数学学習指導設計Ⅱ

中学校第一学年

「文字の式」

～文字の導入～

J1　朝岡卓哉
谷秋沙

もくじ

１．　単元設定の理由

小学校までは文字の概念がなく、数字だけで式をたてたり答えを出したりしていたが、中学校の「文字と式」という単元で初めて数字の代用として文字を使用するので、式や答えの中に文字が含まれた形に抵抗のある生徒が多いと思う。これらのことより教師にとっては理解させづらい単元なので生徒が分かりやすい授業展開を考えてみたいと思った。

２． 文字の歴史

バビロニアの代数（二千～四千年）

　エジプトやメソポタミアの文明は、ギリシア文明の大先輩ですが、とくに今のイラク、当時のバビロニア地方には、すぐれた計算術があった。その辺りから発掘された粘土板の記録を解読することによって、彼らが今から三、四千年も前に、ある種の二次方程式、三次方程式などをなんとかかんとかして解いていたことが分かっている。これが、記録に残る最古の代数である。

ギリシアの代数(紀元前五世紀ごろ～紀元三世紀ごろ)

　バビロニア代数があったにもかかわらず、ギリシアでは記号代数の発達したあとがあまり見られない。じつはバビロニアの記号計算術の成果は、幾何の形に書きなおされて、ユークリッドの「原論」の中に受けつがれている。

また、ユークリッドの時代よりだいぶおくれて、未知数記号を使った、記号代数の本を残しているディオファントスという学者がいた。この人は、デカルトの生きた十七世紀のころからは、数学、特に整数論という方面にかなりの影響をあたえたのですが、そのすこし前までは、まだ世の中に知られていなかった。

インドの代数（？～五、六世紀ごろ）

　インドはメソポタミアの隣の国で、お互いにいろいろな影響もあたえあったのでしょうが、今日分かっている限りでは、インドの代数はメソポタミアほど古くはない。もっとも、インドという国は徹底して記録の残っていない国で、その点同じ東洋の国でありながら、文字と歴史の国といわれる中国とは、著しい対照をなしている。したがって、インドの代数にしても、いつごろからそれがあったか、その辺りのことは、どうもはっきりしていない。

インドで特に大切なことは数字と記数法である。今日私たちが使っている普通の数字は、もとはインドからおこったもので、しかも、ギリシア人も含めて、昔の多くの民族が使っていた表の表し方のうちでも、こんなによくできたものは他にはほとんど例がない。インドの数学が今日の数学に残した最大の功績は、この数字だと言っても過言ではない。

アラビアの代数（八～十三世紀）

インドの代数学とギリシアの幾何学とが、一つの文明の中で顔を合わせたのは、八、九世紀ごろ、サラセン帝国の中だった。　ところが、そうやって二つの数学が顔を合わせてみると、何といってもギリシア幾何学の精巧さは、一段とインドの数学よりたちまさっていた。

今日の文明の中心といえば、ヨーロッパがアメリカとともにその地位を占めているかのように見えるかもしれませが、今日のヨーロッパの目覚めは、せいぜい十二世紀ごろからのことで、彼らは最初いっさいをアラビアに学んだのだった。実際、ギリシアの書物も、インドの書物も、まずアラビア語からの翻訳をとおしてヨーロッパに伝わっていったもので、ユークリットの「原論」にしても、その例外ではない。

ルネサンスの代数からデカルトまで（十五、十六世紀）

十五世紀から十六世紀にかけて、イタリアを中心として新しい代数がおこった。
この代数の第一の特長は、インド・アラビア伝来の数字を使ったという点である。
新しい代数の第二の特長は、むかしから長いあいだの問題であった三次方程式、四次方程式の解法が得られたことである。

ところでここで注意しておきたいことが二つある。その第一は、この新しい代数でも、相変わらずギリシア以来の幾何学が、学問の切りふだというか、最後のよりどころになっていたということである。つまり記号計算の答え（らしいもの）を出しても、それが正しい答えなのかどうかは、かならず幾何学の定理を使って、証明することになっていた。ですから記号計算術は答えをさがすための使い走りのような役割で、それぐらいなら「幾何」が答えを出すところまでを、いっさい自分でやればいいのだが、答えをさがすほうは、便利だから「記号」にたよる、けれども証明だけは幾何が引き受けるという形が、この時代にもなお受けつがれていた。

もう一つの注意は、方程式の解き方の説明についてだ。じつはおなじく方程式を解くにしても、当時の「解き方」は、実例をやってみせることによって、その特別な例をヒントにして、一般に通ずるやり方をおしはかってくださいという方針であった。

文字を数とおなじようにして計算するやり方は、答えらしい値の発見もできれば、それが答えであることの証明もできるというわけで、それまで、「証明といえば幾何」だったやり方が、ここでがらりと変わる希望も出てくる。実例をあげてこれで解法をおしはかってくださいといっていたあいだは、とうていできそうもなかったことが、一般法則そのものを書くようになって、こうなったということは、数学の歴史のうえで、きわめて大きな意味をもっている。

その考案者こそ、デカルトだったのである。彼が解析幾何学の生みの親であるという意見は、彼が単に図形を式に変え、式を図に変えて研究したというだけのことではなくて、記号計算の規則を理論的にまとまった形に整理し、それを武器として、図形について「一般的」な議論をしようとした、その新しい姿勢のほうに、重点をおいて考えなくてはならない。

実際の話、もしグラフのような図形と数式との関係というだけならば、デカルトの時代にもそ

れ以前にも、そういう考えの数学は実際にあった。古いほうでいえば、ギリシアのアポロニオスがすでにそうですし、特にデカルトと同時代では、彼よりむしろととのった理論をその方面に残したフェルマという学者もいた。けれども先にデカルトについて述べたような新しい姿勢、文字記号の利用によって学問に一つの新しい道をひらこうという意気ごみは、ついにフェルマには見ることはできなかった。フェルマの仕事はととのっていて美しいけれども、それもあくまでアポロニオス以来のギリシア的学問の方向での、一つの総仕上げというようなものであった。

ネッセルマンと代数

＊ネッセルマンの３段階説＊

第１段階：修辞的代数（rhetorische Algebra）
　この段階では、記号は全く使用されず、計算の全過程が言葉で述べられている.
第２段階：省略的代数（synkopierte Algebra）
　しばしば繰り返して使用される概念や演算については、言葉で言い表す代わりに、決まった省略記号が使用される.
第３段階：記号的代数（symbolische Algebra）
　この段階に至って、すべての概念や演算が完全に発達した記号的言語で表現される.

