の展開→因数分解→式の活用→素因数分解

・式の展開のところを重視しているように感じた。

・「和の平方、差の平方を手際よく展開する方法を見つけよう」
→公式が用いられている。

・展開のところで因数の考え方を結びつけて教えようとしているように感じた。

東京書籍　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　吾郷将樹

●流れ

①因数とは何か、因数分解するとはどういうことかの説明

・「正方形や長方形を使って一つの長方形を作りましょう」という問いから成り立つ等式をもとに説明している。

②共通因数
③公式を利用する因数分解
・公式１：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
・公式２：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
・公式３：$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
・公式４：$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$
④いろいろな因数分解
⑤式の計算の利用

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

●気付いたこと
・公式を利用する因数分解では、「式を展開する時に使った乗法公式を逆に使って…」とあり、前の展開のところが大きく関連していると思う。
・公式を利用する因数分解では、公式の下に例題がある形だったが、その公式を見て、公式と同じ形を作るという印象を受けた。本当に公式をもとに考えていると思った。
・いろいろな因数分解で文字において考える問題があったが、学習指導要領解説の学年の目標に書かれていた能率的というのは公式を使うことだけではなく、こういうことも含んでいるのではないかと思った。
・式の計算の利用が、この単元のメインのところのように感じた。2.5 ページ

大日本図書

●流れ
①素因数分解
②因数とは何か、因数分解するとはどういうことかの説明
・「正方形や長方形を使って一つの長方形を作りましょう」という問いから成り立つ等式をもとに説明している。
③共通因数
④公式による因数分解
・公式１：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
・公式２：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

・公式 3：$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
・公式 4：$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$
⑤いろいろな式の因数分解
⑥式の因数分解と計算
⑦式の利用(数の性質と式の利用・図形の性質と式の利用)

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

気付いたこと
・「展開の公式を使って、因数分解の仕方を考えよう」のように前の展開のところと結びつけがされていると思う。
・公式による因数分解では、「それぞれどの公式を使えばよいか考えて…」というように公式をもとに考えていた。
・他の 2 社(東京書籍・数研出版)よりもページ数が多かった。

数研出版

●流れ
①因数とは何か、因数分解するとはどういうことかの説明
②共通因数
③因数分解の公式
・公式 1：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
・公式 2：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
・公式 3：$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
・公式 4：$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$
④いろいろな因数分解
⑤式の計算の利用
⑥素因数分解

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

●気付いたこと
・「展開の公式から、次の因数分解の公式が得られる」というように、前の展開のところと結びつけがされていると思う。
・因数分解の公式では公式をもとに考えていた。
・素因数分解が最後のところに載っていた。

啓林館 堤本洋介

●流れ
①式の乗法・除法
②乗法の公式
③素因数分解
④因数分解
⑤式の利用

●前後の単元
前：確立（2年）
後：平方根

●気付いたところ
・長方形を使っての導入
・公式と計算の練習で構成されている
・最初は展開後の式を肉抜きで表している
・因数分解の前に素因数分解がある
・印を使って計算手順を表す
・公式をもとに式の展開の部分と関連付けて説明
・□などを使って式を肉抜きにしたり、和と積の表をつくって因数分解の補助を行う。
・文を使って説明していることが多い。
・素因数分解を因数分解の前にやるのと後にやる違いは？
・長方形を使う以外に導入の仕方は無いのか？

教育出版

●流れ
①式の展開

②因数分解
③素因数分解
④式の活用

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

●気付いたところ
・長方形を使っての導入
・矢印を使って計算手順を表す
・公式と計算の練習で構成されている
・因数分解の後に素因数分解
・公式をもとに式の展開の部分と関連付けて説明
・素因数分解を因数分解の前にやるのと後にやる違いは？
・長方形を使う以外に導入の仕方は無いのか？

【2】教科書の分析

●前後の単元
６社とも、前：確立　　後：平方根の順であった。

●本単元の流れ
因数・因数分解とは？　　・・・1
共通因数　　・・・2
公式を利用する因数分解　　・・・3
いろいろな因数分解　　・・・4
式の計算の利用　　・・・5
素因数分解　　・・・6

東京書籍	1	2	3	4	5	
大日本図書	6	1	2	3	4	5
数研出版	1	2	3	4	5	6
学校図書	6	1	2	3	4	5
日本文教出版	1	2	3	4	5	6

啓林館	6	1	2	3	4	5
教育出版	1	2	3	6	5	

●気付いたところ

・因数分解の導入では７社すべてが「正方形や長方形を切りぬき、それらのいくつかを使って、いろいろな長方形を作ってみましょう」という形から入っていたが、どうしてなのか？

(意見)・式や文章だけではわかりづらいと思うが、図形にすることによって、イメージしやすい。

・記憶に残りやすい。

・素因数分解について初めに触れている教科書もあれば、最後に触れているところ、また触れていないところもあったがどうしてなのか？

(意見)・因数分解の初めにあったほうがいいと思う。

・社によっては重要視していないのではないか？

・なにかねらいがあるのではないか？

・因数分解の後にやるメリットがあるのか？

・展開の公式、因数分解の公式を覚えて、解き方を理解し、式の利用で使うという印象をもった。式の利用が学習指導要領解説に書いてあった意味を読み取る行為にあたるところではないかと思った。

・学習指導要領解説に書かれていた「能率的に」は、公式を覚えて解くことだけではないと思った。文字でおくことも含むのではないか。

・前回はどうして公式に文字式が使われているのか、文字式だと逆に公式を覚えることに意識がいってしまうのではないかと思っていたが、教科書分析を通して、文字でおくことで式を整理でき、計算を簡単化できると思った。

・因数分解では公式が重視されていると思った。

・学習指導要領解説の教科の目標で「情意的な側面を大切にする」とあったが、教科書を見てもあまり感じ取れなかった。情意的な側面は教科書の内容よりも、教師が授業の中で行う指導方法だと思った。

【1】教科書の比較(改)

#4(2011/11/22)

東京書籍　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　吾郷将樹

●流れ

①因数とは何か、因数分解するとはどういうことかの説明

・「正方形や長方形を使って一つの長方形を作りましょう」という問いから成り立つ等式をもとに説明している。

②共通因数

③公式を利用する因数分解

・公式 1：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

・公式 2：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

・公式 3：$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

・公式 4：$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

④いろいろな因数分解

⑤式の計算の利用

●前後の単元

前：確立（2 年）

後：平方根

●気付いたこと

・公式を利用する因数分解では、「式を展開する時に使った乗法公式を逆に使って…」とあり、前の展開のところが大きく関連していると思う。

・公式を利用する因数分解では、公式の下に例題がある形だったが、その公式を見て、公式と同じ形を作るという印象を受けた。本当に公式をもとに考えていると思った。

・いろいろな因数分解で文字において考える問題があったが、学習指導要領解説の学年の目標に書かれていた能率的というのは公式を使うことだけではなく、こういうことも含んでいるのではないかと思った。

