

数学学習指導設計

## 高等学校数学 B

### 「数列：漸化式」

H1

佐々木 翔平  
谷村 徹  
山形 直也

## 目次

1.	テーマ・・・・・・・・・・	2
2.	教材研究・・・・・・・・・・	2
3.	単元の指導計画・・・・・・・・	9
4.	展開案・・・・・・・・・・	9
5.	自評・・・・・・・・・・	16

## 1. テーマ

### 単元

数学 B 数列 (漸化式)

### 目標

ハノイの塔の問題にふれ、動作の中から規則をみつけ漸化式の存在を知る。また、漸化式から一般項を求めることに興味をもたせる。

### 設定理由

ここまでの単元で、等差数列・等比数列、そしてそれらの和について学習してきた。漸化式とは隣接した二つの項の関係式、各項がそれ以前の項の関数として定まるという意味で数列を再帰的に定める等式である。

生徒は $a_{n+1}$ と $a_n$ などが一つの等式であらわされている問題に初めて直面する。これまでとは、与えられた数列から規則を見つけ一般項を求める、また和を求めることを学習してきたが、漸化式から一般式を導く作業において、なぜ漸化式というものが必要なのかと感じる生徒、また具体的な事象に結びづけにくくとまどう生徒は少なくない。

本時ではまず漸化式に初めて生徒がふれる授業にあたって、「ハノイの塔」をつかった問題を通して、具体的な事象から漸化式にふれる。

## 2. 教材研究

### 2.1 数学史

(ア)フィボナッチ数列とは

はじめの2つの1を除いたこの数列のそれぞれの数が、その1つ前の数と2つ前の数との和になっている数列。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, . . . . .

(イ) フィボナッチ数列の性質

フィボナッチ数列のもともとの式は

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_1 = a_2 = 1$$

つまり、

第  $n$  項は第  $n-1$  項と第  $n-2$  項の和

であり、ある項はその項の1つ前のと2つ前の項だけによる数であったが、式変形することで次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - u_2, \\ u_2 &= u_4 - u_3, \\ u_3 &= u_5 - u_4, \\ &\dots \\ u_{n-1} &= u_{n+1} - u_n, \\ u_n &= u_{n+2} - u_{n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。これらの等式を加えれば

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

が成り立つ。あとは  $u_1 = 1$  であることを使えばよい。

2. 奇数の番号をもつフィボナッチ数の和：

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}. \quad (4)$$

この等式を証明するため

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ u_3 &= u_4 - u_2, \\ u_5 &= u_6 - u_4, \\ &\dots \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2} \end{aligned}$$

とかく。これらの等式を加えれば、求める等式が求められる。

3. 偶数番号をもつフィボナッチ数の和：

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \quad (5)$$

(3)により

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

が成り立ち、この等式から等式(4)をひけば

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

が求められ、これは求めている等式である。

さらに(4)から(5)をひけば

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1 \quad (6)$$

ウ・オロビエフ、マルクシェヴィチ著 筒井孝胤訳 フィボナッチ数再帰数列より

性質 1.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$$

この性質は $a_{n+2}$ の項と初項から $a_n$ の項までとの関係を表した式で、このとき $a_{n+2}$ の一つ前の項である $a_{n+1}$ は必要ない。

性質 2.

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$$

この性質は偶数番目の項が1つ前までの奇数項だけの和で表されている。このとき二つ・四つ前の偶数項は必要ない。

性質 3.

