

数学学習指導設計Ⅱ

中学校 第2学年

単元名「図形と合同」

テーマ：初めての証明

三角形の合同条件を利用した証明

J2

掃部 裕文

西村 紗也香

松岡 一弘

渡邊 一輝

目次

1,	単元の設定理由	2
2,	具体的な内容	2
3,	小学校とのつながり	2
4,	新学習指導要領解説	3
5,	ユークリッド原論について	9
6,	三角形の合同条件の証明 1 (不十分)	10
7,	三角形の合同条件の証明 2 (不十分)	11
8,	三角形の合同条件の証明 3 (余弦正弦定理の利用・不十分)	13
9,	三角形の合同条件の証明 4	14
10,	教科書分析	20
11,	証明の導入	22
12,	問題作成	23
13,	自力解決と支援 (1)	25
14,	自力解決と支援 (2)	26
15,	自力解決と支援 (3)	27
16,	個人の感想など	33

1, 単元の設定理由

中学校第2学年 図形と合同

図形の合同など、図形の問題の基本である。また、言葉による証明をするようになったり図形を読み取る力などが必要になり、苦手な人がでてくるため。ここでつまずけば、図形の問題ができなくなるので、基本をしっかり押さえさせるため。

2, 具体的な内容

三角形の合同条件

図形と合同の最初に学習する内容で、今後の証明などに使われるから。例えば直角三角形や平行四辺形であることを示すための証明に使われる。

3, 小学校とのつながり

小学校の高学年で取り扱う内容は合同な図形をかいたり、作ったりする活動。中学校で知らない概念をやるよりも、少しでも知識があるほうが良いので、さらに中学生では合同条件を使って、より正確な合同について学ぶ。

4. 数学指導要領 解説

中学校第2学年

多角形の角についての性質

三角形の角についての性質を基に、多角形の内角の和や外角の和などを扱う。

多角形の内角の和については、結果も重要であるが、多角形を基本の図形である三角形に分割することによってその結果が見いだせるということを知ること大切なねらいである。これは、「既知のことに帰着して考える」という数学的な見方や考え方である。また、多角形の外角についても、内角の和を既知のこととし、これを用いるなどしてその和を求めることができるようにする。なお、三角形や四角形の内角の和については、小学校算数科においても学習してきているので、その求め方や結果について振り返ることも大切である。

(2)図形の合同について理解し図形についての見方を深めるとともに、図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察し表現する能力を養う。

ア平面図形の合同の意味及び三角形の合同条件について理解すること。

イ証明の必要性と意味及びその方法について理解すること。

ウ三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめたり、図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること。

〔用語・記号〕

定義 証明 逆 ≡

〔内容の取扱い〕

内容の「B図形」の(2)のウに関連して、正方形、ひし形、長方形が平行四辺形の特別な形であることを取り扱うものとする。

(1)では、平面図形の角に関する性質を、平行線の性質を使って導き、確かな根拠を基にして筋道を立てて考え説明することを経験した。ここでは、さらに三角形の合同条件を使って、図形の性質を演繹的に確かめ、論理的に考察し表現する能力を養うことを大きなねらいとしている。

小学校第3学年では二等辺三角形の性質について、また、第4学年では平行四辺形の性質について、それぞれ図形の角や辺に着目し、実験、実測、観察などによって調べてきている。

中学校第2学年では、論理的に筋道を立てて推論することによって、図形の性質を調べることができるようにする。さらに、調べる過程やその結果について説明し伝え合う活動を通して、適切に表現できるようにすることが重要なねらいである。

なお、これまで中学校第2学年で扱われていた円周角と中心角の関係は、今回の改訂で中学校第3学年の内容とした。これは、第2学年における図形の性質の学習に引き続き、それらの性質を用いて数学的に推論することにより、円周角と中心角の関係について考察し、その関係を具体的な場面で活用することを重視したためである。

合同の意味と三角形の合同条件

二つの図形は、次のそれぞれの場合に合同である。

- ① 一方の図形を移動して他方の図形に重ねることができる
- ② 二つの図形の対応する線分と対応する角がすべて等しい

①は、第1学年で学習した図形の移動という操作に基づいて、図形の合同を動的に定義するものである。一方、②は線分で囲まれた図形の合同の静的な定義である。第2学年ではこれらの定義によって、三角形の合同条件などを基に、図形の性質を演繹的に確かめ、論理的に考察し表現する能力を養うことをねらいとしている。

ここでは、三角形の合同条件も平行線の性質と同様に演繹的に考えて導く対象とするのではなく、三角形の決定条件を基に、直観的、実験的に認める。

二つの三角形は、次のそれぞれの場合に合同となる。

- ・対応する3組の辺がそれぞれ等しい
- ・対応する2組の辺がそれぞれ等しく、その間の角が等しい
- ・対応する1組の辺が等しく、その両端の角がそれぞれ等しい

三角形の三つの辺、三つの角の6要素のうち、上の三つのそれぞれの場合の3要素で合同かどうかを判定できることを理解できるようにすることが大切である。そして、これらを推論の根拠として用いることが重要である。なお、三角形の決定条件は、第1学年における作図指導の際に扱うことも考えられる。

「二等辺三角形の底角は等しい」ことと上の三角形の合同条件から、次の直角三角形の合同条件を演繹的に導くことができる。

二つの直角三角形は、次のそれぞれの場合に合同となる。

- ・斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しい
- ・斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい

三角形の合同条件は、角を移す作図、角を二等分する作図などの正しいことの証明にも使われるが、三角形の合同条件を適用する範囲は極めて広い。その適用の度合いには、1組の図形が合同であることを示すものから、補助線をひくなどして、複数の図形の組が合同であることの証明を重ねて結論を導く問題に適用するものまで、その程度の差は大きい。したがって、指導に当たっては、生徒の理解の程度や発達の段階に応じた適切な取扱いが必要である。

数学的な推論

数学的な推論の必要性和意味及びその方法を理解し、これを用いる学習は、図形の領域だけで行われるものではなく、他の領域でも必要に応じて行われるものである。しかしながら、数学的な推論の必要性和意味の理解やその適用場面を考えると、具体的な図形を通して推論の過程等を視覚的にとらえることができることなどから図形の領域が適している。

数学的な推論には、帰納、類推、演繹の三つの方法がある。帰納と類推は、小学校算数科でも多くの場面で用いられてきている。これらは、いくつかの場合についての観察、操作や実験などの活動を通して、それらを含んだより一般的な結果を導き出す際に用いられる。また、演繹も小学校算数科において用いられている。帰納や類推は、新たな事柄の発見のために大切である。演繹は、その発見された事柄が正しいことを説明するために大切である。こうした三つの推論の役割を理解し、必要な場面に応じてそれらの推論の方法を適切に選択して活用できるようにする必要がある。

