

数学学習指導設計

高等学校数学

「単元名：微分」

テーマ：微分係数

H2

下尾 祐太

横山 裕太郎

中尾駿介

目次

単元の選定	2
学習指導要領解説	2
微分・積分学の歴史	3
教科書の違い	5
指導計画	8
指導案作成の過程	9
数学指導案	13
個人の感想	16

1. 単元の選定

数学 微分（微分係数と導関数）

～選定理由～

高校数学の最終目標が微分・積分ができることと考え、まずはその導入部分である微分係数と導関数を学習することにした。

2. 学習指導要領解説

2.1 数学

目標

式と証明・高次方程式，図形と方程式，いろいろな関数及び微分・積分の考えについて理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，それらを活用する態度を育てる。

2.2 微分・積分の考え

具体的な事象の考察を通して微分・積分の考えを理解し，それを用いて関数の値の変化を調べることや面積を求めることができるようにする。

ア 微分の考え

(ア) 微分係数と導関数

微分係数や導関数の意味について理解し，関数の定数倍，和及び差の導関数を求めること。

(イ) 導関数の応用

導関数を用いて関数の値の増減や極大・極小を調べ，グラフの概形をかくこと。また，微分の考えを事象の考察に活用すること。

イ 積分の考え

(ア) 不定積分と定積分

不定積分及び定積分の意味について理解し，関数の定数倍，和及び差の不定積分や定積分を求めること。

(イ) 面積

定積分を用いて直線や関数のグラフで囲まれた図形の面積を求めること。

[用語・記号] 極限值， $\lim$

[内容の取り扱い]

アについては，三次までの関数を中心に扱い，イについては二次までの関数を扱うものとする。アの(ア)で扱う極限については，直観的に理解させる程度にとどめるものとする。

3. 微分・積分学の歴史

3.1 微分・積分学の歴史

今日の微積分学を創始したのは17世紀のことで、イギリスの数学者ニュートンとドイツの数学者ライプニッツが独立に考えはじめた。しかし、微積分につながる発想は、何千年も前からいろいろあった。例えば、古代エジプトでは、ピラミッドの体積や円の面積を近似する方法が知られていた。古代ギリシャのアルキメデスは円周を c 、円の半径を d とするとき、

$$\frac{1}{37}d < c < \frac{10}{371}d$$

がなりたつことを証明した。その証明は、ギリシャの天文学者で数学者でもあるエウドクソスが考えた、内接する図形と外接する図形をもちいる方法を発展させたものであった。アルキメデスは、同じ方法によって、図形の面積や体積ももとめた。彼の著書「方法」によると、図形を平行にうすく切って考える方法など、今日の求積法にあたるものを発見し、さまざまな結果をえている。中世後期になってヨーロッパの数学者は、アルキメデスの著作をアラビア語の翻訳からまなんだ。古代ギリシャの思想家は、もっぱら「無限」からみちびかれる矛盾について考えたが、中世後期の哲学者による無限についての考察には、数学に寄与するものがあつた。

3.2 幾何学と解析

17世紀初めまでには、じつにさまざまな図形の面積や体積をもとめる方法がみつかつていた。イタリアの物理学者ガリレオの弟子である数学学者カバリエリは、1635年刊行の「不可分者による連続体の新幾何学」という著作のなかで、ドイツの天文学者ケプラーが考えた体積を求める方法を拡張した。「分割不可能な量」とカバリエリがよんだ無限に小さな量を考えることにより、曲線

$$y = x^n (n = 1, 2, \dots, 9)$$

と x 軸とその間にある部分の面積をもとめた。この面積に関する定理(カバリエリの定理)は、ヨーロッパじゅうに知られるようになった。ほぼ同じころ、フランスの哲学者で数学者のデカルトの「幾何学」が出版された。この中で、デカルトは座標をもちいて曲線をあらわし、幾何学的な問題を解くのに代数的な解析がつかえることをしめた。解析幾何学のもう1人の創始者であるフランスの数学者フェルマーは、代数式の最大値や最小値をもとめる方法として、微分法で現在つかわれるのとひじょうに近い方法を発見した。

約20年後、イギリスの数学者ウォリスは「無限算術」を出版し、式の展開を有限から無限にまですすめる方法をしめた。ウォリスのケンブリッジ大学の同僚で、ニュートンの先生でもあ