実例

例.　$x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$

第一段階：「根の３乗から根の２乗の２倍をひき、１０倍の根をたしたものから
１をひいて５となるような根」
第二段階：「$K^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\iota}$ ⋔ $\varDelta^{Y}\overline{\beta}M\overline{\alpha}$ ʹ$i\sigma$ $M\,\overline{\varepsilon}$」
第三段階：「$x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$」

「代数に惹かれた数学者たち」P.59　　ジョン・ダービージャー著　参照

第二段階では下記のように

$K^{Y}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\iota}$ ⋔ $⊿^{Y}\overline{\beta}M\overline{\alpha}$ ʹiσ $M\,\overline{\varepsilon}$ ————①

数やよく使用される概念や演算をギリシア語のアルファベットや記号を使い表している。

$$x^3 - 2x^2 + 10x - 1 = 5$$

K^{Y} $\overline{\alpha}$ ς $\overline{\iota}$ ⋔ $⊿^{Y}$ $\overline{\beta}$ M $\overline{\alpha}$ ʹiσ M $\overline{\varepsilon}$

x^3 1 x 10 引く x^2 2 0 乗 1 ＝ 0 乗 5

主な省略記号

未知数

x ： ς	x^4 ： $\Delta\Delta^{Y}$
x^2 ： Δ^{Y}	x^5 ： ΔK^{Y}
x^3 ： K^{Y}	x^6 ： KK^{Y}

数

1 ： $\overline{\alpha}$	$\overline{\iota}$(イオタ) ： 10
2 ： $\overline{\beta}$	$\overline{\kappa}$(カッパ) ： 20
3 ： $\overline{\gamma}$	$\overline{\lambda}$(ラムダ) ： 30

*0 を表す記号はない

その他の記号

M ： ゼロ乗(定数項)
ʹiσ ： 等しい(=)
⋔： 以下「等しい」までを全て引く

「数学史 –形成の立場から-」P.85　中村幸四郎著　参照

「代数に惹かれた数学者たち」P.54　ジョン・ダービージャー著　参照

段階別の解法

第一段階での解法

言葉
:
言葉
:
言葉

第二段階での解法

言葉
:
①のような省略記号を含んだ式
:
言葉

第三段階での解法

記号的言語
:
記号的言語
:
記号的言語

３．　小学校、中学校での文字の扱い方の違い

＊中学校での文字の式＊

・文字を用いて、数量の関係や法則を式に表現したり、意味を読み取ったりする能力を培うこと

・文字を用いることの必要性と意義を理解すること

・文字を用いた式における乗法、除法の表し方を知ること

・簡単な一次式の四則計算ができるようにすること

・数量の関係や法則などを捉えるために、文字式を利用できることを理解すること

＊小学校での文字の式＊

・数量を表す言葉や□、△などの代わりに、a, x などの文字を用いて式に表し、文字に数を当てはめて関係を調べたりすること

・数量の関係を表す式についての理解を深め、式を用いることができるようにすること

考察

中学校では文字の種類として、未知数、変数、定数があるが、小学校では未知数のみを扱う。また、中学校での文字は計算の対象となっているのにたいして、小学校での文字は、数量の関係を表すものとなっている。

４．　文字を用いることの意味とよさ

・関係や法則を一般的に表現できる

・関係や法則を簡潔に表現できる

・筋道を立てた説明を簡潔明確に表現することができる

・事象を式で表現しておいて、式を対象にいろいろな操作をほどこすことができる

「数学における文字の意味」
http:www.infobears.ne.jp/athome/fukusuke291/su-moji.html
2009 年 11 月 7 日

考察

関係や法則を一般的に表現できる

1+x=y ⇨ 一般的

関係や法則の「一般的」な表現とは何？

与えられた一組の対象(特殊)の考察からそれを含むより大きな組(一般)の考察を表現すること。

◎例.四角形の求積

四角形の面積＝縦×横

縦　3cm、横　4cm　のとき　面積 ＝ 3cm × 4cm =12cm^2
縦　4cm、横　5cm　のとき　面積 ＝ 4cm × 5cm = 20cm^2
縦　3m 、横　4m　のとき　面積 = 3m × 4m = 12m^2
縦　4m 、横　5m　のとき　面積 = 4m × 5m = 20m^2
縦　a 、横　b　のとき　面積 = a × b = ab

特殊

一般

関係や法則を簡潔に表現できる

◎例.三平方の定理（ピタゴラスの定理）

直角三角形の直角をはさむ２辺の平方の和は斜辺の平方に等しい

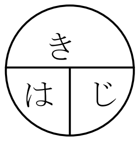
直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a, b 斜辺の長さを c とすると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

事象を式で表現しておいて、式を対象にいろいろな操作をほどこすことができる

◎例.