演繹的に考えるためには、推論の根拠となる事柄を明確にしておかなければならない。「B図形」の領域でその推論の根拠となる事柄としては、対頂角の性質、平行線の性質、三角形の合同条件などが考えられ、それらを基にして演繹的に考え、図形の性質を確かめていく学習が中学校第2学年から本格的に始められる。

ただし、論理的に筋道を立てて推論していくことは、第2学年になって初めて学習するものではない。すでに第1学年において、平面図形の作図の場面や空間図形の構成等の場面でも、それまでに学習してきた事柄を根拠にして理由を述べてきている。つまり、第1学年においても部分的、局所的には演繹的に考えることを経験している。

第2学年においては、推論の過程を正確に、しかも分かりやすく表現する能力を養うことが指導の大切なねらいである。しかし、これは一挙に達成できるものではない。そこで、はじめは、根拠を明らかにして説明し伝え合う活動を通して、推論の過程を自分の言葉で他者に分かりやすく表現することを大切にする。そして、「ゆえに」、「または」、「かつ」、「したがって」、「一方」、「よって」などの言葉や用語、記号を使う

ことに慣れるようにし、漸次、推論の過程を正確に、しかも分かりやすく表現する能力を高めていく。

証明を書くことの指導に当たっては、簡単な推論について、まず証明の構想や方針をたて、その要点を上述した言葉や用語、記号を適切に用いて自分の言葉で書くことから始め、よりよいものに改めることを大切にする。その際、図形のある性質について、推論の過程が異なる二つの証明を読んでその相違点を説明したり、推論の過程に誤りのある証明を読んでそれを指摘し改善したりするなど、証明を評価する活動を適宜取り入れることも考えられる。証明を書くことについては、第3学年までを見通し、次第に的確に書けるように、段階的に指導していくようにする。

証明の必要性和意味および方法

命題は「仮定」と「結論」からなる。そこで、推論を行う前に命題の「仮定」と「結論」をはっきりさせる。その上で、「仮定」から出発し、すでに正しいと認められている事柄を根拠にして、「結論」を導くこと、それが証明である。命題が正しくないことを証明するには、反例をあげればよい。証明の指導においては、正しいことばかりでなく、正しくないことを説明できるようにすることも必要である。また、命題の「仮定」と「結論」を入れかえると、もとの命題の逆ができる。もとの命題が正しくても、その逆の命題が正しいとは限らないことを確かめ、理解できるようにする。

証明の必要性を理解するためには、観察、操作や実験などの活動によって帰納的に導かれたものと演繹的に導かれたものの違いを理解することも大切である。いくつかの図形について帰納的に見いだした事柄が正しいかどうかを、同じ条件を満たす他の図形で調べることで、その事柄の信頼性をさらに高めることができる。しかし、同じ条件を満たすすべての図形についてその事柄が正しいかどうかを調べることはできない。そこで、演繹的に説明する証明が必要であることを理解できるようにする。

その際、次のことをはっきりさせる。

ア) 証明は、命題が例外なしに成り立つことを明らかにする方法であること。

イ) 証明をするためにかかれた図は、すべての代表として示されている図であること。

また、証明の過程においては、根拠となる事柄を明らかにすることが必要である。証明の根拠となる事柄には、前述したように、対頂角の性質、平行線についての性質と条件、合同な図形についての性質と三角形の合同条件などがある。第3学年になると、これらの事柄に相似な図形についての性質と三角形の相似条件などが加わる。

三角形や平行四辺形の性質

ここでは、すでに学習した平行線の性質、三角形の合同条件などを基にして、演繹的に考えることによって三角形や平行四辺形の性質や条件を考察し、図形についての理解を深めるとともに、論理的に考察し表現する能力を養うことが大切なねらいである。

三角形や平行四辺形について次のような図形の基本的な性質や条件などを扱う。

- ・二等辺三角形の性質
- ・直角三角形の合同条件
- ・平行四辺形の性質
- ・平行四辺形になるための条件
- ・正方形、長方形、ひし形の性質

「二等辺三角形の性質」、「平行四辺形の性質」などはすでに小学校算数科で学んでいるので、ともすると「分かりきっているのにどうして証明するのか」という疑問を生徒が抱きがちである。そこで指導においては、自分が納得したことを他の人にも納得してもらえるように説明することの大切さを強調し、証明の必要性や意味及びその方法について理解できるようにする。

「平行四辺形の性質」に関して、内容の取扱いには、「正方形、ひし形、長方形が平行四辺形の特別な形であることを取り扱うものとする」とある。このことは、長方形、ひし形、正方形の定義、並びに、「平行四辺形になるための条件」から、長方形、ひし形、正方形、平行四辺形の間の関係を論理的に理解できるようにすることを意味しており例えば、右のような図を用いて考えたり、平行四辺形で成り立つ性質は、その特別な形である長方形や正方形などでも成り立つことを、具体的ないくつかの性質を取り上げ確かめたりすることが考えられる。

証明を読んで新たな性質を見いだすこと

三角形や平行四辺形の性質の証明の学習においては、証明を書くだけでなく証明を読むことも大切である。証明を読むことは、図形の性質の証明を見直したり、評価したりする際に必要である。

例えば、「二つの線分 AB 、 CD が点 O で交わり、 $AO=BO$ 、 $CO=DO$ ならば、 $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$ である。」ことの証明を読んで、 $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$ であることの根拠として用いられていない図の中の線分や角の関係を見直すことによって、 $AC=BD$ 、 $\angle OCA=\angle ODB$ 、 $\angle CAO=\angle DBO$ という性質を新たに見いだすことができる。さらに、 $\angle CAO=\angle DBO$ であることから、 $AC \parallel BD$ や四角形 $ACBD$ が平行四辺形であることも見いだすことができる。

ここでは証明を読むことを通して、論理的に考察し表現する能力を養うことが大切である。証明を読んで新たな性質を見いだすことは、「B図形」の領域だけでなく、「A数と式」の領域において、文字を用いた式で数量の関係をとらえ説明することを指導する際にも大切にする必要がある。

小学校第5学年

合同な図形をかいたり，作ったりする活動

この活動は，合同な図形を重ねて写し取ったり，対応の考えを用いたりして，かいたり，作ったりする活動の中で，どのような条件を用いれば合同な図形をかいたり，作ったりすることができるかということに着目し，合同について実感的に理解できるようにすることをねらいとしている。