・式の計算の利用が、この単元のメインのところのように感じた。2.5 ページ

大日本図書

●流れ
①素因数分解
②因数とは何か、因数分解するとはどういうことかの説明
・「正方形や長方形を使って一つの長方形を作りましょう」という問いから成り立つ等式をもとに説明している。
③共通因数
④公式による因数分解
・公式１：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
・公式２：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
・公式３：$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
・公式４：$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$
⑤いろいろな式の因数分解
⑥式の因数分解と計算
⑦式の利用(数の性質と式の利用・図形の性質と式の利用)

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

気付いたこと
・「展開の公式を使って、因数分解の仕方を考えよう」のように前の展開のところと結びつけがされていると思う。
・公式による因数分解では、「それぞれどの公式を使えばよいか考えて…」というように公式をもとに考えていた。
・他の 2 社(東京書籍・数研出版)よりもページ数が多かった。

数研出版

●流れ
①因数とは何か、因数分解するとはどういうことかの説明
②共通因数
③因数分解の公式
・公式１：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
・公式２：$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
・公式３：$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
・公式４：$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

④いろいろな因数分解
⑤式の計算の利用
⑥素因数分解

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

●気付いたこと
・「展開の公式から、次の因数分解の公式が得られる」というように、前の展開のところと結びつけがされていると思う。
・因数分解の公式では公式をもとに考えていた。
・素因数分解が最後のところに載っていた。

学校図書 岸川友飛

●流れ
①式の計算
②式の展開
③素因数分解
④因数分解
⑤式の活用

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

●気付いたところ
・因数分解に入る前に式の除法や乗法で式の整理の練習をしている。
・(x+y+〇)のような時には x+y=A とおいて二つの文字として式の展開をしている。
　(違う文字に置き換えるという動作→多公式を単公式と考えて整理する。)
　→手際よく計算するための一つの手段だと感じた。
・因数分解に入る前の式の展開のところで公式$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ などの公式が入っていた。

・長方形や正方形などの面積を求めるところに式の展開や因数分解が使われている。
　→なぜ、面積を求めるのに使われるか？
　・因数分解に入る前に素数・素因数の紹介がされていた。
　・(積の形)　＝　(和の形)
　　因数分解　　　　式の展開
　・「公式による因数分解」というページがあってやっぱり公式を使うとイメージがある。

日本文教出版

●流れ
①式の計算
②式の展開
③因数分解
④式の活用
⑤素因数分解

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

●気付いたところ
・式の展開のところを重視しているように感じた。
・「和の平方、差の平方を手際よく展開する方法を見つけよう」
　　→公式が用いられている。
・展開のところで因数の考え方を結びつけて教えようとしているように感じた。

啓林館　　　　　　　　　　　　　　　　　堤本洋介

●流れ
①式の乗法・除法
②乗法の公式
③素因数分解
④因数分解
⑤式の利用

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根
●気付いたところ
・長方形を使っての導入
・公式と計算の練習で構成されている
・最初は展開後の式を肉抜きで表している
・因数分解の前に素因数分解がある
・印を使って計算手順を表す
・公式をもとに式の展開の部分と関連付けて説明
・□などを使って式を肉抜きにしたり、和と積の表をつくって因数分解の補助を行う。
・文を使って説明していることが多い。
・素因数分解を因数分解の前にやるのと後にやる違いは？
・長方形を使う以外に導入の仕方は無いのか？

教育出版

●流れ
①式の展開
②因数分解
③素因数分解
④式の活用

●前後の単元
前：確立（2 年）
後：平方根

●気付いたところ
・長方形を使っての導入
・矢印を使って計算手順を表す
・公式と計算の練習で構成されている
・因数分解の後に素因数分解
・公式をもとに式の展開の部分と関連付けて説明
・素因数分解を因数分解の前にやるのと後にやる違いは？
・長方形を使う以外に導入の仕方は無いのか？

【2】教科書の分析

●前後の単元

7社とも、前：確立　　後：平方根の順であった。

●本単元の流れ

因数・因数分解とは？　　・・・1

共通因数　　・・・2

公式を利用する因数分解　　・・・3

いろいろな因数分解　　・・・4

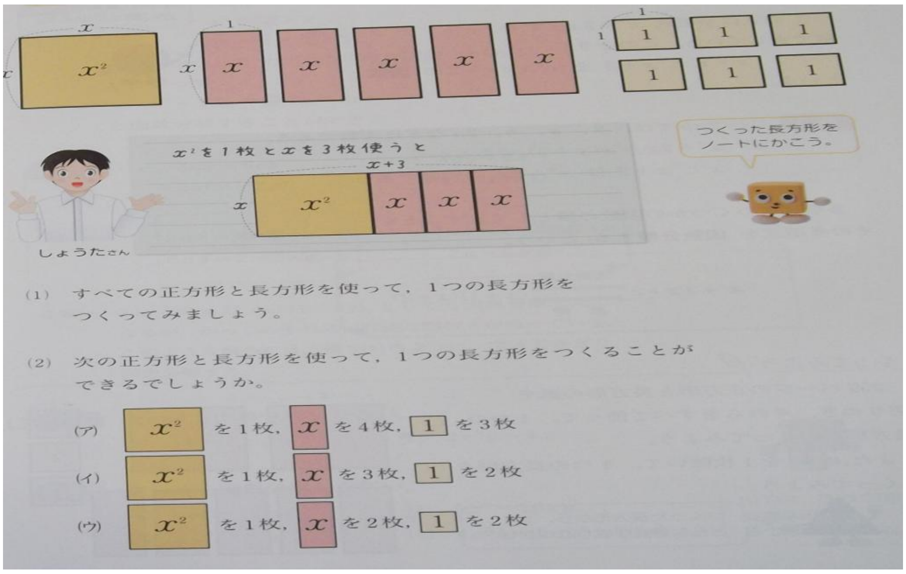
式の計算の利用　　・・・5

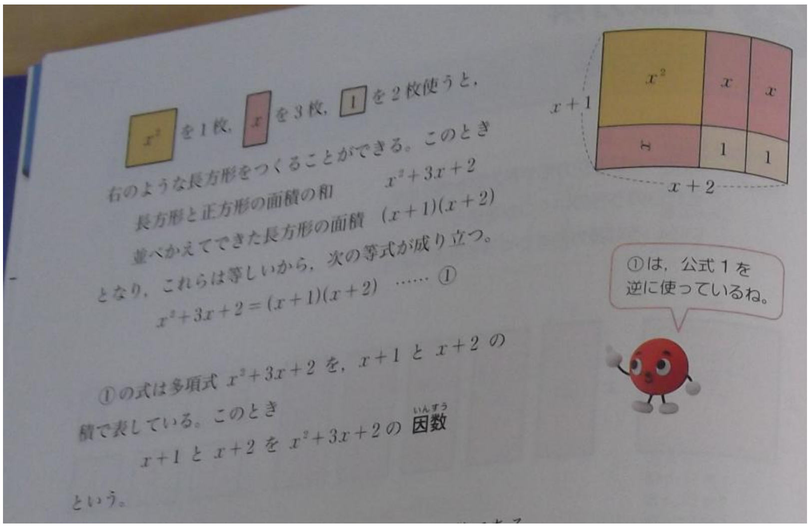
素因数分解　　・・・6

東京書籍	1	2	3	4	5	
大日本図書	6	1	2	3	4	5
数研出版	1	2	3	4	5	6
学校図書	6	1	2	3	4	5
日本文教出版	1	2	3	4	5	6
啓林館	6	1	2	3	4	5
教育出版	1	2	3	6	5	