った数学者バーロウは、接線をもとめる問題と面積をもとめる問題とが、ちょうど逆の関係にあることをしめた。これは、今日、微積分の基本定理とよばれているものを、幾何学的にのべたことに相当する。

3.3 微分・積分の誕生

この時代の成果をひきついで、ニュートンとライプニッツが微積分の発見者となる。ニュートンの発見(1665～66)は、無限和(無限級数)の考え方、拡張された二項定理、たがいに逆の関係にある接線と面積をもとめる計算式などを、微積分という方法にまとめあげたものだった。しかし、出版嫌いのニュートンが公表をしづっている間に、ライプニッツが彼とは独立に、1684年に微分法を、86年に積分法を発見し、その成果を公表した。このため、両者が微積分の共同発見者とされている。また、今日微積分でつかわれている記号はライプニッツがつかったものである。

3.4 人物

バーロウ (Barrow)

ニュートンを指導したことで知られる。バーロウの業績は幾何学的方法で積分と微分がお互いに逆操作であることを証明したことなどがある。

変数値の微小変化 e ,これに対する関数の変化 α に対し、 $\frac{\alpha}{e}$ から接線を引くことを考える。

デカルト(Descartes) 、フェルマー(fermt)

微分の概念の象徴である接線概念を本格的に導入し、微分積分の誕生におおきく関わった。

デカルトは、友人への手紙の中で、曲線と直線との二つの交点が合一する極限の場合として接線を考えた。

フェルマーは、デカルトとは独立に、曲線 $y = f(x)$ を横座標 x に応じて、長さ y の線分をとりながら、直線や円錐曲線がそれぞれ一次、二次の方程式で与えられることを示した。この仕事は今日の解析幾何学の基礎を与えるものである。さらに極小を求める方法として、極限をとる考えはなかったが、