合同な図形をかいたり，作ったりする活動を通して，三角形の合同については次の条件が必要であることに気付けるようにすることが大切である。

- ・ 三つの辺がそれぞれ等しい
- ・ 二つの辺の長さとその間の角の大きさがそれぞれ等しい
- ・ 一つの辺の長さとその両端の角の大きさがそれぞれ等しい

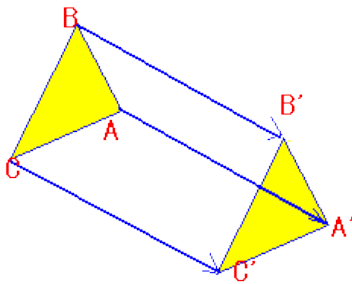
また，かいたり，作ったりした図形が合同であるかどうかを確かめたり，条件にあっているかどうかを確かめたりする活動によって，確かな根拠を基に説明する態度を育てることができる。

5, ユークリッド原論について

ユークリッド原論において「合同」を成立させる操作は、「平行移動」「回転移動」「対称移動」の3つである。あらゆる合同な図形は、これらの移動のいずれか、もしくはその組み合わせによって重ね合わせることが可能である。

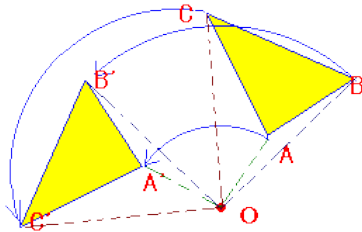
<平行移動>

3つの頂点を一定方向に同じ長さだけ移動させること。



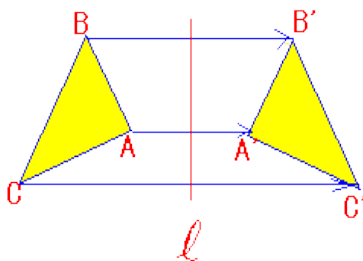
<回転移動>

3つの頂点を、ある点を中心に半径を維持して同じ角度だけ移動させること。



<対称移動>

ある直線に対して線対称に移動させること。



いずれも、合同な三角形を構成する操作である。それは、3つの頂点の関係を維持したまま移動させることと同じである。

6, 三角形の合同条件の証明 (不十分)

・ 3 辺が、それぞれ等しいときの三角形の合同条件

3つの頂点のうちの2つを選んで直線を引くことによって、3本の直線が引け、これによって三角形が構成される。そして、二つの頂点によって決定するのは、単にそれらを通る直線だけでなく、それらを端点とする線分の長さもそうである。よって移動という操作から導かれるのは、「3 辺が、それぞれ等しいとき」の三角形の合同条件である。

・ 2 辺とその間の角が、それぞれ等しいときの三角形の合同条件

線分を1つかくと2つの頂点が決定する。その一端から角度を測り、半直線を引く。その頂点から長さを測り取ると、3つの頂点が決定する。3頂点が決定したことになり、三角形がかけられる。よって移動という操作から導かれるのは、「2 辺とその間の角がそれぞれ等しいとき」の三角形の合同条件である。

・ 1 辺とその両端の角が、それぞれ等しいときの三角形の合同条件

線分を1つかく。その両端から角度を測り、それぞれ半直線を引く。半直線が交わったところに点をとると3頂点が決定し、三角形がかけられる。よって移動という操作から導かれるのは、「1 辺とその両端の角が、それぞれ等しいとき」の三角形の合同条件である。

7, 三角形の合同条件の証明 (不十分)

公理や定理の説明ができていない

[公理 1] 任意の線分 AB および半直線 Og に対して、 Og 上の点 P が存在して、 $OP \equiv AB$ (線分移動公理)

[公理 2] 任意の角 α 、半直線 Og 、および直線 g を境界とする半平面 gu に対して、 gu 上の半直線 Oh がただ 1 つ存在して $\angle O(g,h) \equiv \alpha$ (角移動公理)

[公理 3] 2 つの三角形 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ において $AB \equiv A'B'$ 、 $AC \equiv A'C'$ 、 $\angle A \equiv \angle A'$ なら $\angle B \equiv \angle B'$ (角合同公理)

[公理 4] $AB = A'B'$ 、 $A'B' = A''B''$ ならば、 $AB = A''B''$ (推移律)

<定理 A> 任意の線分 AB および半直線 Og に対して、
 Og 上の点 P がただ 1 つ存在して、 $OP = AB$ となる。

定理を証明すべき

<定理 B> 直線 g を含む平面上で、直線 g に関して 2 点 P 、 Q が異なる側にあり、かつ g 上の異なる 2 点 A 、 B に対して、 $AP = AQ$ 、 $BP = BQ$ ならば、 $\angle ABP = \angle ABQ$ である。

$\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ において、 $AB \equiv A'B'$ 、 $AC \equiv A'C'$ 、 $BC = B'C'$ 、 $\angle A \equiv \angle A'$ 、 $\angle B \equiv \angle B'$ 、 $\angle C = \angle C'$ が成り立つとき、 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ が成り立つ

<2 角とその間の辺がそれぞれ等しいとき 2 つの三角形は合同>

$\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ において、

$AB = A'B'$ 、 $\angle A = \angle A'$ 、 $\angle B = \angle B'$ とする。

[公理 1] によって、直線 $B'C'$ 上に点 B' に関して点 C' と同じ側にある点 D' をとり、 $BC = B'D'$ とすることができる。 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'D'$ について [公理 3] から $\angle BAC = \angle B'A'D'$ となる。仮定により、 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ であるから、角移動の一意性 [公理 2] によって、2 直線 $A'D'$ と $A'C'$ は一致する。ゆえに、2 点 D' 、 C' は一致して、 $BC = B'C'$ となる。同様に、 $AC = A'C'$ が成り立つ。さらに、[公理 3] から $\angle C = \angle C'$ となる。ゆえに $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ である。

<2 辺とその間の角がそれぞれ等しいとき 2 つの三角形は合同>

$\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ において、

$AB=A'B'$ 、 $AC=A'C'$ 、 $\angle A=\angle A'$ とする。

[公理 3]から $\angle B=\angle B'$ となる。

ゆえに、＜2 角とその間の辺がそれぞれ等しいとき 2 つの三角形は合同＞から
 $\triangle ABC \equiv \triangle A'C'B'$ である。