きょり　＝　はやさ　×　じかん



文字で表現

きょり を x ， はやさ を v ， じかん を t とすると

$$x = v \times t \quad \text{——} ①$$

$$① \times \frac{1}{v} \quad \text{という操作をすることにより} \quad t = \frac{x}{v}$$

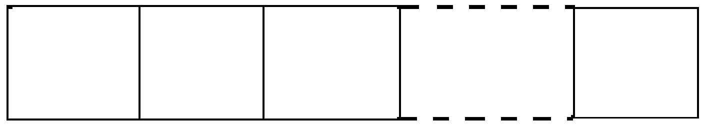
$$① \times \frac{1}{t} \quad \text{という操作をすることにより} \quad v = \frac{x}{t}$$

５． 教科書比較

・文字式の導入問題について教科書ごとに比較する

<東京書籍〔新しい数学１〕>

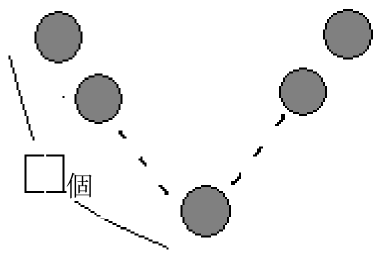
下図のようにマッチ棒を並べて正方形を作っていきます。正方形を２０個作るとき、マッチ棒は何本必要でしょうか。



マッチ棒の本数は、作る正方形の個数によって変わる。文字xを使った式１＋３×xは、そのすべての場合をまとめて表している。
１＋３×xという式は、マッチ棒の本数の求め方と同時に、求めた結果を表していると考えることができる。

<大日本図書〔数学１〕>

マグネットをＶ字列に並べてみましょう。
Ｖ字列の一辺に並ぶ数が多いとき、その全体の個数を１つ１つ数えないで求めるには、どうすればよいでしょうか。

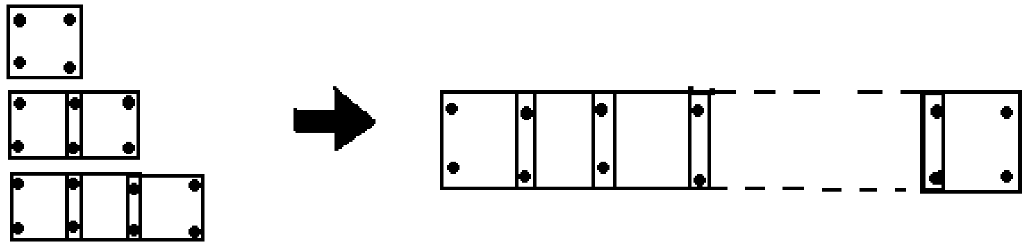


□×２－１

上式のような式では、□の代わりに文字を使うことがあります。

<教育出版〔数学１〕>

２０枚の画用紙をとめるときに必要な画びょうの個数を求めてみましょう。

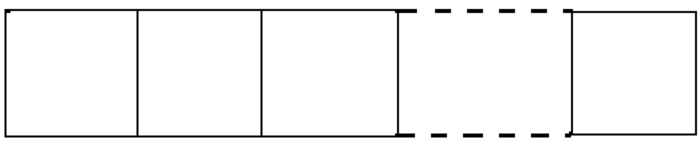


（２＋２×x）個　　画用紙の枚数をxとする

画びょうの個数は、画用紙の枚数によって変わるが、文字xを使うと、すべての場合をまとめて１つの式で表すことができる。

<学校図書〔中学校数学１〕>

同じ長さのストローを使って、正方形を横につないだ形を作ります。
正方形を４個作るとき、ストローは何本必要でしょうか。
また、正方形を１０個作るときはどうでしょうか。

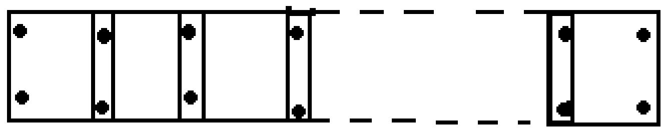


（１＋３×□）本

数学では、数量を表す時には□の代わりにアルファベットの文字を使います。

<啓林館〔未来へ広がる数学１〕>

画用紙をその一部が重なるようにマグネットでとめます。
画用紙が５枚のとき必要なマグネットを求める式を書きましょう。また、画用紙が 6 枚 7 枚のときには、どんな式になるでしょうか。



$$2 \times a + 2 \quad （個）$$

画用紙の枚数aで決まるマグネットの個数を一般的に表しています。

考察

<東京書籍・教育出版>

文字を使うとすべての場合をまとめて表すことができる。

生徒にとって理解しやすそうな表記方法なのではないだろうか。

<学校図書・大日本図書>

□で表していたものをアルファベットで置き換えている。

なぜアルファベットで置き換える必要があるのか、生徒が疑問を抱かないか。

<啓林館>

文字式＝一般的

一般的という表現は抽象的な表現なので生徒には理解しづらいのではないか。

＊参考文献＊

「新しい数学１」	東京書籍	１７年２月３日検定済
「新版中学校数学１」	大日本図書	１７年２月３日検定済
「数学１」	教育出版	１７年２月３日検定済
「中学校数学１」	学校図書	１７年２月３日検定済
「未来へひろがる数学１」	啓林館	１７年２月３日検定済

＊各教科書の分析からわかること＊

①文字の導入には、生徒が問題をイメージしやすいように、実際に机の上で作業できるような身近なものを題材とした問題を使用している。
（マッチ、ストロー、画びょう、マグネットなど。）

⇩

生徒が手を動かして考えることができる題材を選ぶ。

②文字を使わず、実際の数をあてはめた表を使用している。

（例）１個 100 円のリンゴを 85 個買いました。合計金額はいくらですか。

リンゴの個数（個）	合計金額（円）
1	１×１００
2	２×１００
3	３×１００
:	:
:	:

⇩

実際の数をいくつかあてはめた表を使用する。

③変化していく数を言葉で表した式を立てる。

（例）

（リンゴの個数）× １００

⇩

作った表から、変化していく数を生徒自身に見つけさせて、上のような式を立てさせる。

④数字の代わりに文字を使用した式に表す。

（例）

リンゴがx個の時

x × １００（円）

⇩

③で立てた式の言葉部分を文字に置き換えさせる。

*「学校図書、大日本図書」は□で表してから文字で表す。

⑤

「啓林館」: ④の式より一般的。

「学校図書、大日本図書」: □で表していたものをアルファベットで置き換えている。

「東京書籍、教育出版」: 文字を使うとすべての場合をまとめて表すことができる。

⇩

いきなり「まとめて表すことができる。」と表記するのではなく、生徒にすべての場合で成り立つことを実際に体験させて、理解させてから（②③④の段階）まとめて表すことができることを表記する。