$$\left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right]_{h=0} = 0$$

を解いて極値 x_0 を求め、極大・極小を出した。これは今日 pseudo-equality method とよばれている。



バーロウ

デカルト

フェルマー

4. 教科書の違い

4.1 昭和 60 年での比較

大日本図書

第 2 章 微分法

第 1 節 微分係数と導関数

微分係数

- ・瞬間の速さ
- ・平均変化率
- ・微分係数

導関数

- ・導関数
- ・導関数の計算
- ・微分係数の計算

課外活動  の導関数

学習研究社

第 3 章 微分法

第 1 節 微分係数

平均変化率

- ・平均の速さ
- ・平均変化率

微分係数

- ・瞬間の速さ
- ・微分係数

第 2 節 導関数

導関数

導関数の求め方

大日本図書は「微分係数と導関数」を 1 つの節にまとめているが、学習研究社は 2 つの節に分けている。これは、高校生の理解の仕方に対する考え方の違いだろう。

大日本図書の「課外活動」は、さらに理解を深めるために設定されていると考えられる。

4.2 平成 15 年での比較

啓林館

第 5 章 微分と積分

第 1 節 微分係数と導関数

瞬間の速さと極限值

関数の微分係数

- ・ 平均変化率
- ・ 微分係数
- ・ 微分係数と接線の傾き

導関数

- ・ 導関数の計算

接線の方程式

数研出版

第 6 章 微分法・積分法

第 1 節 微分係数と導関数

微分係数

- ・ 平均の速さと瞬間の速さ
- ・ 平均変化率と微分係数
- ・ 微分係数の図形的意味

導関数

- ・ 極限值と微分係数
- ・ 導関数
- ・ 導関数の性質
- ・ 変数が x 、 y でない場合の導関数

研究 速度と導関数

啓林館は、数研出版では第 2 節『導関数の応用』に導入している「接線の方程式」を、第 1 節『微分係数と導関数』に導入している。

数研出版は「微分係数の図形的な意味」から（微分係数）を定義しているが、啓林館は（微分係数）を定義してから図の説明をしている。

4.3 平成 19 年での比較

第一学習社

第 5 章 微分法・積分法

第 1 節 微分係数と導関数

平均変化率と導関数

- ・ 微分係数の図形的意味

導関数

- ・ 導関数の性質
- ・ 瞬間速度

東京書籍

第 5 章 微分と積分

第 1 節 微分係数と導関数

微分係数

- ・ 平均の速さ
- ・ 平均変化率
- ・ 瞬間の速さ

極限值と微分係数

- ・ 微分係数の図形的意味

導関数

- ・ 導関数の計算

定関数の微分

定数倍の微分

和・差の微分

- ・ 微分係数の計算

数研出版

第 6 章 微分法と積分法

第 1 節 微分係数と導関数

微分係数

- ・ 平均の速さと瞬間の速さ
- ・ 平均変化率と微分係数
- ・ 極限值と微分係数
- ・ 微分係数の図形的な意味

導関数

- ・ 導関数
- ・ 導関数の性質
- ・ 変数が x 、 y でない場合の導関数

研究 速度と導関数

東京書籍と数研出版は「平均の速さ」から「平均変化率」に導入しているが、第一学習社は「平均変化率」から入っている。

「微分係数の図形的意味」において、東京書籍と第一学習社は例題と問を出題しているが、数研出版は出題していない。

「瞬間の速さ」において、東京書籍と数研出版は数値を用いているが、第一学習社は文字を用いている。

第一学習社は、さらに理解を深めるための発展内容を導入していない。

4.4 数研出版の違い

平成 15 年では「微分係数の図形的な意味」の後に（微分係数）を定義しているが、平成 19 年では（微分係数）を定義してから「微分係数の図形的な意味」を導入している。僕たちは「微分係数の図形的な意味」を導入してから（微分係数）を定義した方が良いと考えました。

5. 指導計画（全4時間）

第1時 微分係数・・・(本時)

第2時 導関数

第3時 接線の方程式

第4時 演習

時	指導内容	指導目標	中心となる考え	問題
1 本時	微分の導入	微分係数の定義を導く。	極限を用いて微分係数を導く。	交差点から東に車で走ると、 t 秒後までに進んだ距離は $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$ と表せる。10秒の時の速さは、いくらでしょう。
2	微分係数と導関数の計算	微分係数と導関数の理解	1時の考えを用いて、微分の計算をする。関数の定数倍および和と差の導関数について理解する。	$y = x^2 + 3x - 5$ を微分せよ。
3	接線を求める	微分を使って接線の方程式を求める。	関数について導関数を用いて関数値の変化をとらえ、それを表すグラフについて調べる。	$y = x^2 - 6x$ 上の接線の方程式を求めよ。
4	演習			