＜3 辺がそれぞれ等しいとき 2 つの三角形は合同＞

$\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ において、

$AB=A'B'$ 、 $AC=A'C'$ 、 $BC=B'C'$ とする。

[公理 1]、[公理 2]によって、 $\triangle ABC$ を含む平面上で、直線 AB に関して点 C と異なる側にある点 P および同じ側にある点 Q をとり、 $AP=A'C'$ 、 $\angle BAP=\angle B'A'C'$ 、 $AQ=A'C'$ 、 $\angle BAQ=\angle B'A'C'$ となるようにする。＜2 辺とその間の角がそれぞれ等しいとき 2 つの三角形は合同＞から、 $\triangle ABP \equiv \triangle A'B'C'$ 、 $\triangle ABQ \equiv \triangle A'B'C'$ となり、したがって $BP=B'C'$ 、 $BQ=B'C'$ である。線分の合同については、[公理 4]が成り立つから $AP=AQ=AC$ 、 $BP=BQ=BC$ である。ゆえに、＜定理 B＞から、 $\angle ABP=\angle ABQ$ 、 $\angle ABP=\angle ABC$ となる。角移動の一意性[公理 2]から、2 直線 BC 、 $B'C'$ は一致する。ゆえに線分移動の一意性＜定理 A＞から、2 点 Q 、 C は一致する。したがって、 $\triangle ABQ$ と $\triangle ABC$ は一致して、 $\triangle ABC \equiv \triangle A'C'B'$ である。

(参照)

・「基礎数学シリーズ 4 幾何学入門」

著作:瀧澤精二

発行:朝倉書店 昭和 42 年 9 月 20 日

8, 三角形の合同条件の証明 (余弦正弦定理の利用・不十分)

・ 3 辺が、それぞれ等しいときの三角形の合同条件

3つの頂点のうちの2つを選んで直線を引くことによって、3本の直線が引け、これによって三角形が構成される。そして、二つの頂点によって決定するのは、単にそれらを通る直線だけでなく、それらを端点とする線分の長さもそうである。よって移動という操作から導かれるのは、「3 辺が、それぞれ等しいとき」の三角形の合同条件である。

「3 辺がそれぞれ等しいときの三角形」の合同条件を利用して2 辺とその間の角がそれぞれ等しいときの三角形の合同条件と、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいときの三角形の合同条件の証明を示す。

・ 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいときの三角形の合同条件

仮定より、 $b=b'$ 、 $c=c'$ 、 $\angle A=\angle A'$ だから、余弦定理より、

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos A' = b^2 + c^2 - 2bccosA = a^2$$

だから $a'=a$ となる。

よって、3 辺がそれぞれ等しいときの三角形の場合に帰着される。

余弦定理を
証明してい
ない

・ 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいときの三角形の合同条件

仮定より、 $a=a'$ 、 $\angle B=\angle B'$ 、 $\angle C=\angle C'$ だから、 $\angle A'=\pi-(\angle B'+\angle C')=\pi-(\angle B+\angle C)=\angle A$ 。よって、 $\sin A'=\sin A$ 、 $\sin B'=\sin B$ 、 $\sin C'=\sin C$ 。正弦定理より、

$$\frac{a'}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B'} = \frac{c'}{\sin C'}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

正弦定理
を証明し
ていない

だから、 $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ 。一方、 $a'=a$ より $b'=b$ 、 $c'=c$ であるから、3 辺がそれぞれ等しいときの三角形の場合に帰着される。

(参照)

・「なぜ初等幾何学は美しいか 三角形幾何学」

著者:Yvonne Sortais, René Sortais

発行:東京出版 2002 年 11 月 7 日

9, 三角形の合同条件の証明

ユークリッド幾何でははじめにいくつかの基本法則を定め、これを公理とよぶ。そして公理から出発して論理的な推論によってつぎつぎといろいろな法則を導き出していく。このようにして導き出された法則が定理であり、定理を導き出す推論がその証明である。

[公理 3] 線分 AB 上の点 C が A と B のいずれとも異なるとき、

等式 $AB=AC+CB$ が成り立つ。

→この等式から不等式 $AC<AB$ 、 $CB<AB$ が従うことは明らかである。

[公理 4] 点 C が $\angle AOB$ の内部にあるとき、

等式 $\angle AOB=\angle AOC+\angle COB$ が成り立つ。

→この等式から不等式 $\angle AOC<\angle AOB$ 、 $\angle COB<\angle AOB$ が従う。

[公理 5] $\triangle ABC$ と一直線上にない任意の三点 O,P,Q に対して、

半直線 OP 上の点 B' と直線 OP に関して Q と同じ側にある点 C' を

合同式 $\triangle OB'C'\equiv\triangle ABC$ が成り立つように定めることができる。

[定理 4] $\angle AOB$ が平角でないとき、半直線 OC が線分 AB と A と B の間の一点で交わるならば、点 C は $\angle AOB$ の内部にある。

<証明>半直線 OC と線分 AB の交点を D とすれば、

C と D は直線 OA の同じ側にある。また、 D が A と B

の間にあるから、 D と B は直線 OA の同じ側にある。

ゆえに直線 OA に関して C は B と同じ側にある。同様に直

線 OB に関して C は A と同じ側にある。ゆえに C は $\angle AOB$

の内部にある。

[定理 6] 二点 B と C が直線 OA の同じ側にあるとき、半直線 OB と半直線 OC が一致しないならば、点 C が $\angle AOB$ の内部にあるか、または点 B が $\angle AOC$ の内部にある。

<証明>点 C は直線 OB 外にある。なぜなら、

仮定により C と B は直線 OA の同じ側にある

から、C が直線 OB 上にあれば半直線 OC と半直線 OB が一致することになって仮定に反するからである。ゆえに C は直線 OB に関して A と同じ側にあるか、A の反対側にあるか、のいずれかである。

C と A が直線 OB の同じ側にある場合には、仮定により C と B は直線 OA の同じ側にあるから、C は $\angle AOB$ の内部にある。

C と A が直線 OB の反対側にある場合には線分 AC は直線 OB と交わる。その交点を D とすれば、直線 OA に関して D は C と同じ側にあり、C は B と同じ側にあるから、D は B と同じ側にある。ゆえに直線 OB 上で D と B は点 O の同じ側にある。すなわち半直線 OB は線分 AC と A と C の間の点 D で交わる。ゆえに定理 4 により、B は $\angle AOC$ の内部にある。

[定理 10] 半直線 OA 上に O と異なる点 C をとったとき、 $OC=OA$ ならば C は A と一致する。

<証明>背理法による。C が A と一致しないとすれば、A が O と C の間にあるか、または C が O と A の間にある。したがって、[公理 3]により、 $OA < OC$ または $OC < OA$ であることになって、 $OC=OA$ に矛盾する。ゆえに C は A と一致する。

[定理 11] 直線 OA の同じ側に点 B と点 C をとったとき、 $\angle AOB = \angle AOC$ ならば、半直線 OC と半直線 OB は一致する。