★問題や順序の違いによる各社のねらい

●因数分解の導入では7社すべてが「正方形や長方形を切りぬき、それらのいくつかを使って、いろいろな長方形を作ってみましょう」という形から入っていたが、どうしてなのか？




x^2 を1枚、x を3枚、$\boxed{1}$ を2枚使うと、
右のような長方形をつくることができる。このとき
長方形と正方形の面積の和　x^2+3x+2
並べかえてできた長方形の面積　$(x+1)(x+2)$
となり、これらは等しいから、次の等式が成り立つ。
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ …… ①

①の式は多項式 x^2+3x+2 を、$x+1$ と $x+2$ の
積で表している。このとき
$x+1$ と $x+2$ を x^2+3x+2 の **因数**（いんすう）
という。

(意見)・式や文章だけではわかりづらいと思うが、図形にすることによって、イメージしやすい。
・記憶に残りやすい。
・展開と因数分解とのつながりが分かりやすい。

●素因数分解について初めに触れている教科書もあれば、最後に触れているところ、また触れていないところもあったがどうしてなのか？

(意見)・因数分解の初めにあったほうがいいと思う。
・社によっては重要視していないのではないか？
・なにかねらいがあるのではないか？→　本で調べる必要がある。
・因数分解の後にやるメリットがあるのか？

●考察

・教科書分析をしてみて、まず思ったことは本単元の流れでの 7 社の素因数分解の位置づけがばらばらだったと思う。具体的には、大日本図書や学校図書、啓林館は単元の最後だった。また、教育出版は最後から一つ前のところ、東京書籍に関しては素因数分解について載っていなかった。このように素因数分解については各社によって順序に違いがあり、どうして素因数分解が最後にくるのかと私たちも話あったが、具体的な意見がでなかった。ただ、教科書を作成するにあたっては、何らかの目的やねらいがあってこの位置に載せていると思うので、素因数分解について、またそれに関わる人物などを調べていきたいと思う。

・展開の公式、因数分解の公式を覚えて、解き方を理解し、式の利用で使うという印象をもった。式の利用が学習指導要領解説に書いてあった意味を読み取

る行為にあたるところではないかと思った。
・学習指導要領解説を読んだ時に「能率的に」という言葉に注目し、「能率的に」というと公式を暗記して公式にあてはめて解くイメージがあったが、教科書を見ていく中で公式を覚えて解くだけではなく、$x+y=A$ とおくように文字でおきかえて考えることも含んでいるのではないかと思った。
・前回はどうして公式に文字式が使われているのか、文字式だと逆に公式を覚えることに意識がいってしまうのではないかと思っていたが、教科書分析を通して、文字でおくことで式を整理でき、計算を簡単化できると思った。
・因数分解では公式が重視されていると思った。
・学習指導要領解説の教科の目標で「情意的な側面を大切にする」とあったが、教科書を見てもあまり感じ取れなかった。情意的な側面は教科書の内容よりも、教師が授業の中で行う指導方法などの工夫が大切だと思った。

[授業を通して]

教科書比較をしてみて社によって因数分解の単元での素因数分解の位置に違いがあったり、教科書に掲載されていないところもあった。素因数分解の位置づけを考えたときに、素因数分解を因数分解の導入の前に入れるのは意味づけ、後に入れるのは活用また素因数分解がないのは活用と同じである。次回は、数学史について調べる。

4　数学史

#5(2011/11/29)

●数学史(因数分解)

・素数の研究は紀元前 500 年前頃のギリシア時代にピタゴラスとその仲間を中心として開始された。自然数が素因数分解可能であることを証明した。さらに、素数が無限個存在することを証明している。その方法

[2]→[2,3]→[2,3,7]→[2,3,7,43]→[2,3,7,43,13]→⋯

のように一個ずつ新しい素数を作ってみせるというやり方であり、無限個存在することが分かる。ここで、何個か素数が与えられていたときに、新しい素数はそれらあたえられた素数をかけて 1 を足したものの最小の素因子とする。

(p10 2009 年 11 月 5 日　黒川信重　リーマン予想の 150 年)

・ある程度の素数を生みだす公式を発見しようとしたが成果はまちまちだった。

フェルマーは素数を生みだす式を見つけたと思った。2 を2^N個かけて 1 を加えると、答えの$2^{2^N}+1$は素数になる、と予想したのだ。いわゆる第 N のフェルマー数だ。今のところフェルマーの公式で得られた素数は四つしかない。だがフェルマーは、素数の持つ非常に特殊な性質のいくつかを明らかにしおおせた。たとえば、5、13、17、29 のように 4 で割ると 1 余る素数について、興味深い事実を発見した。$29=2^2+5^2$のように、これらの素数は常に二つの平方の和になっている。

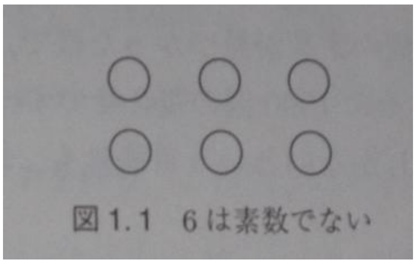
(p64　2005 年　素数の音楽　マーカス・デュ・ソートイ)

・メルセンヌはフェルマー同様、まず 2 の累乗を考えた。そして、フェルマーのように得られた数に 1 を加えるのではなく、1 を引いた。こうすると、例えば2^3-1＝7 となって素数が得られる。ある音の振動数を二倍にすると、音は一オクターブあがる。よって 2 の累乗は倍音を生みだす。これを不協和音、つまりそれまでの振動数と調和しない「素な音」にするには、1 ずらせばよいのだ。

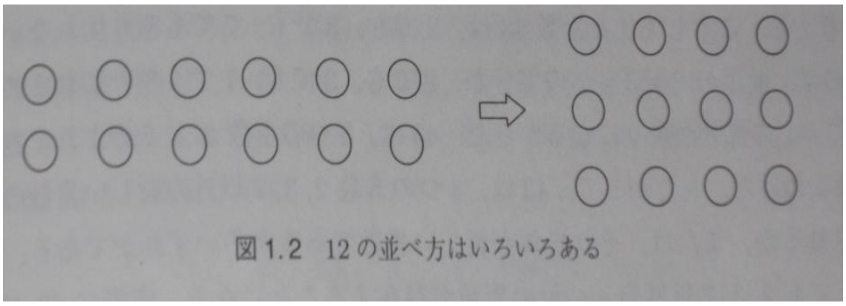
メルセンヌはすぐに、この式で得られる数が必ずしも素数にならないことに気付いた。例えば、2^4-1=15 は素数ではない。そして、n が素数でない限り、2^n-1は素数になり得ないことを理解した。ところがメルセンヌは大胆にも。257 以下の数では、n が 2、3、5、7、13、19、31、67、127、257 のいずれかであるときに限って2^n-1が素数になる、と主張したのである。やっかいなことに、たとえ n が素数であっても2^n-1が素数になるとは限らないことに気づいたのだ。

(pp65～66　2005 年　素数の音楽　マーカス・デュ・ソートイ)