6. 指導案作成の過程

6.1 1回目

6.1.1 微分係数

関数 $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ について、次のものを求めよ。

- (1) $x = 2$ から $x = 4$ まで変化するときの平均変化率
- (2) $x = 2$ における微分係数

6.1.2 問題の目的

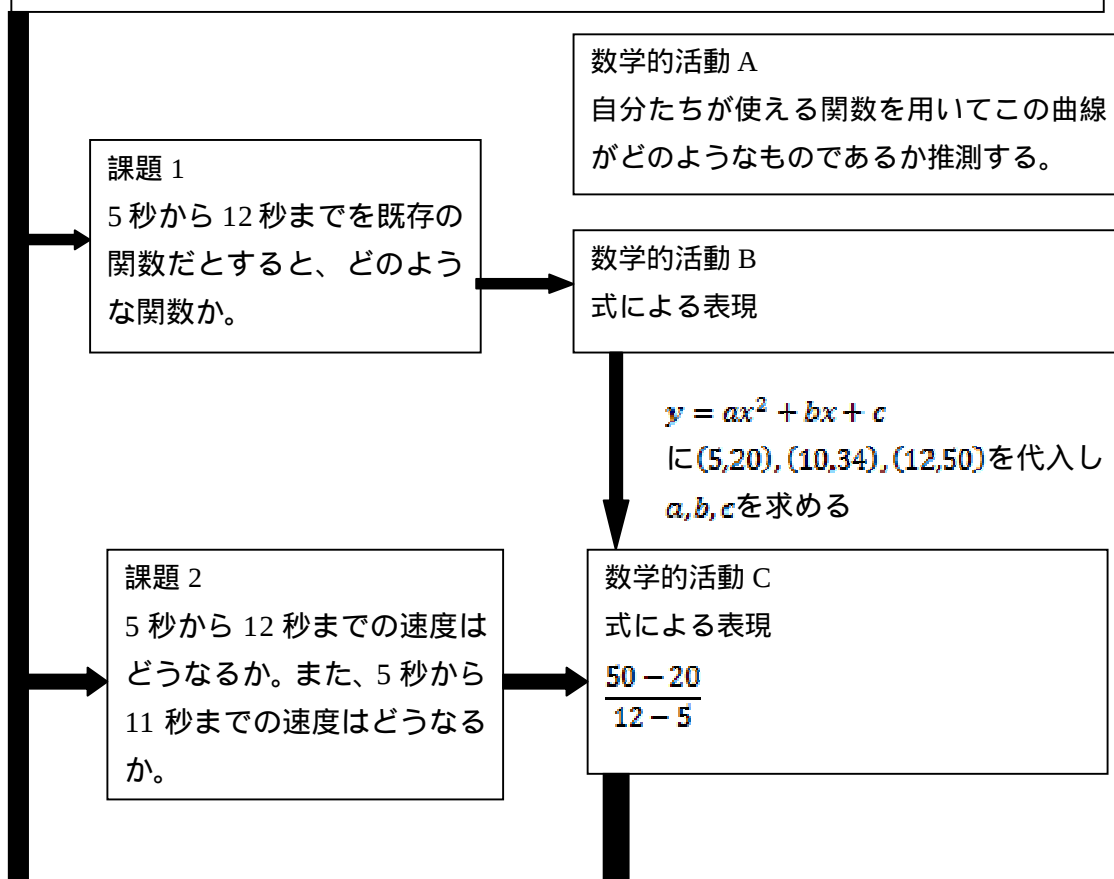
平均変化率を求めて、それに極限を用いて微分係数を求める。

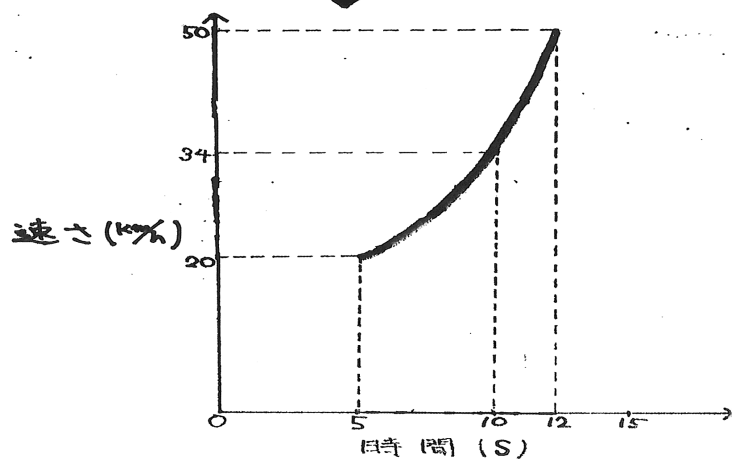
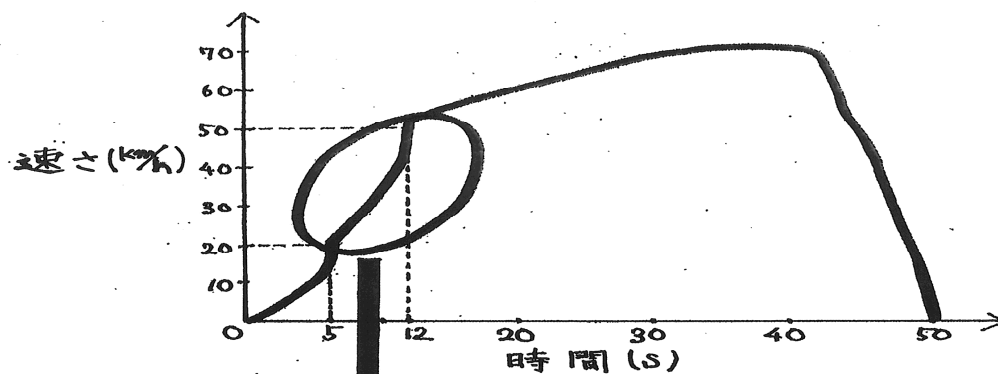
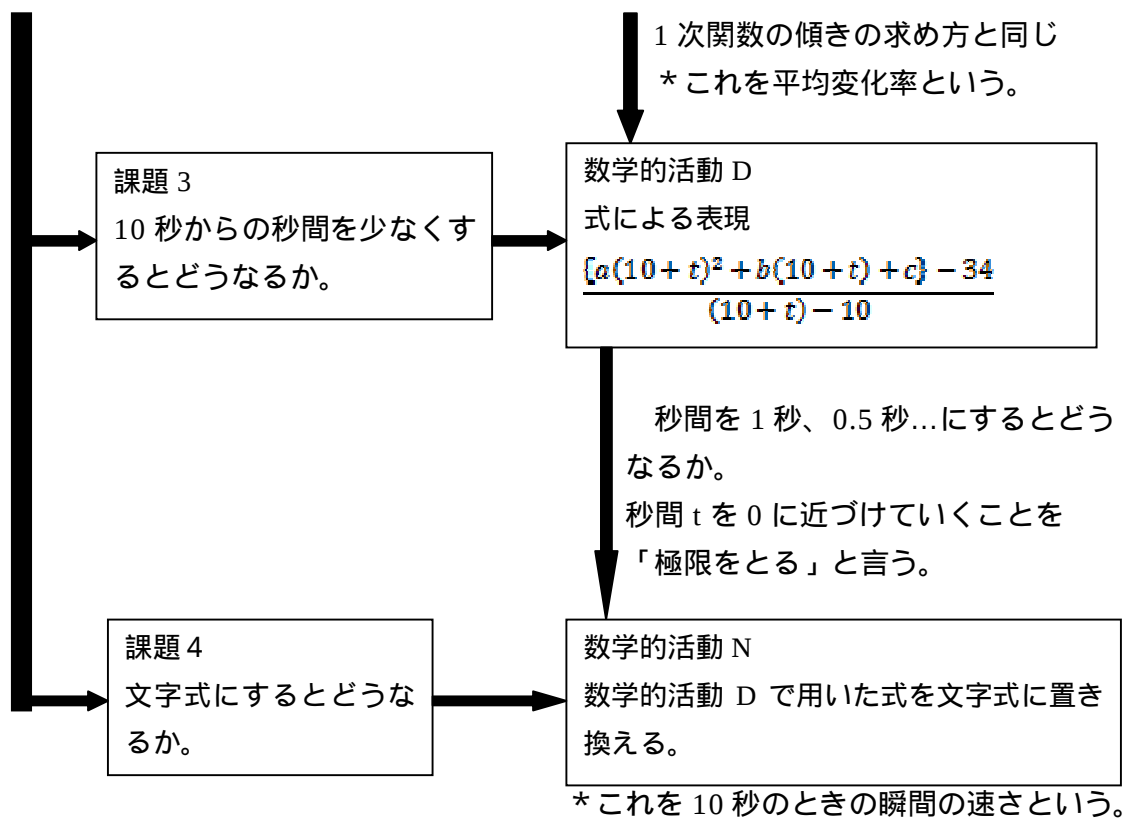
6.1.3 考察