6.問題作成

＊文字を使う必要性、利点が分かる問題の開発＊

「同じ長さのストローを使って、正方形を横につないだ形を作ります。」

(1)正方形を１個作るときストローは何本必要でしょうか。また、２個、３個作るときは何本必要でしょうか。

(2)　(1)の答えを下の表にまとめましょう。

正方形の数（個）	ストローの本数（本）
1	○＋□
2	○＋□
3	○＋□
:	:
:	:

(3)　△に言葉をいれなさい。

(1＋3×△）＝　ストローの本数

(4)正方形の個数がx個の時にストローの本数を表す式を書きなさい。

この問題では、小問で細かく手順を与えており、生徒に計算させているだけになっているので生徒に考えさせるような授業の進め方を考えてみる

Ⓐ:生徒が手順を考えない問題

Ⓑ:生徒が手順を考える問題

例.

Ⓐ

・問題に手順が示されている

問「…………………?」
(i)……………….?
(ii)…………………?
(iii)……………..?

⇒ 解く

・先生が手順を指示する

問「…………………?」
先生「まず○○としてから△△として解いてみましょう」

⇒ 解く

・先生が解説しながら解く

黒板等で解説しながら解く ⇒ 理解

Ⓑ

・生徒１人１人手順を考えて解く

問「…………………?」 ⇒ 手順を考える ⇒ 解く

考察

いろいろな本を見るとⒶのような手順指示型には「生徒が考える」という観点から批判的なものしか見当たらなかったが、「文字」について教えたばかりの状況でいきなりⒷを行うと全く分らない生徒がでてくるかもしれないという不安から、Ⓐを行うことで「文字」とはどう言ったものなのかを知ってから、「生徒が考えて解く」と言うⒷを行った方がより良いと考えた。

＊ⒶとⒷの比較＊

Ⓐ

長所

・「文字」自体の使い方が分かる

短所

・生徒が考えているのではなく計算しているだけ

Ⓑ

長所

・生徒１人１人の発想で解こうとする

短所

・全く手がつけられずに「文字」の使用自体を嫌う生徒がでてくる可能性がある

⇩

それぞれの短所を補うためにⒶとⒷの２段階構成で授業を行う

Ⓐ　：　「手順」「文字の使い方」を知る

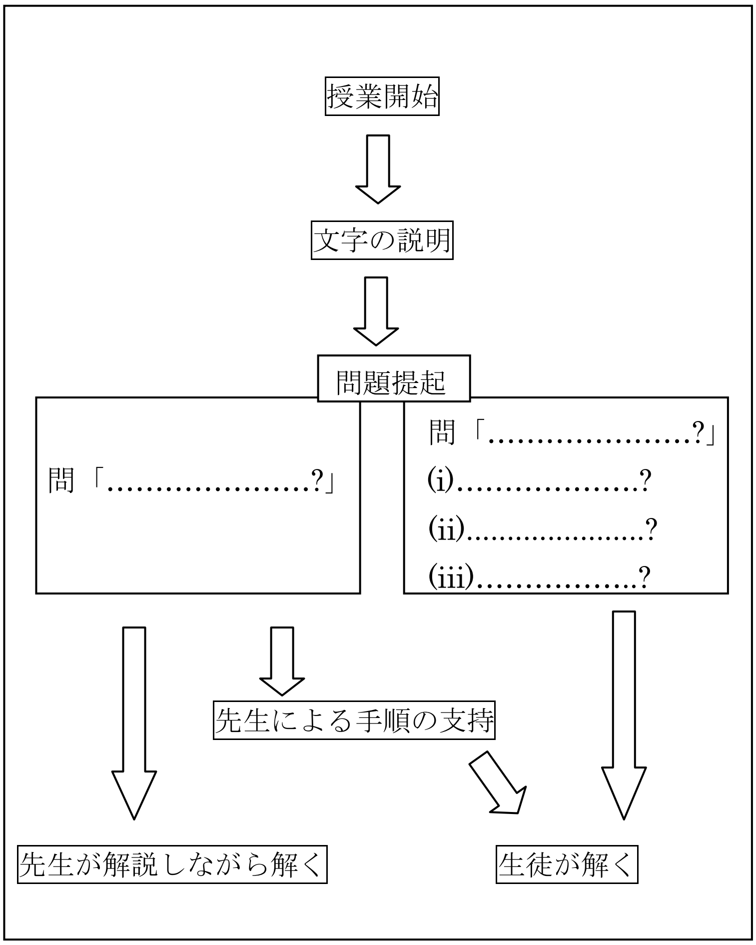
⇩

Ⓑ　：　Ⓐの知識を使って生徒１人１人の発想から手順を考える

*時間的な問題を考えると実際に授業で行えるか分らない

＊２段階構成の授業の進め方を具体的に考える＊

Ⓐ



Ⓐを行う目的：

文字の使い方を知る

①. 指示通り計算するだけであるが、まず文字の使い方を理解する。（または、先生の解説から文字の使い方を理解する。）

Ⓑ

問題提起

問「…………………?」

生徒が解く

先生が子供の発想を引き出す

(*)