・素数とは、より小さな整数の積に分解できないような正の整数のことだ。たとえば 6 は、$6 = 2 \times 3$と分解できるから素数ではない。一方 2,3,5,7,11,13,・・・などは、素数である。分解できるとは次の図のように長方形の形にきれいに並べられることを意味する。

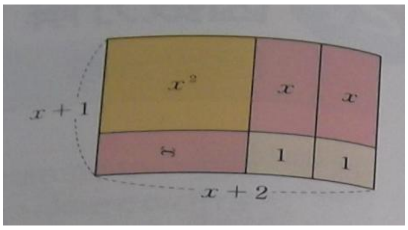


この並べ方は一通りとは限らない。たとえば 12 は,$12 = 2 \times 6$と分解できるから素数ではないが、一方,$12 = 3 \times 4$とも並べられる。このように並べ方を変えると、次の図のように長方形は縦の辺が長くなる代わりに横の辺が短くなり、全体としては同じ数を表している。



（pp2~3　2010 年　素数からゼータへ、そしてカオスへ 小山信也）

★疑問に思ったこと、考察
・なぜ、１は素数に入らないのか？
・フェルマーの考えでもあるように、平方根の考えと素数は結びつけて考えることができるのでは？
・○の並び方で上の図は素数か素数ではないか調べているが、この○を並べるということは因数分解で長方形の面積を表すことと似ているように感じた。



5　単元の指導計画案

指導計画　全 14 時間
第１次　式の展開（６時間）
第２次　因数分解（６時間）
　第１時　因数分解の導入……(本時)
　第２時　共通因数分解
　第３時　公式を利用した因数分解
　第４時　いろいろな因数分解
第３次　計算の利用（２時間）

6　指導案の作成

【1】第 1 回

#6(2011/12/6)

●テーマ

「面積を用いた因数分解」

●テーマ設定の理由

　因数分解と聞くと、式を因数分解の形にすると完成いというイメージがあった。しかし、学習指導要領解説にも「因数分解の学習には、式の処理だけではなく、その意味を読み取る行為が含まれていることを理解できるようにする」と書かれていたが、因数分解は形をつくったらそこで終わりではなくその先が本当の学習になると考えた。

　教科書分析を通して感じたこととして、導入部分では 7 社とも図から面積を求めるという形で因数分解について考えていた。でも、公式を用いた因数分解のところでは 7 社とも公式→例題という流れで説明していた。確かに、因数分解を初めて考えるときには、前の展開の公式を使って、逆に考えた方が理解しやすいと思う。ただ、公式→例で因数分解の形をつくって終わっている。これでは、因数分解はこれらの公式の形にすれば終わりなんだという考えをもってしまうと思う。

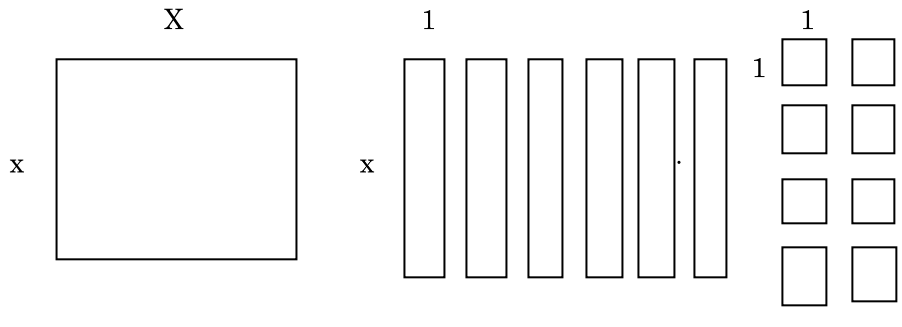
　なので、私たちは図を用いて面積を求めることで因数分解の積の形に帰着できるということにつなげて、公式の意味や因数分解の意味の理解ができるようにし、生徒が「因数分解ってこういうことができる、すごい」と思えるような内容にしたい。

●どこの授業

　公式による因数分解

●問題

　(例) $x^2 + 6x+8$ の面積を図で表してみよう。



↓

「一つの大きな図形にしてみよう」

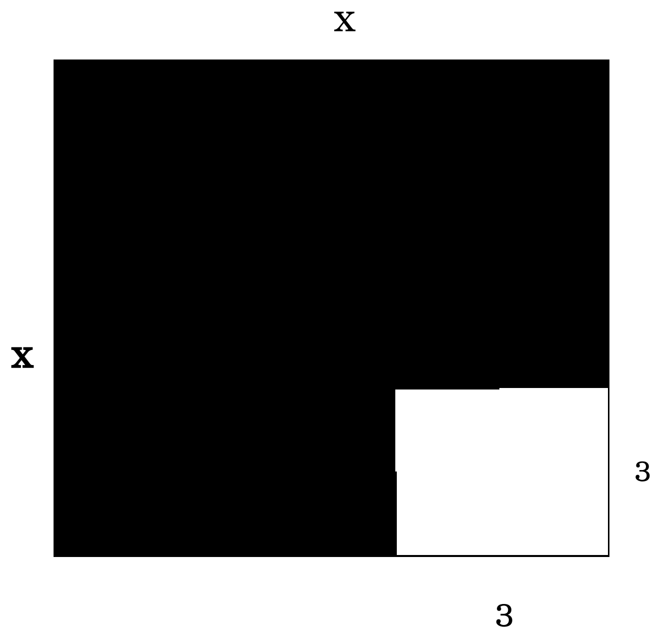
[授業を通して]

今回は自分たちが指導案を考える上でのテーマ設定と問題を考えてきた。「x^2+6x+8 の面積を図で表してみよう」という問題を考えてきたが、これでは生徒が何をすればよいのかが不明確であるし、因数分解の意味付けとなる問題提示がされていないと指摘された。次回は、因数分解の意味を考えながら、問題と活動を考える。

【2】第 2 回

#7(2011/12/13)