<証明>半直線 OC と半直線 OB が一致しないとすれば、[定理 6]により、C が $\angle AOB$ の内部にあるか、または B が $\angle AOC$ の内部にある。したがって、[公理 4]により、 $\angle AOC < \angle AOB$ または $\angle AOB < \angle AOC$ となって $\angle AOC = \angle AOB$ に矛盾する。よって、半直線 OC と半直線 OB は一致する。

[定理 14] $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において $AB=DE$ ならば、直線 DE に関して F と同じ側にある点 C' を合同式

$$\triangle DEC' \equiv \triangle ABC$$

が成り立つように定めることができる。

＜証明＞ $\triangle ABC$ と三点 D 、 E 、 F に公理 5 を適用して点 B' と点 C' を定めれば、 B' は半直線 DE 上にあり、 C' は直線 DE に関して F と同じ側にあつて

$$\triangle DB'C' \equiv \triangle ABC$$

となる。したがつて $DB' = AB$ であるが、仮定により $AB = DE$ であるから $DB' = DE$ 、ゆえに、定理 10 により、 B' は E と一致し、したがつて $\triangle DEC' \equiv \triangle ABC$ である。

[定理 15] (2 辺とその間の角がそれぞれ等しければ合同)

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

$$AB = DE, AC = DF, \angle A = \angle D$$

ならば

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

である

＜証明＞仮定により $AB = DE$ であるから、定理 14 により、直線 DE に関して F と同じ側にある点 C' を

$$\triangle DEC' \equiv \triangle ABC$$

となるように定める。このとき点 C' が F と一致することを証明すればよい。

まず、仮定により $\angle A = \angle D$ であるから

$$\angle EDC' = \angle A = \angle EDF$$

ゆえに、定理 11 により、半直線 DC' と半直線 DF は一致する。すなわち C' は半直線 DF 上にある。

つぎに、仮定により $AC = DF$ であるから

$$DC' = AC = DF$$

ゆえに、定理 10 により、 C' は F と一致する。

[定理 16]

二等辺三角形の底角は等しい。すなわち $\triangle ABC$ において、 $AB = AC$ ならば $\angle B = \angle C$ である。

＜証明＞

$\triangle ABC$ と $\triangle ACB$ に定理 15 を適応すれば、

$$AB = AC, AC = AB, \angle A = \angle A$$

であるから合同式

$$\triangle ABC \equiv \triangle ACB$$

を得る。よつて、

$$\angle B = \angle C$$

である。

[定理 17] (1 辺とその両端の角が、それぞれ等しいときの三角形の合同条件)

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において

$$AB = DE, \angle B = \angle E, \angle A = \angle D$$

ならば

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

<証明>

$AB = DE$ であるから定理 14 により、直線 DE に関して F と同じ側に点 C' をとって

$$\triangle DEC' \cong \triangle ABC$$

となるようにする。仮定より $\angle A = \angle D$ であるから

$$\angle EDC' = \angle A = \angle EDF$$

となる。ゆえに定理 11 により半直線 DC' は半直線 DF と一致する。同様に半直線 EC' と半直線 EF は一致する。ゆえに $\triangle DEC'$ と $\triangle DEF$ は一致し、したがって $\triangle DEF \cong \triangle ABC$

[定理 19] (3 辺が、それぞれ等しいときの三角形の合同条件)

三辺がそれぞれ相等しい三角形がごうどうである。すなわち $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad CA = FD$$

ならば

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

である。

<証明> 直線 DE に関して F の反対側に点 Q をとり、 $\triangle ABC$ と三点 D, E, Q に公理 5 を適用して、半直線 DE 上の点 B' と直線 DE に関して Q と同じ側にある点 C' を

$$\triangle DB'C' \equiv \triangle ABC$$

となるように定める. そうすれば

$$DB' = AB = DE$$

であるから, B' と E は一致し, したがって

上の合同式は

$$(1) \quad \triangle DEC' \equiv \triangle ABC$$

となる. ゆえに

$$\triangle DEC' \equiv \triangle DEF$$

であることを証明すればよい. 仮定により $CA = FD$, (1) により $C'D = CA$ であるから $C'D = FD$, 同様に $C'E = FE$ である. ゆえに, 二辺夾角の合同定理により, $\triangle DEC' \equiv \triangle DEF$ を証明するには

$$(2) \quad \angle DC'E = \angle DFE$$

であることをいえばよい.

直線 DE に関して Q と F は反対側に, C' と Q は同じ側にあるから, C' と F は反対側にある. すなわち, 線分 FC' は直線 DE と交わる. その交点を P とすれば, P は i) D と E の間にあるか ii) 線分 DE の延長上にあるか, または iii) D, E のいずれかと一致する.

P が D と一致しないとき, $C'D = FD$ であるから $\triangle DC'F$ は二等辺三角形である. ゆえに, 定理 16 により,

$$(3) \quad \angle DC'F = \angle DFC'$$

である. P が E と一致しないときには, $\triangle EC'F$ が二等辺三角形であるから,

$$(4) \quad \angle EC'F = \angle EFC'$$

i) P が D と E の間にある場合, 定理 4 により, 点 F は $\angle DC'E$ の内部にあり, 点 C' は $\angle DFE$ の内部にある. したがって, 公理 4 により,

$$\angle DC'E = \angle DC'F + \angle EC'F,$$

$$\angle DFE = \angle DFC' + \angle EFC'$$

ゆえに公式(3)と(4)を辺々加えれば等式(2)を得る.

ii) P が線分 DE の延長上にある場合, E が D と P の間にあるか, D が E と P の間にあるか, のいずれかであるが, いずれの場合も同様であるから, E が D と P の間にあるとする. そうすれば, E は $\angle DC'F$ の内部にあることになるから,

$$\angle DC'F = \angle DC'E + \angle EC'F,$$

したがって

$$\angle DC'E = \angle DC'F - \angle EC'F$$

同様に

$$\angle DFE = \angle DFC' - \angle EFC'$$

ゆえに等式(3)から(4)を辺々引けば等式(2)を得る.

iii) P が E または D と一致する場合に等式(2)が成り立つことはもはや明らかである.