先生による支援

生徒が再度考える

(*)を繰り返す

理解

Ⓑを行う理由：

自分たちなりの方法を考える

②. ①のように文字を使って手順を考える

③. 先生は生徒の解法を見て回ったり、質問することで生徒の発想を引き出す

＊ⒶⒷの問題を具体的に考える＊

Ⓐで使う問題１を考える

問題１は教科書分析で述べたように、生徒が問題をイメージしやすく、実際に机の上で作業しやすい問題にする。

Ⓑで使う問題２を考える

問題２は生徒が１人１人の発想で手順を考えられて、問題が解けると「文字使用の利点」が分かる問題にする。

問題Ⓐで教師が手順を指示しても生徒はただ計算しているだけで、文字の使用について理解はしていないと気付いたので、生徒が文字を使用したくなるような問題と問い方を考える。

参考文献

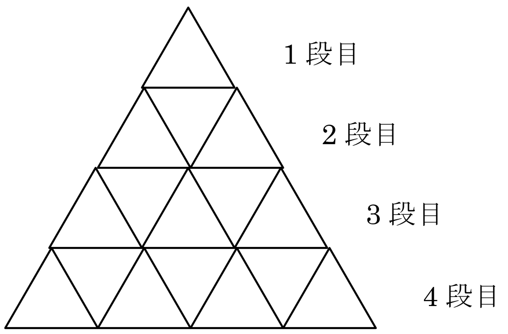
「本当の問題解決の授業を目指して」全国算数授業研究会著 東洋館出版社

「小学校算数の新しい評価」杉山吉茂編著 東京書籍

「算数科 問題解決の新しい評価」矢部敏昭編著 明治図書

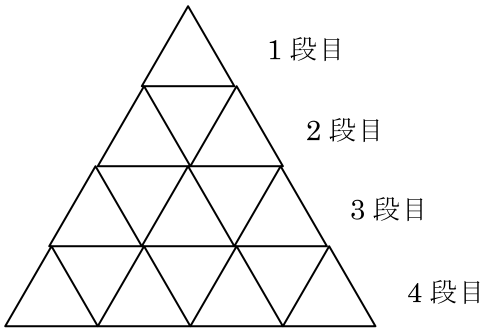
＊問題と問い方＊

① 図のように三角形を並べていきます。2 段目の三角形の数と 632 段目の三角形の数と 1000 段目の三角形の数すべてで成り立つ式を表しなさい。



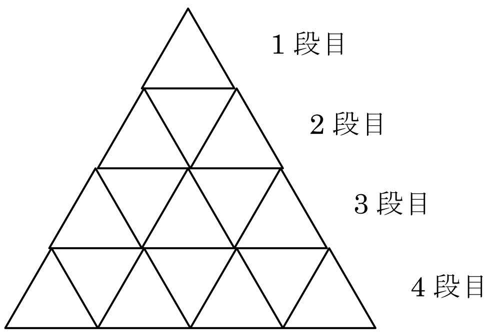
三角形の数　＝（　　　　　　　　）

② 図のように三角形を並べていきます。三角形が 101 個必要なのは何段目ですか。



三角形の数　＝（　　　　　　　　　）

③ 図のように三角形を並べていきます。すべての段における段数と三角形の個数の関係を表せ。



三角形の数　＝（　　　　　　　　　）

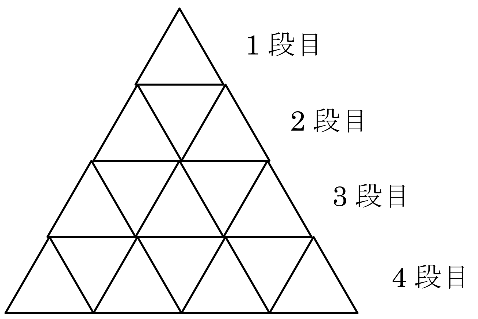
検討

①三角形の総数ではなく段数ごとの三角形の数を求める問題と誤解を招く問題文なので適していない。

②まだ学んでいない内容（文字の計算）を含む問題なので適していない。

③３つの中では一番分かりやすい問い方だと思ったのでこれをベースに問題を作成する。

問. 図のように正三角形の段数を増やしていった時に使用する正三角形の個数を式に表せ。

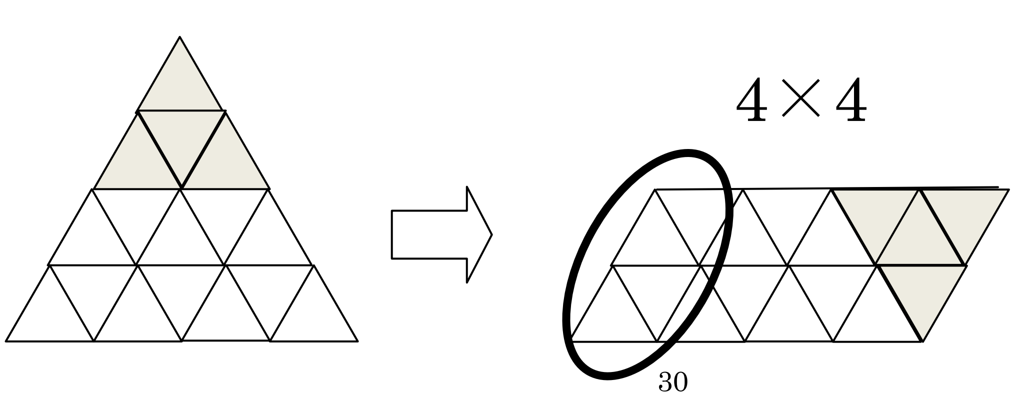


（使用する正三角形の個数）＝　n × n　　　(n は段数)