[問題] 下の図で色のついた部分の面積を式で表しましょう。

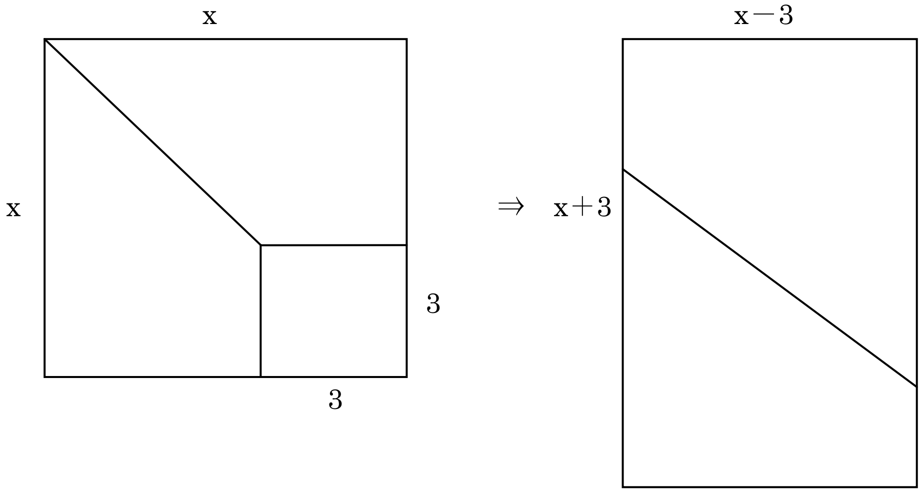


[期待する活動 A]
全体の面積から色のついていない部分の面積を引いて求めようとする。
(全体)−(色のついていない部分)＝x^2-9

支援： 補助線を入れてみよう。
支援： 違う形での面積の求め方を考えてみよう。

[期待する活動 B]
長方形の形に並べかえて、面積を求めようとする。

(パターン 1) 斜めに補助線を入れる。

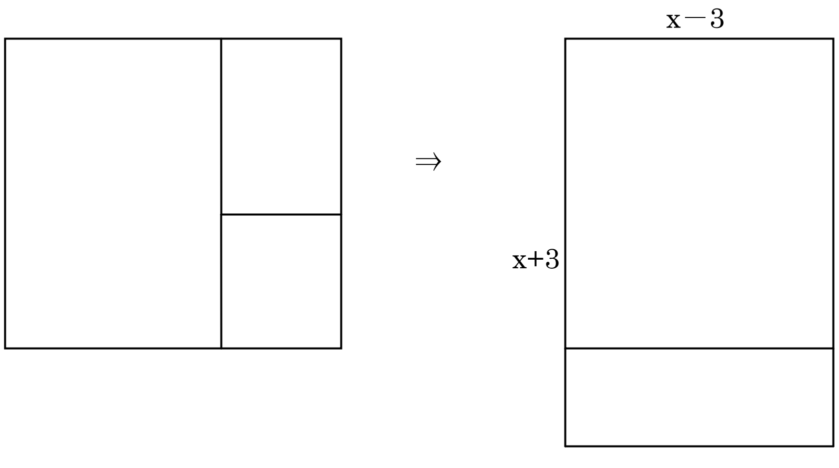


左の図形は右の図形のような長方形に変形できる。

(右の図形の面積)＝x^2-9

(左の図形の面積)＝$(x-3)(x+3)$

(パターン 2) 縦に補助線を入れる。



※面積の求め方はパターン 1 といっしょ

よって、$x^2-9=(x-3)(x+3)$ である。

(和の形)＝(積の形) に書ける。

[授業を通して]

今回は問題と活動を考えた。教科書を参考に作ってみたが、問題点が多かった。まず、活動 A のあとの支援で「補助線を入れてみよう」としたが、この問題設定では補助線を引く必要性が見出せていない。補助線を入れて形を変形させて考えなくても、長方形から四角形の面積を引けばよい。また、x^2-9と面積が出たのに、$(x-3)(x+3)$と表さないといけないのはどうしてか、因数分解の定義について成り立っていないという指摘があった。次回は、中心となる考えを決めて、その考えに合った問題場面を考えてくる。

【3】第 3 回

#8(2011/1/10)

1,中心となる考え

因数分解というのは「和の式」を「積の式」で表すことができることを理解し、その解は一つ(一意)に定まるということを学習する。

2,問題の提示

図から因数分解の関係性を見つける。

(問題) 下の図のような二つのチョコレートがあります。A 君と B 君の二人がいて、チョコレートの取り合いをしています。二人とも「チョコレート 1 の方が大きい」と言っています。お母さんがどっちのチョコレートも大きさは変わらないからどっちでも大丈夫だと言っています。しかし、A 君も B 君も目で二つのチョコレートの大きさが同じであるということが分からないと納得できないと言っています。二人が納得できるような形に変形して変形した縦と横の長さをそれぞれ求めましょう。

図 1,チョコレート 1

図 2,チョコレート 2

支援

(活動 A1) まず、大きな長方形から欠けている部分を引いて面積を出す。 [チョコレート 1] (全体)−(欠けている部分)	(活動 A2) チョコレートの欠けている部分がなくなるようにチョコレートを移動させて別の形に変形する。 [チョコレート 1]

$=\{(x+5)(x+4)\}-\{2\times 2+2(x+2)\}$

$=(x^2+9x+20)-4-2x-4$

$=x^2+7x+12$

$=(x+3)(x+4)$

[チョコレート 2]

（全体）－（欠けている部分）

$=\{(x+4)(2x+5)\}-\{(x+2)+(x+2)+(x+2)(x+2)\}$

$=(2x^2+13x+20)-(2x+4+x^2+4x+4)$

$=(2x^2+13x+20)-x^2-6x-8$

$=x^2+7x+12$

$=(x+3)(x+4)$

上の部分を切り取って下の部分に張りつける。

$(x+3)(x+4)$

[チョコレート 2]

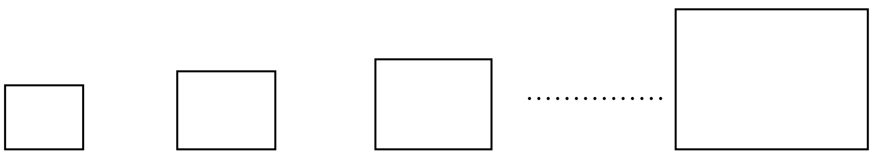
下の部分を切り取って上の部分に張り付ける。

$(x+3)(x+4)$

$\boxed{\text{支援}}$ 形は同じで大きさの違うものはできないかな。

（活動 B）x にそれぞれ値を代入していく。

x＝0 のとき　x=1 のとき　x=2 のとき　x=a のとき



[授業を通して]

　今回は、前回の授業を踏まえて中心となる考えと問題を考えてきた。ただ、中心となる考えと問題が反映されていなくて、活動が成り立っていない。また、２つの図形で考える必要はあるのかと指摘された。確かに２つの図形で考える理由はなかった。２つあるいは１つの図形で考えるにしても、どのように考えれば生徒は理解しやすいのか、中心となる考えを実現するにはどういう問題場面がいいのかを考える必要がある。

【4】第 4 回

#9(2011/1/17)

1,中心となる考え

　因数分解というのは「和の式」を「積の式」で表すことができることを理解し、その解は一つ(一意)に定まるということを学習する。

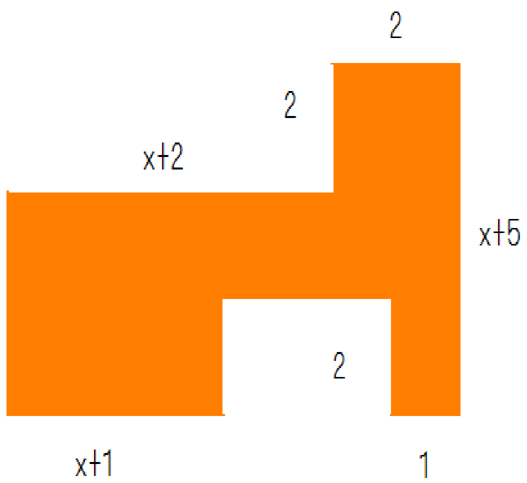
2,問題の提示

　図から因数分解の関係性を見つける。

(問題)

右の図の面積を表し、縦と横の長さを求めなさい。

また面積は同じだけど、縦と横の長さが異なる図形はないか考えましょう。



(活動 A-1)