10, 教科書分析

東京書籍 18 年度

「新しい数学」

I 平行と角

- 1 多角形の内角と外角
- 2 平行線と角
 - ・錯角, 同位角, 対頂角
 - ・三角形の内角と外角

II 合同な図形

- 1 合同な図形
- 2 三角形の合同条件
- 3 証明の進め方
 - ・仮定と結論

啓林館 18 年度

「未来へ広がる数学 2」

I 平行と合同

- 1 角と平行線
 - ・対頂角, 同位角, 錯角
- 2 多角形の角
 - ・三角形の内角や外角
 - ・鋭角三角形と鈍角三角形と直角三角形
 - ・多角形の内角の和
- 3 三角形の合同

II 証明

- 1 証明とその仕組み
 - ・仮定と結論

教育出版 18 年度

「数学 2」

I 平行線と角

- 1 直線と角
 - ・錯角, 同位角, 対頂角
- 2 三角形の角
 - ・内角, 外角
 - ・三角形の内角, 外角
- 3 多角形の角
 - ・多角形の内角, 外角

II 合同な図形

- 1 合同な図形
 - ・合同な図形の性質
- 2 三角形の合同条件
- 3 証明の仕組み
- 4 作図と証明

大日本図書 18 年度

「数学」

I 多角形と角

- 1 多角形の内角
- 2 多角形の外郭
- 3 いろいろな角
 - ・同位角, 錯角, 対頂角
- 4 平行線と角
 - ・平行線の性質
 - ・平行線であるための条件
- 5 図形の性質の調べ方(1)
 - ・三角形の内角と外角
- 6 図形の性質の調べ方(2)
 - ・星形の内角

II 図形の合同

- 1 合同な図形
 - ・合同な図形の性質
- 2 多角形の合同
- 3 三角形の合同
- 4 合同な三角形
- 5 三角形の合同条件の使い方

学校図書 18 年度

「数学 2」

I 平行線と多角形

- 1 平行線と角
 - ・同位角, 錯角, 対頂角
- 2 多角形の角
 - ・三角形の内角と外角
 - ・多角形の内角と外角
 - ・直角三角形, 鋭角三角形, 鈍角三角形

II 図形の合同

- 1 合同な図形
 - ・合同な図形の性質
- 2 三角形の合同条件

《違う点》

- ・三角形の内角の話から多角形に広げて一般化している教科書と、多角形の内角の話で最初に一般化してから、三角形の内角の話をしている教科書があった
- ・東京書籍のように証明の進め方についての節を作っているものと、大日本書籍のように証明の進め方の節を作らず、合同条件のところで証明の説明をしているものもある

《同じ点》

- ・合同な図形の性質をやり、そのあとに合同な三角形を作図してから、合同条件がでてくる

11、証明の導入

- 仮定と結論…「○○○ならば□□□」、「○○○のとき□□□」の形で表されることがあるとき、“○○○”の部分を**仮定**、“□□□”の部分を**結論**という。

内容がおかしい

- 証明…ある事柄が成り立つわけを実験の結果や直感に頼らず、これまでに学んだすでに正しいと認められた事柄を根拠として理詰めで明らかにしていくことを証明という。

言っていることが間違い

	証明	説明		
		帰納法	類推	アブダクション
例	<仮定 1> A ならば B である。 <仮定 2> A である。	<仮定 1> A1 は P である。 <仮定 2> A2 も P である。	<仮定 1> A は P である。 <仮定 2> B は A と似ている。	<仮定 1> A である。 <仮定 2> H と仮定すると、A がうまく説明される。
	<結論> B である。	<結論> (たぶん) 全ての A は P である。	<結論> (たぶん) B は P である。	<結論> (たぶん) H である。
真理保存性	仮定が正しいければ、必ず結論は正しい。	仮定が正しくても、結論の正しさは保証されない。		

12, 問題作成

図 1 のように、2 つの線分 AD 、 BE が互いの中点 C で交わっているとき $AB=DE$ となることを証明せよ。

問題の出し方が悪い
なぜ証明をするのか生
徒に考えさせる

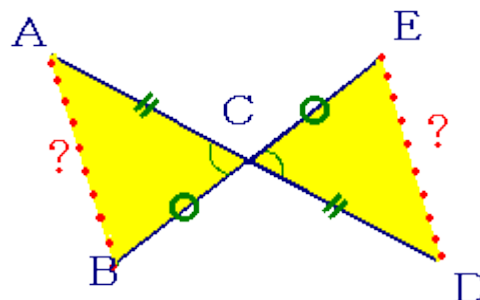


図 1

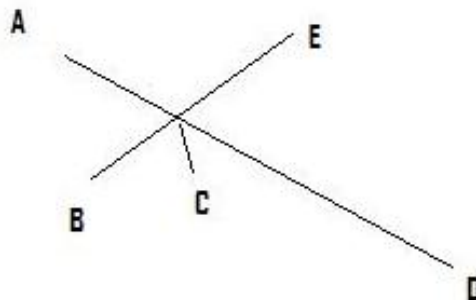
<生徒の予想される反応>

- ・ AB 、 DE の長さを定規で測る
- ・ 図をはさみで切って重ねあわせる
- ・ 補助線を引く

<教師が期待する考え方>

- ・ 仮定と結論が何であるか
- ・ どこが合同であるか
- ・ 合同な図形の性質に気付くか
- ・ 三角形の合同条件に気付くか

2 線分 AD、BE が存在し、AD と BE は図のように点 C で交わるとする。
 $AB=DE$ となるには、どのように交わればよいか。



<予想される反応>

○手が動かない

☆正方形、長方形、ひし形、平行四辺形、台形を描く

☆コンパスを使う

<支援>

○例えば、四角形 ABDE を考えて $AB=DE$ になる四角形は？

☆AD、BE、点 C の関係は？

<教師が期待する活動>

(平行四辺形の場合)

- ・点 C が AD と BE の中点 ($AC=CD$ 、 $BC=CE$) であることに気付く
- ・ $AC=CD$ 、 $BC=CE$ でないとき $AB=DE$ になるか。ただし右の場合は除く

ということは AD と BE が互いに中点 C で交わるなら $AB=DE$ になるんじゃないかな。

(台形の場合)

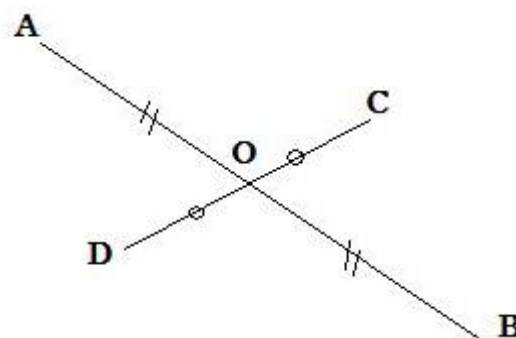
- ・ $AC=CE$ 、 $BC=CD$ であることに気付く
- ・ $AC=CE$ 、 $BC=CD$ でないとき $AB=DE$ になるか。ただし左の場合は除く

ということは $AC=CE$ 、 $BC=CD$ なら $AB=DE$ になるんじゃないかな

13, 自力解決と支援 (1)