(1)(2)においては、生徒はただ機械的に解くだけである。問題も関数をおいているだけで、練習問題としてはいいが、導入部分の問題としては生徒の自力解決の余地がないため駄目である。また、問題場面を身近なものにすることで生徒の関心を促す。

6.2 2回目

イナバ自動車学校前の交差点から次の交差点まで車で走ると、速さと時間の関係は、下の図のようになった。10秒の時の速さはいくらでしょう。





考察

このグラフでは、傾きは速さではなく加速度である。また、生徒の活動の場合分けをしていない。課題は生徒の行動を機械的にしている。

6.3 3回目

イナバ自動車学校前の交差点から次の交差点まで車で走ると、距離と時間の関係は、下の図のようになった。10 秒の時の速さはいくらでしょう。

課題 1

5 秒から 15 秒までの速さはどうなるか。
また、6 秒から 12 秒までの速さはどうなるか。

数学的活動 A1

$$\frac{143 - 23}{15 - 5} = 12$$

$$\frac{100 - 32}{12 - 6} = \frac{34}{3}$$

支援

速さの単位は何だったか？

数学的活動 A2

5 秒から 15 秒までを線分で結び、それを 1 次関数のグラフと考えて、すでに学習した 1 次関数の式から 5 秒から 15 秒までの速度を求める。

支援

点と点を直線で結ぶことで、何かわかることはないか。

課題 2

10 秒の時の速さは、どのようにして求めるか。

数学的活動 B1

2 次関数の式を導き、10 秒の時の距離を求めて、時間で割る。

支援
距離から速さを求められないか

数学的活動 B2

5 秒から 15 秒までの間で 6 秒から 14 秒、8 秒から 12 秒、9 秒から 11 秒と 10 秒に近づけていく。

支援

5 秒から 15 秒までを直線で引いて、その直線をどのように用いたらいいか？

支援

t の幅を限りなく小さくしていくことを、「極限をとる」といい、 $\lim_{t \rightarrow 0}$ と表す。

課題 3

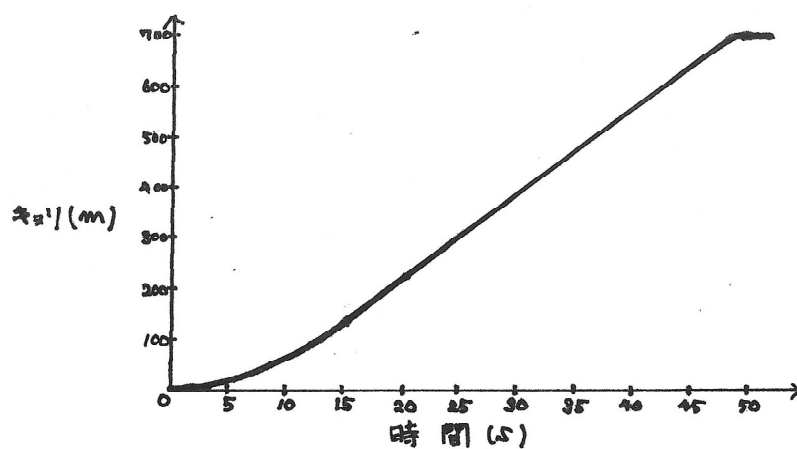
$t = a$ における速さは、どのように表せるか。

数学的活動 C

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(10+t) - f(10)}{(10+t) - 10}$$

$t = a$ では

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{(a+t) - a}$$



考察

課題 1 のように、いきなり 0 秒~15 秒の速さとおくと、生徒は機械的に解くだけである。

7. 数学指導案

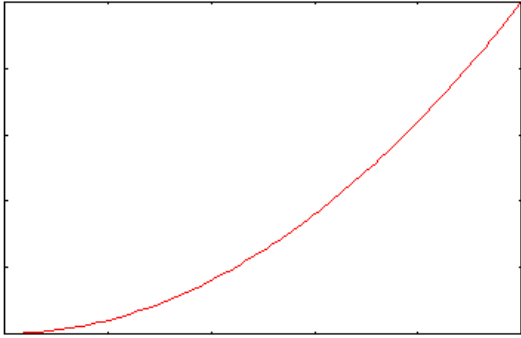
7.1 本時の目標

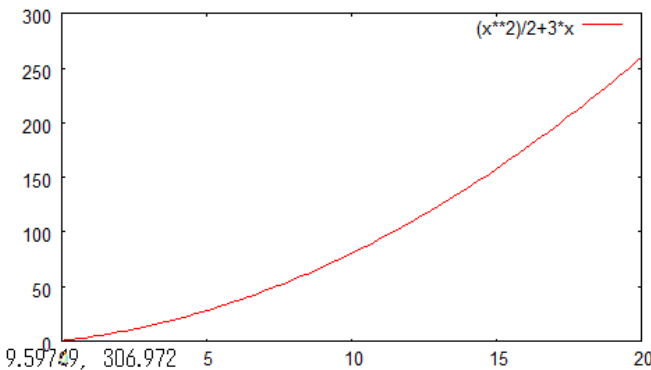
$f(t)$ の $t = a$ における微分係数

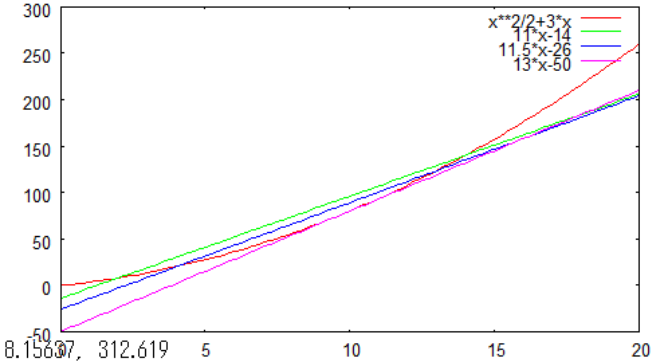
$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