分割して図形の面積を出す。

$2\times2+(x+4)(x+1)+2(x+1)+2\times1$

$=4+x^2+5x+4+2x+2+2$

$=x^2+7x+12$

(活動 A-2)

長方形から欠けている部分の面積を引く。

(全体)－(欠けている部分)

$=\{(x+4)(x+5)\}-\{2\times(x+2)+2\times2)\}$

$=(x^2+9x+20)-(2x+8)$

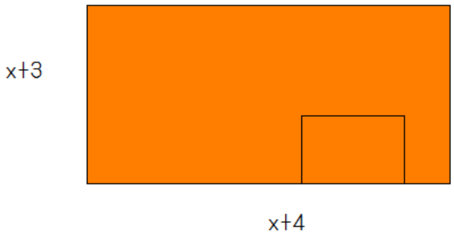
$=x^2+7x+12$

$\boxed{\text{支援}}$ 図のように切れ目を入れたらどうかな。

(活動 A-3)

欠けている所に面積を移動させて一つの長方形として縦と横の長さを出す。

図より上の部分を切って下の欠けている部分に張る



ここから長方形の縦と横の長さは (x+3) (x+4) となる。

$x^2+7x+12=$ (x+3) (x+4) 以外にも答えがあるのではないか。

$\boxed{\text{支援}}$ 面積が同じで他の縦と横の長さを持った長方形はできないだろうか。

(活動 B)

面積が等しくて別の縦と横の長さを持った長方形について考える。

（x に実数値を代入して考えてみる。）

X=0 のとき　面積 12　縦と横の長さ；(1, 12), (2, 6), (3, 4)

X=1 のとき　面積 20　縦と横の長さ；(1, 20), (2, 10), (4, 5)

X=2 のとき　面積 30　縦と横の長さ；(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

X=3 のとき　面積 42　縦と横の長さ；(1, 42), (2, 21), (3, 14), (6, 7)

(1, 12)より (x+1) (x+12) を展開すると $x^2+13x+12$

(2、6)より (x+2) (x+6) を展開すると $x^2+8x+12$ になることから

$x^2+7x+12=$ (x+3) (x+4) になることはわかったけど、どうしてこの答えになるのかがよくわからない。

$\boxed{\text{支援}}$ 縦と横の組み合わせから、気づくことはないかな。

(活動 C)
縦と横の長さの関係性から、解は一つに定まるということを見つける。
(1, 12), (2, 6), (3, 4)

(1, 20), (2, 10), (4, 5)

(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

(1, 42), (2, 21), (3, 14), (6, 7)

どのような x の値でもある数 a と a+1 の組み合わせが表れてくる。これを再び文字で表すと (x+3) (x+4) となる。
x に実数値を代入していくことで面積が等しい長方形がいくつかでてくるが縦と横の関係を見たときどんな x の値を代入しても成り立つ方程式は(x+3) (x+4) である。

[授業を通して]

今回は一から問題場面について考えてきた。中心となる活動と問題が反映されるように考えてきたが、活動 B と C につながる問題提示になっていないと指摘された。私たちは、活動 B、C につながるように「また面積は同じだけど、縦と横の長さが異なる図形はないか考えましょう」としたが、これでは問題が細切れになってしまう。また支援についても、生徒はこの支援で言われた通りに動くだろうが、どうしてこの活動をやらないといけないのかが理解できないものだった。次回は、問題と支援について再度考え、中心となる考えに沿った問題提示、支援を考える。

【5】第５回

#10(2011/1/31)

1,中心となる考え

因数分解というのは「和の式」を「積の式」で表すことができることを理解し、その解は一つ(一意)に定まる,ということを学習する。

2,問題の提示

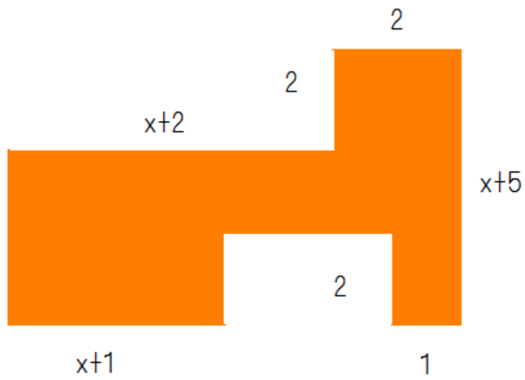
図から因数分解の関係性を見つける。

(問題)

右の図形と等しい面積を持つ長方形を作りたい。

・その長方形の縦と横の長さを求めなさい。

・その長方形の面積をいくつかの具体的な数値で表したときの、縦と横の長さから分かることを考えなさい。



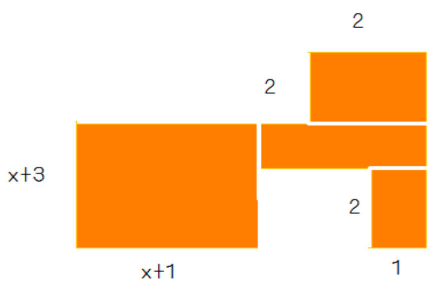
(活動 A-1)

分割して図形の面積を出す。

$2\times1+(x+3)(x+1)+3(x+1)+2\times2$

$=2+x^2+4x+3+3x+3+4$

$=x^2+7x+12$



(活動 A-2)

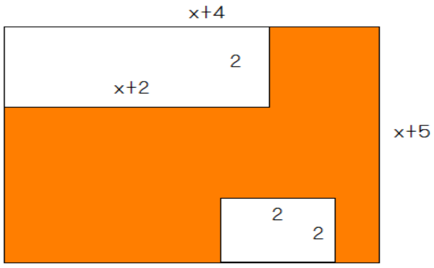
長方形から欠けている部分の面積を引く。

（全体）－（欠けている部分）

$=\{(x+4)(x+5)\}-\{2\times(x+2)+2\times 2)\}$

$=(x^2+9x+20)-(2x+8)$

$=x^2+7x+12$

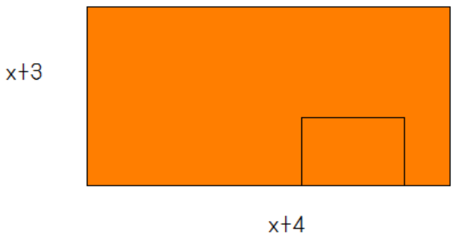


支援　図のように切れ目を入れたらどうかな。

(活動 A-3)

欠けている所に面積を移動させて一つの長方形として縦と横の長さを出す。

・図より上の部分を切って下の欠けている部分に張る



ここから長方形の縦と横の長さは

(x+3)(x+4)　となる。

支援　X に実数値(x=0, 1, 2, …)を代入したときに他の変形はできないだろうか。

(活動 B)

面積が等しくて別の縦と横の長さを持った長方形について考える。

（x に実数値を代入して考えてみる。）

X=0 のとき　面積 12　縦と横の長さ；(1, 12), (2, 6), (3, 4)

X=1 のとき　面積 20　縦と横の長さ；(1, 20), (2, 10), (4, 5)