＊答えを生徒に理解させる考え方＊

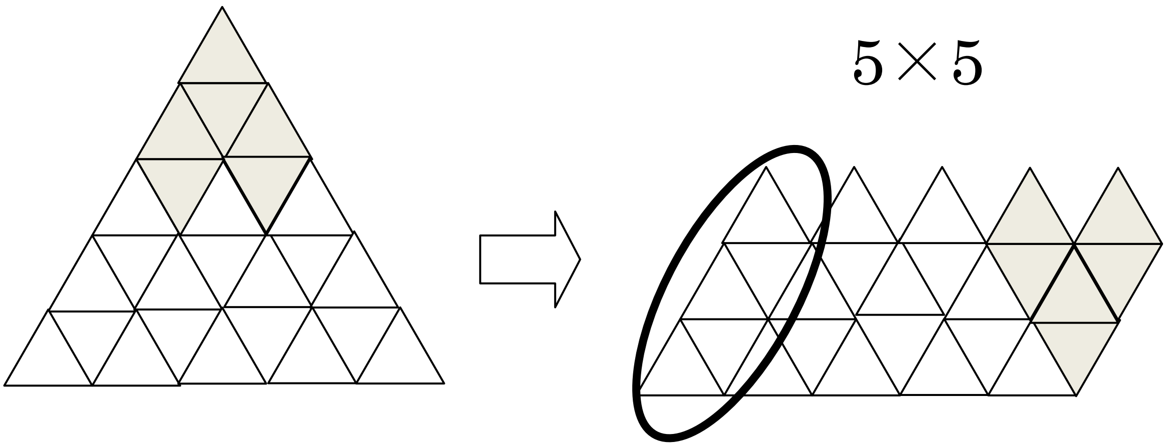
{n が偶数のとき}

例.　4段目のとき



{n が奇数のとき}

例. 5 段目のとき



＊生徒の予想される活動＊

- 一つずつ数えてみる
- 三角形をつけ加えて数えてみる
- 各段の個数を表にしてみる
- 辺に接している三角形の個数を掛け合わせてみる

＊先生が期待する反応＊

- 段数と総数の関係に気づいてほしい
- 文字で表してほしい
- 文字の意味することを読み取ってほしい

＊生徒の反応に対する先生の支援＊

① 数えてみる

・表にしている人

・表にしていない人

「表を作ってみよう」

「段数と総数の表にしてみよう」

「この関係を式に表してみよう」

・一つの式で表している人
（文字で表している）

・一つの式で表していない人

「一つの式で表してみよう」

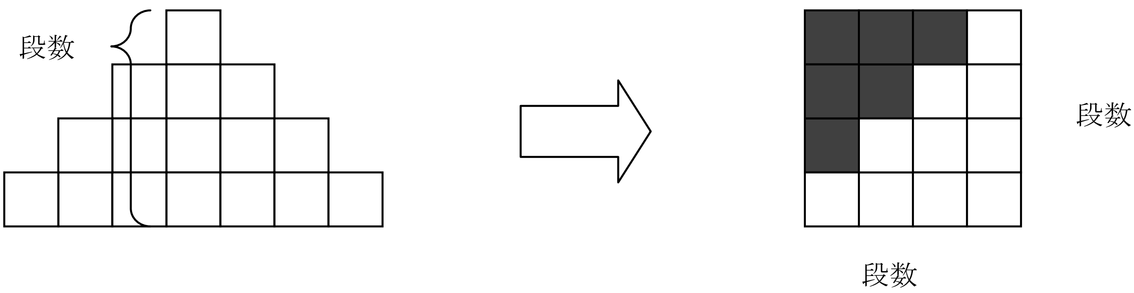
「文字を使って表してみよう」

② 図形で考える

・三角形をつけ加えて考えている人

・三角形を移動させて考えている人

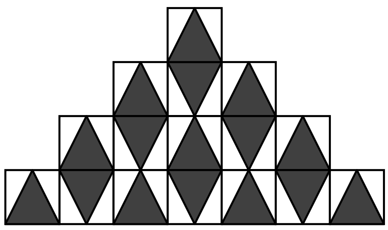
「四角形で考えてみよう」



四角形の総数　＝　段数　×　段数

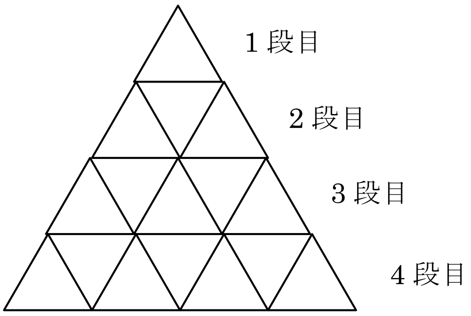
「三角形で考えてみよう」

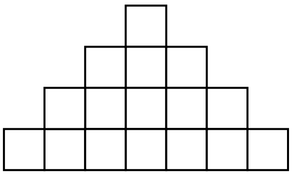
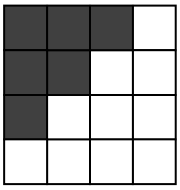
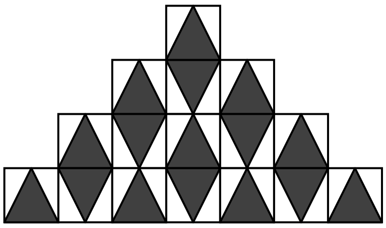
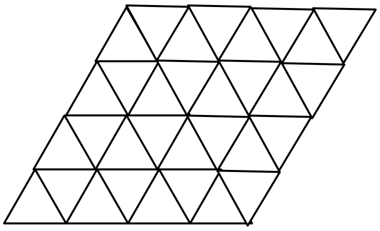
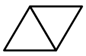
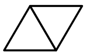
「四角形の中に三角形が入っていると考えてみよう」



三角形の総数　＝　段数　×　段数

７．指導案作成

学習活動と学習内容	指導上の留意点
問題提起 　図のように正三角形の段数を増やしていったときに使用する正三角形の総数を表せ。	
	
生徒の反応①　数えてみる ・表にしている人	必要なひとには、段数と総数の表にするように促す。
段数と総数の表にする。	表の関係を式に表させる。
関係式を作る。	総数を段数を使って式に表させる。
段数と総数の式にする。 一つの式で表していない人 (*)	一つの式で表させる。
手が止まっている人	文字を使って表させる。
表にしていない人	
段数と総数の表にする。	段数と総数の表を作ってみよう。
(*)	式に表している人を指名して、総数と段数の関係を皆の前で発表してもらう。
生徒の反応②　図形で考える ・三角形をつけ加えて考えている人 ・三角形を移動させて考えている人	
A 手が止まった人	