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$$

この数列は奇数番目の項が一つ前までの偶数項だけの和で表されている。このときも二つ前の項は関係ない

これらの性質のように、フィボナッチ数列は簡単な式変形で別の面白い表現・性質をみることができる

(ウ)「フィボナッチ数列」と「黄金比」との関係

フィボナッチ数列のとなり合う2数の比を分数の形にならべた数列は

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \frac{233}{144}, \dots$$

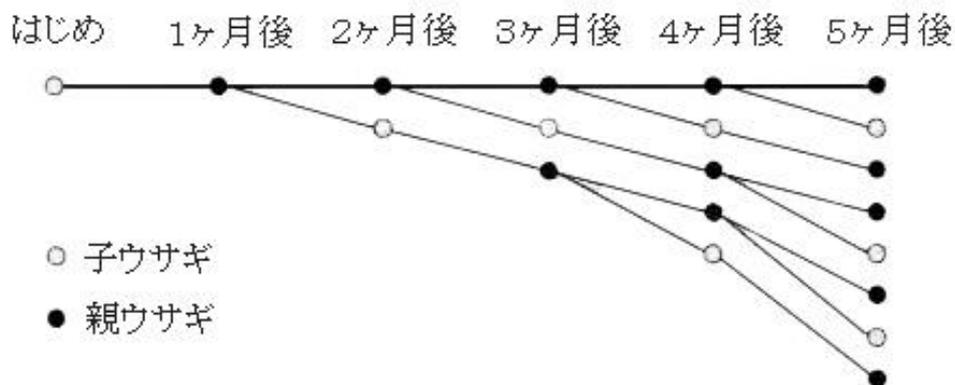
となり、以下のような性質がみられる。

隣り合う2数の比	1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13
2数の比の値	1	2	1.5	1.666...	1.6	1.625	1.615...

2数の比の値に注目すると、黄金比 1.6180339887... に近づいていくことがわかる。

(エ)教科書との比較

「1対の子ウサギがいる。子ウサギは1ヶ月たつと親ウサギになり、その1ヶ月後には1対の子ウサギを生むようになる。どの対のウサギも死なないものとすれば、1年間に何対のウサギが生まれるか。」(数研出版 平成15年度 数学B p103にも記載)

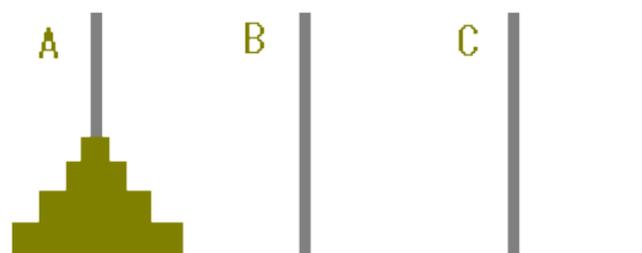


教科書にも具体的事象として漸化式の単元の最後にこの問題があげられているが、一般式などは書かれておらず、あくまで参考程度の扱いである。

漸化式を学ぶにあたって具体的事象から式のイメージを持つことは重要であり、今後は具体的事象から漸化式に触れるという方針をとる。また、このとき扱う事象についてはフィボナッチ数列だけでなく、どういう意図で具体的事象を扱うのか、さらに生徒がより漸化式の良さなどが実感できる事象であるかに重点を置く。今回「ハノイの塔」の事象を使った問題に決定した。理由は、ハノイの塔の円盤を別の場所へ移動する作業は、教科書や筆箱などを円盤と見立てて、実際生徒が手を動かす動作から生徒自身が漸化式に触れる状況を作れるのではないかと考えたからだ。

(オ)漸化式の具体的事象「ハノイの塔」について

- ① 一回に 1 枚しか動かすことが出来ない。
- ② 移動の途中で、小さい円盤の上に大きい円盤が乗ってはいけない。
- ③ 3 本の棒以外のところに、円盤を置いてはいけない。



「 $n$  枚」の円盤があったとき、3 本目に移し終わるのに「 $a_n$ 回」かかる、と表したとき、円盤が 1 枚増えて、「 $n + 1$  枚」だったなら、かかる回数は「 $a_{n+1}$ 回」と表す。

初めに  $n + 1$  枚の円盤があったならば、一番下の大円盤以外の  $n$  枚を 2 本目の棒に移動するのに、 $a_n$ 回が必要である。そのあと、一番下の大円盤を 3 本目に移動するのに 1 回かかり、最後に 2 本目に刺さった  $n$  枚の円盤を、3 本目の大円盤の上に移すのに、また  $a_n$ 回かかる。よって、漸化式は

$$a_{n+1}=2a_n+1 \quad , \quad a_1=1$$

となる。

## 2.2 指導要領

平成 17 年度

まず隣接する 2 項の間関係に着目して、数列を一次の形の漸化式で表現できるようにする。さらに、漸化式の意味を理解させるとともに、漸化式を用いて表された簡単な数列の一般項を導くことについて考察させる。例えば、 $a_{n+1}=3a_n+1$  ,  $a_1=1$  のように、 $a_{n+1}$ が $a_n$ の一次の形で表されている数列を扱うことなどが考えられる。