X=2 のとき　面積 30　縦と横の長さ；(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

X=3 のとき　面積 42　縦と横の長さ；(1, 42), (2, 21), (3, 14), (6, 7)
：

X=1 のとき
(1，12)より (x+1) (x+12) を展開すると$x^2+13x+12$
(2、6)より (x+2) (x+6) を展開すると$x^2+8x+12$になることから
$x^2+7x+12$＝(x+3) (x+4) になることはわかったけど、どうしてこの答えになるのかがよくわからない。

支援　どのような x の値を代入しても表れる縦と横の組み合わせの規則性はないかな。

(活動 C)
縦と横の長さの関係性から、解は一つに定まるということを見つける。
X=0 のとき　(1, 12), (2, 6), (3, 4)

X=1 のとき　(1, 20), (2, 10), (4, 5)

X=2 のとき　(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

X=3 のとき　(1, 42), (2, 21), (3, 14), (6, 7)

どのような x の値でもある数 a と a+1 の組み合わせが表れてくる。
x に実数値を代入していくことで面積が等しい長方形がいくつかでてくるが縦と横の関係を見たときどんな x の値を代入しても成り立つ方程式は(x+3) (x+4) である。

(練り上げ)
(1)答え(面積が $x^2+7x+12$ になる。)
(2) (1)のとき長方形の縦と横の長さの関係は必ず(x+3)(x+4)に一つに定まる。

[授業を通して]

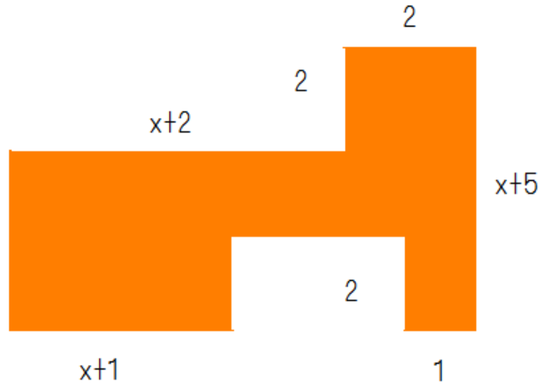
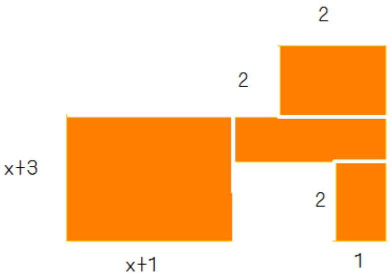
今回は前回の授業を踏まえて、再度問題と支援について考えた。しかし、納得のいくような問題を考えることはできなかった。なので、話し合いの中で出たいくつかの問題をのせた。最終的にこの授業を通して、生徒に何を考えてほしいのか、本時の解決でどういうことが考えられるのかなどをしっかりと話し合いながら、問題を決めていきたい。また、練り上げ、評価問題についても考えてくる。

【6】第 6 回　完成した指導案

#11(2011/2/7)

1,中心となる考え

　因数分解というのは「和の式」を「積の式」で表すことができることを理解し、その解は一つ(一意)に定まる,ということを学習する。

<table>
<tr><th>学習内容</th><th>活動への支援・指導上の工夫</th></tr>
<tr><td>1. 学習課題をつかむ。</td><td>図から因数分解の関係性を見つける。</td></tr>
<tr><td colspan="2">(問題)
右の図形と等しい面積を持つ長方形を作りたい。その長方形の面積と縦と横の関係から成り立つ方程式を見つけなさい。

</td></tr>
<tr><td>2. 自力解決をする。</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">(活動 A-1)
分割して図形の面積を出す。
$2\times1+(x+3)(x+1)+3(x+1)+2\times2$
$=2+x^2+4x+3+3x+3+4$
$=x^2+7x+12$

</td></tr>
</table>

(活動 A-2)

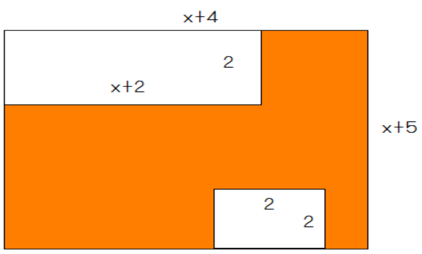
長方形から欠けている部分の面積を引く。

(全体)－(欠けている部分)

$=\{(x+4)(x+5)\}-\{2\times(x+2)+2\times2\}$

$=(x^2+9x+20)-(2x+8)$

$= x^2+7x+12$

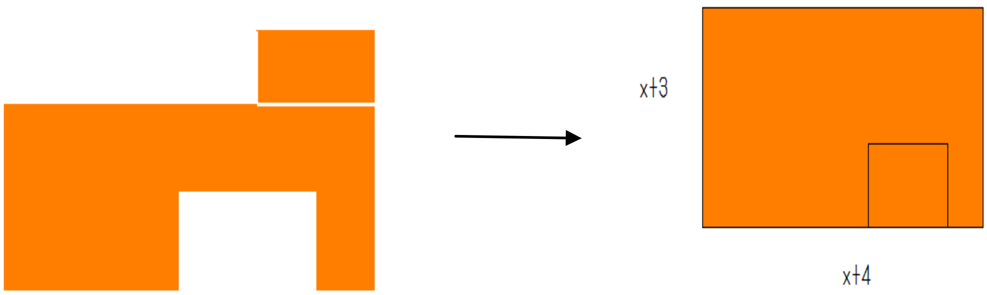


支援　図のように切れ目を入れたらどうかな。

(活動 A-3)

欠けている所に面積を移動させて一つの長方形として縦と横の長さを出す。

・図より上の部分を切って下の欠けている部分に張る



ここから長方形の縦と横の長さは(x+3)(x+4)　となる。

支援　X に実数値(x=0, 1, 2, …)を代入したときに他の変形はできないだろうか。

(活動 B)
面積が等しくて別の縦と横の長さを持った長方形について考える。
（x に実数値を代入して考えてみる。）
X=0 のとき　面積 12　縦と横の長さ；(1, 12), (2, 6), (3, 4)

X=1 のとき　面積 20　縦と横の長さ；(1, 20), (2, 10), (4, 5)

X=2 のとき　面積 30　縦と横の長さ；(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

X=3 のとき　面積 42　縦と横の長さ；(1, 42), (2, 21), (3, 14), (6, 7)

支援　どのような x の値を代入しても表れる縦と横の組み合わせの規則性はないか

(活動 C)
縦と横の長さの関係性から、解は一つに定まるということを見つける。
X=0 のとき　(1, 12), (2, 6), (3, 4)

X=1 のとき　(1, 20), (2, 10), (4, 5)

X=2 のとき　(1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6)

X=3 のとき　(1, 42), (2, 21), (3, 14), (6, 7)