を導く。

7.2 本時の展開

指導内容	学習活動・学習内容	指導上の留意点
導入 (5 分)	今日から新しい単元に入ります。 次のようなグラフを考えてみましょう。 	

	接線の傾きが大きくなるほど、速さは速くなります。 このグラフでは、傾きは速さを意味します。 問題 交差点から東に車で走ると、t 秒後までに 進んだ距離は $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$ と表せる。10 秒の時の速さは、いくらで しょう。 	生徒に発言させながら、黒板に書く。												
自力解決 (35 分)	T 0 秒から 15 秒までの速さ(=傾き)はどうなるか？ S $\frac{157.5-0}{15-0} = 10.5$ T 秒間を縮めていくと、速さはどうなるだろう。 S 秒間を縮めていき、速さはどうなるか表にまとめる。 <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"><tr><td>0 秒から 15 秒までの速さ</td><td>10.5</td></tr><tr><td>2 秒から 14 秒までの速さ</td><td>11</td></tr><tr><td>4 秒から 13 秒までの速さ</td><td>11.5</td></tr><tr><td>6 秒から 12 秒までの速さ</td><td>12</td></tr><tr><td>8 秒から 11 秒までの速さ</td><td>12.5</td></tr><tr><td>9 秒から 10.5 秒までの速さ</td><td>12.75</td></tr></table> S グラフで 10 秒の時の接線の傾きと比較する。	0 秒から 15 秒までの速さ	10.5	2 秒から 14 秒までの速さ	11	4 秒から 13 秒までの速さ	11.5	6 秒から 12 秒までの速さ	12	8 秒から 11 秒までの速さ	12.5	9 秒から 10.5 秒までの速さ	12.75	生徒に発言させる。 生徒をあてて、黒板に書かせる。
0 秒から 15 秒までの速さ	10.5													
2 秒から 14 秒までの速さ	11													
4 秒から 13 秒までの速さ	11.5													
6 秒から 12 秒までの速さ	12													
8 秒から 11 秒までの速さ	12.5													
9 秒から 10.5 秒までの速さ	12.75													

	秒間が縮まるほど、10 秒の時の接線の傾きに近づくことに気づく。  T t を b から a に限りなく近づいていくと、一定の値に限りなく近づいていく。このことを b から a の極限值という。 $\lim_{b \rightarrow a} f(t) = a$ つまり、 $f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = a$ S $f'(10) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(10+t) - f(10)}{t} = 13$	ノートにグラフを描かせる。
解説 (10 分)	関数 $y=f(x)$ において、x の値が a から b まで変化するとき、y の変化量 $f(b)-f(a)$ の、x の変化量 $b-a$ に対する場合 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ を、x が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率という。 x の値が a から $a+h$ まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ において、a の値を固定し、h を 0 と異なる値で限りなく 0 に近づける。 このとき、平均変化率が一定の値に近づくならば、そ	生徒の様子に応じて、黒板に書くスピードを調節する。

	の値を h が 0 に近づくときの平均変化率の極限值といい、記号 $\lim$ を用いて、次のように表す。 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \dots$ の極限値を、関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数または変化率といい、$f'(a)$ で表す。	
--	--	--

7.3 考察

最後の解説の平均変化率、極限、微分係数を生徒がきちんと理解できるか分からない。特に、極限の考えに困惑する生徒が出てくると思われる。教師は、極限をどのように生徒に説明したら理解できるかを考えるのが、この授業では難しいと思われる。また、自力解決を行う上である程度教師が支援をしないと、この微分係数の導入の授業はうまく進まないのではないかと考えた。

8. 個人の感想

8.1 横山 裕太郎

まず、微分積分の歴史を調べて驚いたことは微分が先に見つかったのではなく積分から微分が導かれたということでした。私は、てっきり微分が先にあってそれから積分ができたと考えていたのでとても驚きました。また、微分積分には有名な数学者や物理学者が多く携わっていたのすご分野だと思いました。