教科書 平成 19 年度 数研出版 数学 B

$p, q$  は定数で、 $p \neq 0$  とする。数列  $\{a_n\}$  が漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad \dots\dots ①$$

を満たしているとき、一般項  $a_n$  を求める方法を考えよう。

等式

$$c = pc + q \quad \dots\dots ②$$

を満たす定数  $c$  を考えて、①の辺々から

$$\begin{array}{r} a_{n+1} = pa_n + q \\ -) \quad c = pc + q \\ \hline a_{n+1} - c = p(a_n - c) \end{array}$$

②の辺々を引くと

$$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$

すなわち、数列  $\{a_n - c\}$  は公比  $p$  の等比数列であり、このことを利用して、 $a_n$  が求められる。

平成 21 年度

数列を漸化式で表現し、漸化式の意味を理解させる。また、簡単な漸化式を用いて表された数列の一般項を求めることができるようにする。「簡単な漸化式」とは、一次の形の隣接二項間の漸化式のことである。

指導に当たっては、「ハノイの塔」などの具体的な事象と結びつけて漸化式を取り上げ、その有用性や一般項を求める意味を理解させることが大切である。

平成元年度

数学A

目標：「数学Ⅰ」より広い内容として、数と式、平面幾何、数列又はコンピュータを用いる計算について理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し処理する能力を育てる

内容

数列

- ア 数列とその和
- イ 漸化式と数学的帰納法
- ウ 二項定理

平成11年

数学B

目標：数列、ベクトル、統計又は数値計算について理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに、それらを活用する態度を育てる

内容

数列

- ア 数列とその和
- イ 漸化式と数学的帰納法

平成21年

数学B

目標：確率分布と統計的な推測、数列又はベクトルについて理解させ、基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し表現する能力を伸ばすとともに、それらを活用する態度を育てる

内容

数列

- ア 数列とその和
- イ 漸化式と数学的帰納法

(ア)違いについて

- 1) 数列は平成元年は数学Aだったが、それ以降は数学Bで扱っている。
- 2) 平成元年まで数列の中で二項定理を扱っていたが、それ以降では、場合の数と確率の中で扱っている。
- 3) 目標について、平成11年と平成21年では平成元年の文の最後に、「それらを活用する態度を育てる」が加えられている。
- 4) 平成11年までは、目標において、「事象を数学的に考察し処理する」とあったが、平成21年では「事象を数学的に考察し表現する」になっている。

### 3. 単元の指導計画

#### 第1時 漸化式とは (本時)

漸化式の単元に入るにあたって、ハノイの塔の事象より漸化式の存在を知り、良さに触る。

#### 第2時 漸化式を解く

漸化式が立てられ、そこから一般項の求める。

### 4. 展開案

#### 一次指導案

時間配分	教師のはたらきかけと活動	指導上の留意点												
15分	<p>ハノイの塔のルールについて説明。(3枚まで) 教科書、ノート、筆箱などを使って生徒にやらせる。</p> <p style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin: 10px 0;">円盤が1～5枚までの枚数と回数の表を書こう。</p> <p>活動A</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"><tr><td style="border-right: 3px double black; padding: 5px;">枚数 n</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">2</td><td style="padding: 5px;">3</td><td style="padding: 5px;">4</td><td style="padding: 5px;">5</td></tr><tr><td style="border-right: 3px double black; padding: 5px;">回数</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">3</td><td style="padding: 5px;">7</td><td style="padding: 5px;">15</td><td style="padding: 5px;">31</td></tr></table> <p>の表がかける</p>	枚数 n	1	2	3	4	5	回数	1	3	7	15	31	
枚数 n	1	2	3	4	5									
回数	1	3	7	15	31									