問題

2 線分 AB、CD で AB と CD が互いに中点で交わるなら $AD=BC$ になることを証明せよ



活動 A

- ・ 平行四辺形で考える
- ・ $\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ で考える
- ・ $\triangle ABC$ と $\triangle BAD$ で考える

合同な三角形をみつけさせる活動をやらせる

活動 B

仮定 : $AO=BO$ 、 $CO=DO$

結論 : $AD=BC$

$\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ において

仮定により、 $AO=BO$

$CO=DO$

対頂角は等しいので、

$\angle AOD = \angle BOC$

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle AOD \equiv \triangle BOC$

よって、 $AD=BC$

活動 B への支援

- ・ 平行四辺形はどんな図形か
- ・ $\triangle ODB$ が共通な三角形
- ・ 条件を使える三角形を探す

どこが等しいか

活動 C

- ・ $\triangle AOC$ と $\triangle BOD$ でも同じことが言える
- ・ 等脚台形でも成り立つ

活動 C への支援

- ・ 他に等しいところはあるか
- ・ AD と BC が平行ではなかったらどうなるか

14, 自力解決と支援 (2)

活動 A

- ・ 平行四辺形で考える
- ・ $\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ で考える
- ・ $\triangle ABC$ と $\triangle BAD$ で考える

活動 B への支援

- ・ 既習したことを使えないだろうか

活動 B

- ・ 合同になりそうな三角形を見つける

活動 C への支援

- ・ 合同条件が使えないか
- ・ そのためにはあと何が必要か

活動 C

仮定 : $AO=BO$ 、 $CO=DO$

結論 : $AD=BC$

$\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ において

仮定により、 $AO=BO$

$CO=DO$

対頂角は等しいので、

$\angle AOD = \angle BOC$

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle AOD \equiv \triangle BOC$

よって、 $AD=BC$

活動 D への支援

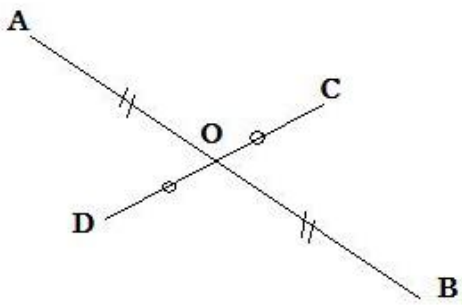
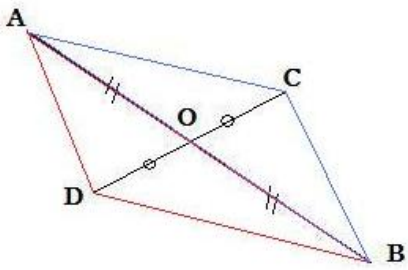
- ・ 平行四辺形以外ではどうか

活動 D

- ・ 等脚台形でも成り立つ

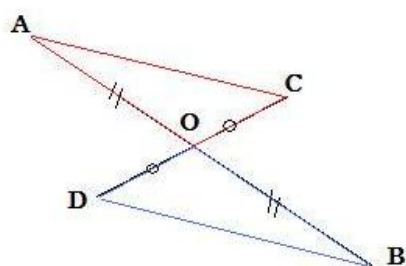
15, 自力解決と支援 (3)

指導内容	時間	学習活動・学習内容	指導上の留意点
導入	5 分	(線分についての確認) 「線分ってどんなものだったか覚えていますか」 (ひもでいろいろな形を作る) 「ここに、線分 AB と線分 CD の棒があります。この 2 本の棒を交わらせてみよう。」 「AD=BC になるように交わらせてみよう。」 (動かしたりしながら) 「どんな形が見えてくるかな」 四角形 「どんな四角形？」 長方形, 平行四辺形 「そうだね。でも長方形は平行四辺形でもあったよね。だから、今日は平行四辺形で問題を考えてみよう。」 「この平行四辺形で AB は CD のどこで交わっているかな。」 真ん中, 中点	・最初は曲線から作って、徐々に線分に近づけていく。 ・AB=BC とならないように交わらせ、生徒に見せる。 ・AD=BC となっているものを見せる。 ・平行四辺形が出てくるように見せる。 ・平行四辺形が AD=BC となることを全員が分かった上で問題を出す。 ・AB と CD が互いに中点で交わっていることを分からせる。

問題提示		「CD は AB のどこで交わっているかな」 真ん中，中点 「線分の真ん中の点って中点って言っていたよね」 「AB と CD が互いに中点で交わるなら本当に $AD=BC$ になるのかな」 問題 2 線分 AB,CD で AB と CD が互いに中点 O で交わるなら $AD=BC$ になることを証明せよ。 	問題文の書いた紙を黒板に貼る。同時に左の図を描いた紙も貼る。
自力解決	25 分	生徒 1 (合同な三角形を使おうとしている) $\triangle ABC$ と $\triangle BAD$ で考える  「合同条件が使えるような三角形はないかな」 $\triangle OAD$ と $\triangle OBC$ を見つける	「$\triangle ABC$ と $\triangle BAD$」や「$\triangle OAC$ と $\triangle OBD$」では $AD=BC$ は証明できないので「$\triangle OAD$ と $\triangle OBC$」で考えさせる。

生徒 2 (合同な三角形を使おうとしている)

- $\triangle OAC$ と $\triangle OBD$ で考える



「AD と CB を使った三角形で考えてみよう」

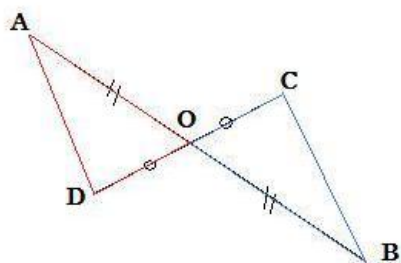
- $\triangle OAD$ と $\triangle OBC$ を見つける

生徒 3 (全く進まない)

- 手が動かない

「線分 AD と CB を書いてみよう」

- $\triangle OAD$ と $\triangle OBC$ を見つける



「この二つの三角形で三角形の合同を使えないかな」

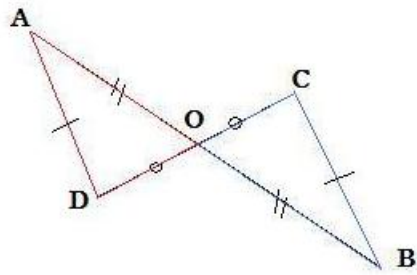
<証明>

生徒 4

- $AO=BO$, $CO=DO$, $AD=BC$ より
三辺がそれぞれ等しいので
 $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$
よって $AD=BC$