今回の授業設計を行う上でいちばん大変だったことは、学習指導案を書くことでした。初めて書くのでわからないということもありましたが、それ以上に生徒がどのように考えるだろうかと予測するのがとても難しかったです。よく考えてみると、私が高校生だった頃、公式だけを教えられてそれをただ使っただけのように感じます。しかし、この授業設計では、生徒の自力解決によってその公式を導こうとするものだったので、自力解決の過程とその支援を考えるのがいちばん大変でした。また、問題場面を考えるのも苦労しました。微分の導入の部分はどの教科書も物理的な現象を取り入れていて、これで本当に生徒の興味を引けるのかと疑問に思い問題場面を実際に自分たちで考え、生徒の興味を引けるようなものに工夫しました。微分の導入の部分では、平均変化率や微分係数がでてきますが、それを生徒にどのように考えさせるかというのが授業設計を行う上での課題となりそうだと思いました。

最後に、これから教育実習などで指導案を書くことが増えてくると思いますが、今回の経験をいかして頑張っていこうと思います。

8.2 中尾 駿介

当初、問題は関数から微分係数を公式から導くものでしたが、実際の現象のデータを取り、それから近似の関数を表し、微分係数の定義を生徒が導くものに変えました。しかし、生徒の作業を簡単にするため最初から関数を与える問題にしてみました。

また、指導案の授業構成もなっていない。生徒のアプローチ方法を複数の場合に分けて、それぞれの場合における支援を考えきれていなく、平均変化率・極限・微分係数の説明も不十分である。しかし、その説明方法が分かりませんでした。

近い未来、実際に生徒に教える時において生徒の自己解決を促す授業にできるか不安です。

8.3 下尾 祐太

今回単元を「微分・積分」とした。「微分・積分」は、高校数学を代表する単元の一つである、また微積分という概念が高校数学においてはじめて学習するものであると思い選んだ。授業では、まず数学史を調べることから始まった。数学史を調べることで、微分が何故作られたのかという事を知ることができた。授業設計を行うなかで、今まで自分が教わってきた考え方が頭の中に強く残っていたせいか、生徒の自力解決を考えるのに非常に苦労した。これは、私たちが選んだ節が新しい分野の導入部分であったからでもある。その中で特に、微分係数を求めるときに使う極限について、極限はもともと数 の範囲でもあり、そこを教えることへの難しさ、また、そもそも「極限」というものに自分自身疑問を持ち、それを生徒にどのように生徒に教えるか。この辺りが最も難しかった点である。しかし、課題をやっていく上でわかった点もある。微積分は、中学校における一次関数、数 における二次関数の流れをふむ関数学習の最終地点として重要な役割を担っているということである。

今回の授業を通して、まだまだ未解決な部分がたくさんあるので、それを次の課題としたいと思う。

参考文献

・「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」

著作:文部科学省

発行:実教出版株式会社 2009年3月31日

・「微積分 - MSN エンカルタ 百科事典 ダイジェスト」

http://jp.encyclopedia.msn.com/encyclopedia_761568582/content.html

2009年10月24日

・「数学の歴史」

<http://homepage1.nifty.com/ishituka/math/history/mathhisto.html>

2010年2月25日

・「フェルマー -Yahoo!百科事典」

<http://100.yahoo.co.jp/detail/%E3%83%95%E3%82%A7%E3%83%AB%E3%83%9E%E3%83%BC/>

2010 年 2 月 25 日

- 『高等学校 数学 』 p.30 ~ p.42
著作者：寺田文行、野口広 ほか 14 名
発行：昭和 60 年 3 月 31 日
発行所：大日本図書株式会社
- 『高等学校 新編 数学 』 p.56~p.67
著作者：赤 攝也 ほか 7 名
発行：昭和 60 年 3 月 31 日
発行所：株式会社 学習研究社
- 『高等学校 数学 』 p.158~p.173
著作者：山本芳彦 ほか 13 名
発行：平成 15 年 1 月 31 日
発行所：株式会社 新興出版啓林館
- 『数学 』 p.159~p.169
著作者：川中 宣明 ほか 14 名
発行：平成 15 年 1 月 31 日
発行所：数研出版株式会社
- 『高等学校 数学 』 p.166~p.173
著作者：正田 實 ほか 24 名
発行：平成 19 年 2 月 1 日
発行所：株式会社 第一学習社
- 『数学 』 p.171~p.185
著作者：飯高茂・松本幸夫 ほか 21 名
発行：平成 19 年 2 月 1 日
発行所：東京書籍株式会社
- 『改訂版 数学 』 p.165~p.175
著作者：川中 宣明 ほか 16 名
発行：平成 19 年 2 月 1 日
発行所：数研出版株式会社