	<p><u>考えられる生徒</u></p> <p>生徒 1 ハノイの塔のルールが理解できない</p> <p>生徒 2 枚数が増えると正しい回数が見つけれない</p> <p>生徒 3 表が書ける</p> <p><u>支援</u> 生徒 1・2 への支援 もう一回目の前でやって見せる</p>	
10 分	<p style="border: 1px dashed black; padding: 5px;">円盤が 6 枚のときは何回になるか</p> <p><u>活動 B</u></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>答えの 6 3 回が求められる。</p> </div> <p><u>考えられる生徒</u></p> <p>生徒 1 実際円盤を動かして求めようとする</p> <p>生徒 2 動作の手順より予測から求めようとする</p> <p><u>支援</u> 生徒 1 への支援 円盤の動かすとき決まりがなかったか気付かせる。</p>	

15分	動作の決まりから漸化式を考えてみよう	
	<p>活動 C</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;">漸化式が立てられ円盤 10 枚のときが予測できる</div>	

#### 一次指導案の改善すべき点

- ・活動の設定にもっと意図をもたす
- ・漸化式を知らない生徒に活動 C は適切でない
- ・漸化式を登場させる場面を工夫する
- ・初めにはっきりとした問題を提示し、それに向けての活動や支援をかんがえる

#### 最終指導案

時間配分	教師のはたらきかけと活動	指導上の留意点
5分 ハノイの塔 のルール説 明	円盤が3枚のときまで説明し、4枚・5枚となるか生徒に教科書・ノート・筆箱などをつかってしらべる。	しっかりルールを理解させる

25分  
問題提示

問題 円盤を何枚に設定すれば 1 時間以内に作業が完了するのか、その最大枚数を求めよ。ただし、円盤を一枚動かすのに 3 秒かかるとする。

表を書く

枚数と回数の表を書きましょう。

一般項を予想できる

活動 A

枚数 n	1	2	3	4	5	.....
回数	1	3	7	15	31	.....

の表が書ける。

考えられる生徒

生徒 1

すべて実際円盤を動かして考える

生徒 2

行動のきまりより予想を立てる

支援

生徒 1 への支援

動作のきまりがないか考えさせる

円盤 4、5 枚のときをつかって説明

何と何についての表を書くのかという

回数を数列 $a_n$ とにおいて一般項を導こう。

活動 B

一般項

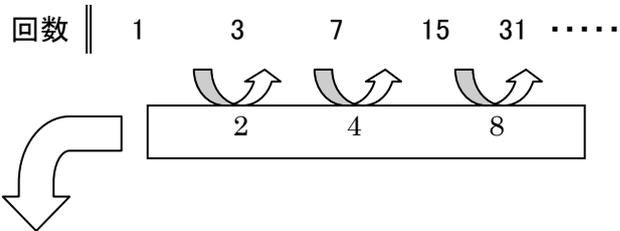
$$a_n = 2^n - 1$$

が求められる

考えられる生徒

生徒 1

表の回数の階差より一般項を予想させる。

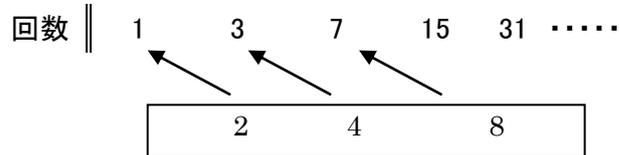


階差の和の公式より求める

$$\left( \begin{array}{l} n \geq 2 \text{ のとき} \\ a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \end{array} \right)$$

生徒 2

表の関係



↑ の関係よりもとめる

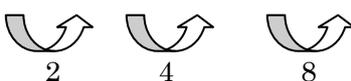
これらのどちらからもとめてもよい

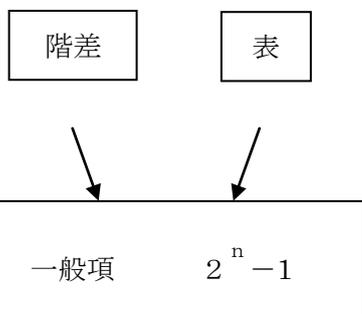
生徒 3  
 $a_n$ が求められない

支援  
生徒 3 への支援

$a_n$ の差を考えて、その数列( $b_n$ )の一般項を求めよう。

枚数	1	2	3	4	5	.....
n						
回数	1	3	7	15	31	.....