- どの三角形の合同条件を使えるのか考えさせる。

- 結論を使って証明をしているので、証明したいものを使ってはいけないことを理解させる。



「 $AD=BC$ っていうのはまだ言えてないよね」

「他の合同条件は使えないかな」

生徒 5

・ $AO=BO$, $CO=DO$

$AD \parallel BC$ より錯角は等しいので

$$\angle OAD = \angle OBC$$

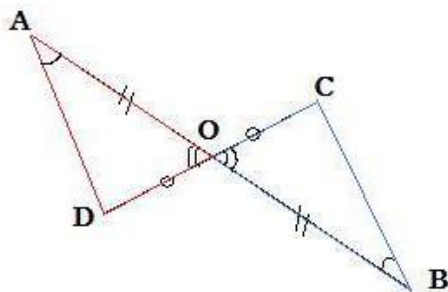
また、対頂角は等しいので

$$\angle AOD = \angle BOC$$

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AOD \equiv \triangle BOC$$

よって $AD=BC$

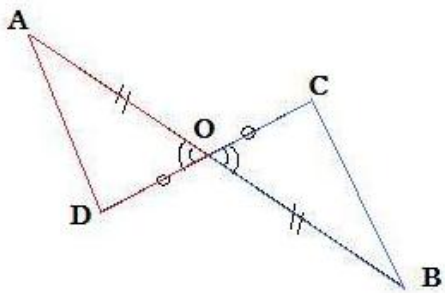


「問題文に $AD \parallel BC$ は書いてないよね。」

「 $AD \parallel BC$ を証明してからでないとできないんじゃないかな」

「今、わかっていることから他の合同条件は使えないかな」

・ 問題文に書いてなく、まだ決定していないことなので、使ってはいけないことを理解させる。

		生徒 6 ・手が動かない 「三角形の合同条件って覚えているかな」 「仮定は何かな」 「合同条件を使うには、あと何が必要かな」 生徒 7 ・正しい証明ができている  「平行四辺形以外ではできないのかな」 ＜十分な証明を作らせる＞ 「仮定は何かな」 AB と CD が互いに中点 O で交わる 「つまり、それはこういうことだね」 $AO=BO$, $CO=DO$ 「結論は何かな」 $AD=BC$ 「どの三角形で考えたかな」 $\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ 「どんな三角形の合同条件を使ったかな」 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい 「まず、これとこれが等しいってことがわかったよね」	十分な証明ができている生徒には証明から他に何がわかるか考えさせる。 ・生徒に発言をさせながら黒板に書いていく。 ・図を指しながら $AO=BO$, $CO=DO$ を示す。
--	--	--	---

発展		「もう一つ何がわかればよかったのかな」 $\angle AOD = \angle BOC$ 「なんでこれが成り立つのかな」 対頂角は等しいから 「これで2辺とその間の角がそれぞれ等しい ということがわかったから、三角形 AOD と 三角形 BOC が合同になるということがわか ったよね」 「このことから何がわかるかな」 $AD = BC$ 「平行四辺形以外では成り立たないのかな」 台形でも成り立つ	・等脚台形でも成り立つことを発見させる。
----	--	--	-----------------------------

板書計画

問題

(問題文の書いた紙を黒板に貼る)

図

(図に書き込みながら進める)

<証明>

仮定: $AO = BO, CO = DO$

結論: $AD = BC$

$\triangle AOD$ と $\triangle BOC$ において

仮定より, $AO = BO$
 $CO = DO$

対頂角は等しいので,
 $\angle AOD = \angle BOC$

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので,
 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$

よって,
 $AD = BC$

16, 個人の感想など

授業を自分たちで設計することは初めてで、本当にできるかどうか心配だった。私たちのグループは三角形の合同条件について考えることにしたが、まず、授業では公理のように出てきた三角形の合同条件を証明することに苦勞した。証明するためには、たくさんの定理と公理が組み合わされており、そこから合同条件が作られていることを知った。また、授業を設計する上で、生徒の気持ちになることが大切であった。問題提示は生徒ができるだけ取りかかりやすくし、どのように考えるか、さまざまな角度からみる必要がある。そして、生徒一人一人にどのような支援をすべきか考えなければならない。このように生徒の気持ちになって考えることは、難しく、たくさん悩むこともあったが、とても大切なことであると知った。

半年かけてグループで1つの指導案を自分たちの手で作成したが、グループで話し合うことで、自分とは違うより良い意見を聞くことができ、とても充実した、将来に繋がる良い授業になったと思う。

西村 紗也香

今回の数学指導設計での学習を進めていく中で、1つの授業での展開を考えていくことがこんなにも難しく大変なことなのかと強く感じました。生徒を指導する際には、教師がその分野や単元についてとても深い知識を要し、また、生徒に興味を持たせつつ授業を展開していくということが大事になってくると思いました。私たちの班は三角形の証明の問題を取り上げて授業を考えていきましたが、証明にたどり着くまでにユークリッド原論を考えたり、合同条件の証明を考えたりと、中学生を教えるのだけれど私たちの知らないようなことをたくさん調べました。生徒の活動を考えたり、その支援を考えたりと初めて授業の設計を行い、日々の授業の難しさを実感できました。これらの学習をこれから行う教育実習に役立てていきたいと思ひます

松岡 一弘

まず、数学学習指導分析をするにあたって、本当に授業が自分たちだけで作れるのかと思った。最初は何から始めればよいのか考えさせられた。しかし、やっていくうちに授業の形が固まっていった、面白い講義だと思った。

最初のころは三角形の合同条件を証明するのに何時間もかけてしまい大変だった。公理や定理が何かということや、何が証明に必要なのか多くのことを調べていった。そのおかげで証明というものに愛着のようなものが生まれた。証明をすることで合同条件というものを理解し、授業を作るにあたってより理解しやすく授業が作れるのではないかと思った。問題作成の時も生徒に考えさせる問題場面を作らなくてはいけないことや、どんな支援が必要かも考えなくてはいけなかったが、面白かった。

この講義で学んだことを十分に活かして教育実習や授業をやっていこうと思う。

掃部 裕文

この授業を通して学んだことがたくさんありました。「授業の準備」というのは授業に関する資料や情報だけを用意しておけばいいと思っていたけど、実は生徒の反応や生徒への支援も考えなくてはいけないのだということを学びました。支援にも段階を作って、状況に応じた支援をしなくてはいけないというのがとても難しかったです。問題の場面の提示も、ただ単に問題文を書いたプリントを配るのではなく、ひとひねりして生徒に問題場面を作らせることによって、生徒の問題に対する興味を湧かせ、さらに問題を理解しやすくなるのだということが分かりました。そのような工夫が必要なのだと思います。

渡邊 一輝