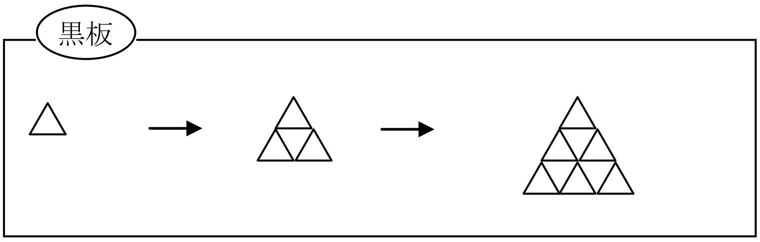
 	まず、三角形を四角形に置き換えて考えさせる。
四角形の総数＝段数×段数  三角形の総数＝段数×段数	三角形に戻して考えさせる。 四角形の中に三角形が入っていると考える。
B まだ考えている人 	三角形のまま考えさせる。 図のように三角形をつけたして考える。
 の総数＝段数×段数	 を一つの図形と考えて、この図形の個数を考えさせる。

改善点

・時間短縮のため一言での支援を考える
・実際の授業に近い指導案（具体的な会話）
・生徒の具体的な活動を書く
・具体的な支援方法を考える
・時間配分を考える

改善後

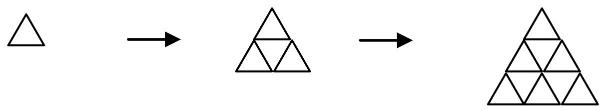
ねらい：文字を使って式をたてることの良さを知る

指導内容	学習活動と学習内容	指導上の留意点
導入 (5 分)	T「今日から新しい内容[文字の式]に入ります。」  T「(一段目を貼ってから）今、三角形は一個だよね？」 T「(二段目を貼ってから）三角形は全部で何個になったかな？」 S「4 個」 T「(三段目を貼ってから）三角形は全部で何個になったかな？」 S「9 個」	・あらかじめ三角形を段数ごとに書いておいて黒板に貼る。
予想	T「こんな風に三角形が増えていく様子を公式にしたいんだけど、どうしたらいいかな？」 S「文字を使う。」 S「いろんな式を書く。」 S「決まりを見つける。」 S「そんなことできない。」 T「じゃあ、実際に問題を解いてみよう。」	・問題を解く前に、みんなで予想することを楽しんでもらう。 ・意見が出た場合でも先生は批評しない。 ・ここでは、いろいろな人の意見を聞くことで、いろいろな発想を出してもらう。

問題提起

黒板

図のように正三角形を増やしていったときに使用する正三角形の総数を表す公式を作れ。



・あらかじめ問題を作成しておいて黒板に貼る。（時間短縮）

表をつくる
(25 分)

生徒の反応①　数えてみる

◎段数と総数の関係を表にする

段数(段)	三角形の総数(個)
1	1
2	4
3	9
4	16

・表にしていない人

T「表にすると関係が分かりやすいよ。」

・段とその段にある三角形の個数を表にしている人

段数(段)	その段にある三角形の個数（個）
1	1
2	3
3	5
4	7

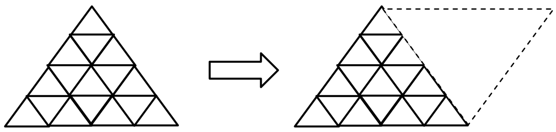
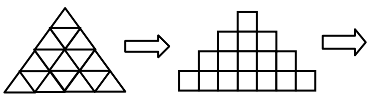
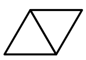
<table>
<tr>
<td></td>
<td>その表から段数と総数の式を導いてもらう
→できない人：
T「段数と総数の表を作ってみよう。」

◎段数と総数の関係を一つの式(文字の式)に表す。

・一つの式に表せていない人
・手が止まっている人

<table><tr><th>段</th><th>式</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>1+3</td></tr><tr><td>3</td><td>1+3+5</td></tr><tr><td>4</td><td>1+3+5+7</td></tr></table>
<table><tr><th>段</th><th>式</th></tr><tr><td>1</td><td>1×1</td></tr><tr><td>2</td><td>2×2</td></tr><tr><td>3</td><td>3×3</td></tr><tr><td>4</td><td>4×4</td></tr></table>
T「段ごとに式をつくるのではなくて、全ての段にあてはまる式を作ってみよう。」</td>
<td>・できるだけ生徒の解き方で解いてもらう</td>
</tr>
<tr>
<td>文字を使って式をつくる</td>
<td>T「文字を使って式を作ってみよう。」

答え「三角形の総数＝段数×段数」</td>
<td>・文字の使用を促すのは最終手段。</td>
</tr>
<tr>
<td>図形を考える</td>
<td>生徒の反応②　図形で考える</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	・図形を工夫する	
	◎三角形をつけ加えて考える	
	T「分りやすい図形にしよう。」 三角形を四角形に  プリント１	・プリント１を渡す。
	●三角形を四角形に置き換えて考える	
	T「三角形を四角形に置き換えてみたら？」	
	三角形を四角形に  総数を求めやすい形に変形してみよう プリント２	・プリント２を渡す。
	◎三角形をつけ加えて考える人	
	 の図形で考えよう プリント３	・プリント３を渡す。
	・図形から式を考える。	

文字を使って式をつくる	●三角形を四角形に置き換えて考える T「四角形の総数はどうやって求めるか考えよう。」 四角形の総数=段数×段数 ・三角形におきかえて考える 答え　「三角形の総数=段数×段数」 考え方の違う生徒を一人ずつ指名して黒板に解法を書いてもらう。 黒板 表の人　三角形の人　四角形の人	・解答が終わった生徒の中から指名する