生徒 1・2 であげた  $a_n$  の求め方のどちらか生徒が理解しやすいほうを選択

<p>20分 漸化式が書ける</p>	<p>ここで求めた式はあくまで予想。 行動のきまりから導けないか。</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>もう一度動作を行い、動かし方にきまりがないか見つけよう。関係から<math>a_n</math>、<math>a_{n+1}</math>を使った式で表してみよう。</p> </div> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p style="text-align: right;">※</p> <p>行動のきまりより  <math>a_2=2a_1+1</math>  <math>a_3=2a_2+1</math>  <math>a_4=2a_3+1</math>  <math>\cdot</math>  <math>\cdot</math>  <math>\cdot</math>  の関係であることに注目させる。</p> </div> <p>これらの関係より</p> <p>漸化式</p> $a_{n+1}=2a_n+1$ $a_1=1$ <p>が得られる。</p>	<p>生徒に円盤を動かすにあたって気がついたことを発表させる</p>
------------------------	---	------------------------------------

次回今回もとめた漸化式を解く導入にはいる。

## 5. 自評

### 佐々木翔平

私はこの授業で初めて指導案作りに取り組んだ。この授業の中で「半年間で指導案ひとつできるかできないかだ」と聞いて驚いた。また、その大変さがどのようなものか想像できなかった。

実際に数学史を読んだり、教科書比較をしたりする中で内容の読解が難しく、指導案の構成に至るまでに時間がかかると改めて感じた。特に大変だったのが、歴史を調べること。本は見つけていても、書いてある内容が深く、その内容を理解するのに困難を極めた。しかし、本の内容を読み込んでいくうちに「数学って面白い」「こんなことがあるんだ」という新たな発見に繋がり、ますます「数学」という科目に興味を持った。

教員になり、生徒にどうやって数学の面白さを伝えていくのか、どんな授業、カリキュラムの計画が求められているのかということをもっと勉強しなければならぬと感じたし、数学を苦手としている子ども達に数学に興味を持ってもらえるように指導計画を考えたいと思った。

### 谷村徹

漸化式・数列の歴史を調べて、今回はとくにフィボナッチ数列についてを調べて改めて数学の奥深さを感じた。

私はフィボナッチ数列についてどんな数列なのかなんとなく知っていたが、今回調べてこの数列がどのように生まれたのか、また式変形により別の表現・性質を見ることができ、驚かされた。さらにフィボナッチ数列だけでなく、漸化式とかかわりが持てる具体的事象がたくさんあることも知った。

私の高校での学習で漸化式というと、ただ公式にあてはめて形式的に解くというイメージがあったが、具体的事象から漸化式を学べば、生徒はイメージしやすく、また漸化式の性質よさについて知った上で問題を解くことで、真の数学力がつくのではないかと考えた。

漸化式の授業設計を行うにあたって、漸化式を教える際、どのような過程でどの問題・事象を扱えば生徒が理解・イメージしやすいのか、事象・問題の選択に苦労した。

今回の指導案は漸化式から一般項を導く手前までしか考えることができなかったが、今後の授業内容についても考えていきたい。

## 山形直也

今回、半年かけて一つの授業を作ってきたが、それだけの時間をかけても満足いく授業を作ることが困難だということに教師の難しさを改めて感じさせられた。これから半年もかけることはまずないのでこの経験を活かしていきたい。また数学の指導設計をして、良い問題設定を行うことがいかに難しく、大切かということが分かった。今までは良い授業を行うにはどうすれば良いかということばかりを考えていたが、そもそも問題自体が良いものでなければ、そこから学び取れるものがあまりない。これから教師をしていく上で、そこで生徒が何を学ぶべきかをまず考え、適した問題設定をして行きたい。

また、今まで自分が受けてきた授業が教師主体だったのでそうなりがちだが、そうでなく、いかに生徒に考えさせ答えを導かせることができるかということを念頭に置いて授業設計を行っていきたい。

## 参考文献

- ・「フィボナッチ数再帰数列」

著者：ヴォロビエフ、マルシェヴァイ 筒井孝胤訳