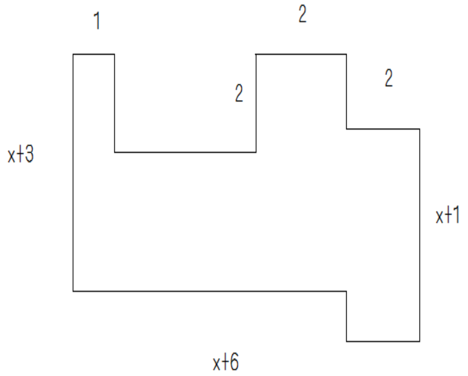
3. 検証する。

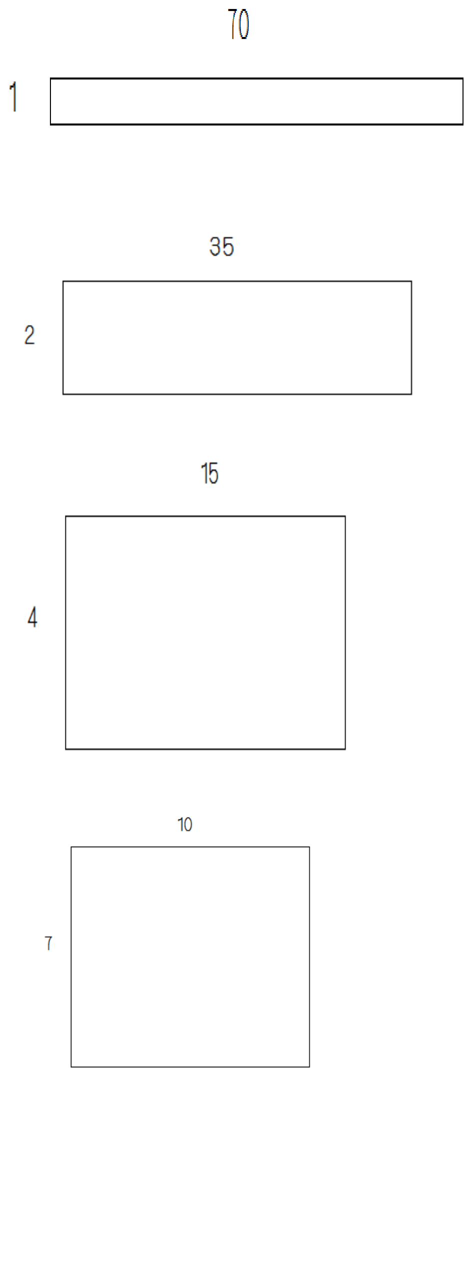
○教師「x＝0 のときの面積と縦と横の関係はどうなったかな。すべての組み合わせが $x^2+7x+12$ の式に成り立つと言えるかな。」	・展開させることで、$x^2+7x+12$ になるものは、(3, 4)だと気付かせる。 ・(1, 12) より (x+1)(x+12) を展開すると $x^2+13x+12$ になる。 ・(2, 6) より (x+2)(x+6) を展開すると

	$x^2+8x+12$になる。
○教師「$x^2+7x+12$＝(x+3)(x+4)になることはわかったけど、どうしてこの答えになるのかな。」	・縦と横の長さの関係性から、規則性に気付かせる。 ・どのような x の値でもある数 a と a+1 の組み合わせが表れてくる。 ・x に実数値を代入していくことで面積が等しい長方形がいくつかでてくるが縦と横の関係を見たときどんな x の値を代入しても成り立つ方程式は(x+3)(x+4)である。
4. ふりかえりをする。	・因数分解とは「和の式」を「積の式」で表すことができるものである。 ・またその解は一つに定まる。
5. 評価問題をする。	

(評価問題)

下のような図がある。左の図と右の図(x に実数値を代入した時)の面積が同じであるとする。このとき面積と縦と横の関係から、適した長方形を右から選びなさい。





7　感想

この数学指導設計の授業を通して、改めて１つの単元の中の１時間の授業を考えるだけでもこんなに大変なのだということを実感した。今回、私たちの班は因数分解について教材研究をした。私自身、最初は因数分解というものは、「公式を覚えないと」というイメージがあった。でも、学習指導要領や教科書の比較・分析などをする中で、因数分解の意味について考えるようになった。授業や話し合いを進める中で、因数分解とは、和の式を積で表すことができる、積に一意をおとすことができるという意味があることが分かった。私が中学の時に因数分解を学習したときは、このような意味については全く意識せずに学習していたような気がした。なので私たちは、因数分解の意味について生徒が学ぶことができるような授業を作ろうと考えた。だが、ここからが本当に苦労したと思う。因数分解の意味を学習できるようにすることをねらいとしていたが、そのねらいがしっかりと反映されるような問題がなかなか作れなかった。そして、問題がよくないために活動も成り立っていない、支援もよくないというものであった。何度も一から考え直すということを繰り返したが、最終的に指導案の形が完成できて本当によかった。この試行錯誤を通して、問題を設定する上では、その問題を解決する過程の中で生徒が教師の考えるねらいを達成できるようにすることが大事だと思った。また、教師は問題や活動、支援など１つ１つに対してもその活動をする価値や意味を考える必要があると思った。今回は因数分解の教材研究をしたが、大学にいる間に他の単元のところもできる限り教材研究をして、自分の中にたくさんの引き出しをつくっていきたい。

吾郷将樹

今回指導設計の授業を受講してみて教材研究に関する大変さ、重要性が改めて実感することができました。私たちのグループは因数分解について取り上げ教材について考えてきました。その教材の研究をしている中で各教科書の比較をすることを行いました。そこで私自身が感じたことは「因数分解の意味って何だろう？」「この教科書の指導を行うと本当に子どもは因数分解のよさってわかるのだろうか？」という疑問が出てきました。実際、私自身因数分解のよさ、因数分解することで何がみえるのか本当に知っているかというと決して「はい」ということが出来ませんでした。しかしながら、今回この授業設計の授業を通して因数分解のよさを私自身学ぶことが出来る本当に良い経験となりました。
因数分解のよさや因数分解すること何ができ、何がありがたいのか、そのことを教える授業こそ本当に大切だと改めて感じさせられました。

最後に、今回教材の研究を行ってみて、指導案を作るところまではやりましたが実際に授業をやるということは行うことはできませんでした。しかし指導案を作るということは、やっとその授業のスタートラインに立てるということだと思いました。このスタートラインに立つまでとても大変なことですが、本当にやりがいがあることだと思います。スター

トに立つまでどれだけ準備しているか、どれだけ考えているか本当にやっている人こそスタートラインに立つ気持ちも変わってくるだろうし、そこから踏み出す一歩もすごく大きな一歩になるだろうと感じました。私自身そのスタートラインに本当に立てるように教材に対する研究、授業について考えていかないといけないと思いました。

岸川友飛

数学指導設計の講義を受けてみて、振り返ると指導案を作る難しさがわかった。先生にアドバイスや道しるべを作ってもらっているにもかかわらずうまくできなかったり、話し合いの最中に考え込んだりして進まなかったことも多々ありました。また、グループのメンバーがそれぞれ学年と学科が違ったため、話し合いに集まれなく、僕は特に授業や急用などで話し合いに行けなくてメンバーに迷惑をかけてしまいました。

指導案作りでは、テーマ決めからはスムーズに進んでいたような気はしていましたが、それからの段階でつまづくことが多く、支援のあり方や問題設定で特に苦労しました。授業の成り立ちが支援なくてはできない形になっていて自力解決ができない形になっており、問題設定も授業の流れに沿っていないような形になっていて、そこを設定するのにとても苦労しました。話し合ってもいい答えが見つからずに多くの時間を費やした感じがありました。難しくて考えることだらけでしたが、とても勉強になったし、教育実習もまだ行ってないのでこの経験、講義が実習につながるといいなと思います。

堤本洋介