表の人

・表を使った生徒を一人指名する。

黒板

総数（段）	三角形の総数（個）
1	1
2	4
3	9
4	16

１段の時：１×１＝１
２段の時：２×２＝４
３段の時：３×３＝９
４段の時：４×４＝１６

段数になっているから

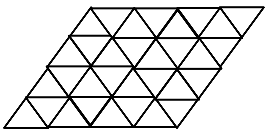
A. 三角形の総数＝段数×段数

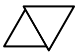
三角形の人

・三角形をつけ加えた生徒を一人指名する。

黒板

三角形をつけ加えて平行四辺形を書く

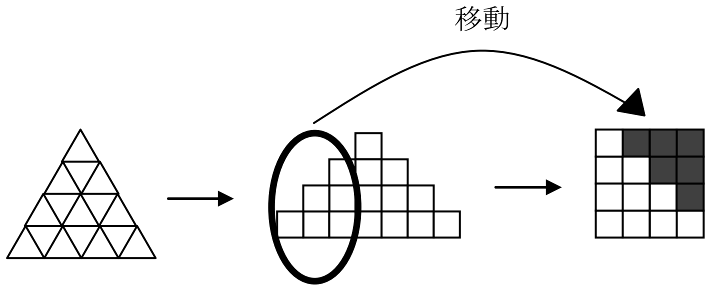


 の総数は　４×４

 の総数は三角形の総数と同じ

このとき４は段数なので

A. 三角形の総数＝段数×段数

	四角形の人 黒板  四角形にすると 四角形の総数＝縦×横 このとき 縦＝段数 横＝段数 四角形の総数は三角形の総数と同じなので A. 三角形の総数＝段数×段数	・三角形を四角形に置き換えた生徒を一人指名する。
練り上げ (20 分)	T「どうして表を使って考えたの？」 S「分りやすくするため。」 T「何が分かりやすくなるの？」 S「段数と三角形の総数の関係が。」 T「そうだね。段数と三角形の総数の関係が分かりやすくなるね。」 T「どうして三角形をつけ加えて考えたの？」 S「考えやすい図形にしたかったから。」 T「何を分かりやすくしたの？」	

	S「段数と三角形の総数の関係。」 T「そうだね。段数と三角形の総数の関係が分かりやすくなるね。」 T「三角形を四角形に置き換えて考えたらどんな良いことがあるの？」 S「段数と三角形の総数の関係が分かりやすくなる。」 T「そうだね。段数と三角形の総数の関係が分かりやすくなるね。」 T「どの方法で考えても、段数と三角形の総数の関係が分かりやすくなるよね。」 T「どの考え方でも、段数と三角形の総数の関係が分かったら同じ公式が作れたね。」 T「と言うことは、どんな問題でも関係が分かれば公式が作れるね。」	
まとめ	T「仮に段数を n と言う文字で置いてみたら三角形の総数 ＝ n × n って言う公式ができたね。」 T「文字を使って公式を作ることができたけど、どんないいことがあるのかな？」 S「いろいろな場合が表せる。」 S「かっこいい。」 S「便利。」	・生徒の意見を聞くだけ（批評しない）

	T「じゃあ、みんなで確かめてみよう。」 T「好きな数字をnにいれて三角形の総数を求めてから、実際に図を描いて確かめてみよう。」 T「どうなった？」 S「4段の時できました。」 S「6段の時できました。」 ： ： T「求めた数と、数えた数が一緒になったかな？」 S「なったー。」 T「文字を使ったらかっこいいし、いろいろな場合が表せるし、便利だね。」	・生徒が挙げてくれた意見をみんなで確かめる ・生徒の発言をできるだけ織り交ぜる。

8.感想

この数学学習指導設計Ⅱを受講するまでは、授業を行うのがここまで大変だとは思っていませんでした。今まで自分が習ってきた知識を生徒にどれだけ分かりやすく説明するか、これが授業を行う上で最も大切なことであり、これをどのように行うかのみを教師は考えていくものだと考えていたからです。

しかし、この授業を受講して気づいたことは、教師は生徒が問題を解けるような知識を与えるのではなく、生徒がその知識、またはそれに近い考えを生徒自身に気づいてもらうような支援をすることが重要ということです。また、それを実践するための指導設計を作成する上で教師は授業ごとにどういった「ねらい」があるか、その「ねらい」を達成すべく、問題を提起し、支援した上で生徒はどういった反応を示すか予想しながら作成する大変さが十分に分かりました。今回は 2 人で考えて作成したが、実際の現場ではでこの作業を 1 人で行うことになり、とても大変だと思います。

しかし、今回の授業で褒められたこと、注意されたことを今後の自分に少しでもプラスになるようにしていきたいです。

朝岡卓哉

指導案を自分達で作るということを、私は最初、楽しそう、自分がやりたい授業を書けばいいだけ、などと簡単に思っていました。しかし実際に単元を決めて作り始めてみると、指導案を作ることは、私が想像していたよりもはるかに難しいということを実感しました。

自分達では、生徒に伝わりやすい授業構成にしているつもりでも、実際に模擬授業をみんなの前でやってみたり、指導案についての質問をされたりすることによって、今の自分達が考えた授業では、生徒に何も伝わらないのだということを知りました。

教科書の比較や、数学史・指導要領から資料を集めることはとても大変だったし、あまり意味がわからない部分も多数ありました。しかし、指導案を書き進めながら資料を集めていくうちに、数学史と教科書に使用されている言葉の意味の対応関係や、指導要領と教科書の対応を以前より理解できるようになれたと思います。

この授業を通して、教師が本当に数学を理解することによって初めて、生徒が理解しやすい授業を作り上げることができると知ることができました。将来、この授業で学んだような指導案や本当に分かりやすい授業を自分で作り上げることができる教師になるためにもっと勉強していきたいです。

谷秋沙