数学の学習心理

論証

田中　光一
常友　愛子
谷本　彩子
前田　静香
早田　透

目次

単元設定の理由

中学校第 2 学年でいきなりあらわれてくる「証明」の単元において、証明の必要性が感じられる授業を行うためにはどのような授業を設計する必要性があるのかということが、教材研究の動機である。

まず証明と聞いて、私たちは「証明」とは一体なんなのであろうか、という疑問を持ったのである。また、多く証明では三角形や平行四辺形が扱われているのはなぜなのか、証明をする必要性はどのような点にあるのか、今までの実験実測による「確かめ」による説明ではなく、「証明」が求められるのはなぜかという点にも疑問を持ったのである。証明の単元では多く平行四辺形が取り上げられていることから、平行四辺形の証明がなぜ取り上げられているのかというところから、アプローチを初めた。

１学習指導要領の考察

（１）新旧学習指導要領の比較

中学校第２学年の図形に関する学習指導要領より

新【平成 20 年３月】	旧【平成 16 年５月　一部補訂】
１　目標 基本的な平面図形の性質について，観察，操作や実験などの活動を通して理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の必要性と意味およびその方法を理解し，論理的に考察し表現する能力を養う。	**１　目標** 基本的な平面図形の性質について，観察，操作や実験を通して理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解し，推論の過程を明確に表現する能力を養う。
２　内容 **Ｂ　図形** （１）観察，操作や実験を通して，基本的な平面図形の性質を見出し，平行線の性質を基にしてそれらを確かめることが出来るようにする。 ア　平行線や角の性質を理解し，それに基づいて図形の性質を確かめ説明することができること。 イ　平行線の性質や三角形の角についての性質を基にして，多角形の角についての性質を見いだせることを知ること。 〔用語・記号〕 対頂角　内角　外角	**２　内容** **Ｂ　図形** （１）観察，操作や実験を通して，基本的な平面図形の性質を見出し，平行線の性質を基にしてそれらを確かめることが出来るようにする。 ア　平行線や角の性質を理解し，それに基づいて図形の性質を確かめることができること。 イ　平行線の性質や三角形の角についての性質を基にして，多角形の角についての性質を見いだせることを知ること。 〔用語・記号〕 対頂角　内角　外角
（２）図形の合同について理解し図形についての見方を深めるとともに，平行図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ，論理的に考察し表現する能力を養う。	（２）平行図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ，論理的に考察する能力を養う。
ア　平面図形の合同の意味および三角形の合同条件を理解すること。	ア　証明の意義と方法について理解すること。
イ　証明の必要性と意味および方法について理解すること。	イ　三角形の合同条件を理解し，それに基づいて三角形や平行四辺形の性質を論理的に確かめることができること。
ウ　三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理	ウ　円周角と中心角の関係を観察や実験などを通して見出し，それが論理的に確か

的に確かめたり，図形の性質の証明を読んで新たな性質を見出したりすること。 〔用語・記号〕 定義　証明　逆　≡	められることを知ること。 〔用語・記号〕 定義　証明　≡

（２）新学習指導要領の考察

新学習指導要領で，以前のものと大幅に変化があったものはないが，論証の必要性を生徒自身が考えたり，表現したりすることを強調しているように思える。今回の指導要領改正で表現する力の必要性を強調しているのは数学だけではなく，他の教科でも同様のことが言えるようだ。

中学校第２学年では、初めて「証明」という用語が出てくる。今までの学習では帰納的な推論によって「説明」を行ってきたといえる。しかし、生徒が今まで行ってきた素朴な説明では、証明というには不十分である。生徒の素朴な説明に厳密性を要求することで証明を行うことの意味や必要性を加味させていくような活動が必要である。

２．教科書の比較

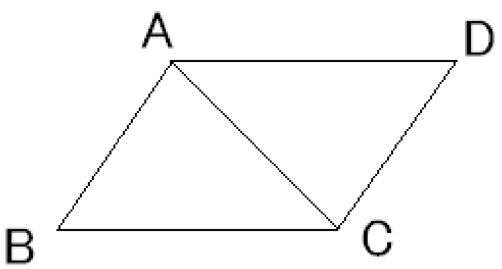
　課題を明確にし、章構成のねらいや意図を考察するために実際に教科書の問題を解いた。平行四辺形は小学校５年生でも取り上げられるので、既習事項を再確認するために小学校の教科書も比較した。
今回は小学校での既習事項である以下の３点を取り上げ、中学校でどのように扱われているのかを比較した。

1. 平行四辺形では、２組の対辺はそれぞれ等しい
2. 平行四辺形では、２組の対角はそれぞれ等しい
3. 平行四辺形では、２つの対角線はそれぞれの中点で交わる

（1）教科書３社の比較（大阪書籍、啓林館、教育出版）

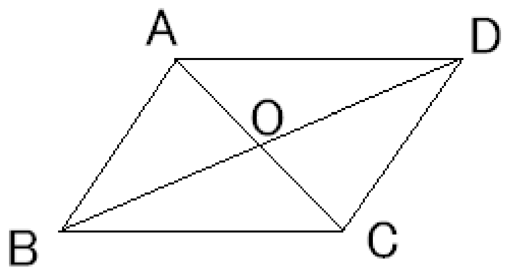
❖大阪書籍

平行四辺形の定義「２組の向かい合う辺が、それぞれ平行である四角形」



平行四辺形 ABCD において、対角線 AC を引くと
△ABC≡△CDA であることを証明しよう。
（証明の内容は教科書に記載されている）
→このことから、平行四辺形の辺、角はそれぞれどこが等しいのかを考察する。

この証明では、平行線の錯角の性質を利用している。また、三角形の合同条件を利用する。この証明で性質の１，２がすでに証明される。
しかし、気が付かない生徒もいるのではないかと考える。



次に
AO=CO　BO=DO
であることを証明する。
（証明の内容は記載なし）

以上のことをふまえ、図示しながら、３つの性質についてまとめてある。

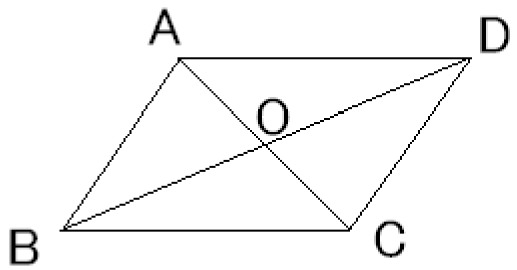
❖啓林館

平行四辺形の定義「二組の向かい合う辺が、それぞれ平行な四角形を平行四辺形という」

平行四辺形の性質・・・３つの性質について、図示しながらまとめられている。
３つの性質を順に証明していく
① 平行四辺形の向かいあう辺は等しい
仮定と結論が明確に表記され、図に使用した合同条件を示しながら証明が書かれている。

② 平行四辺形の向かい合う角は等しい
仮定と結論を自分で書き込む。
性質②を証明する。

③ 平行四辺形の対角線は、それぞれ中点で交わる



交点を O とすることを明記し、仮定と結論も分かりやすく書かれている。
①の性質から AB＝CD を使用して、性質③を証明する。
このとき、△ABO と△CDO が色づけされており、この２つの三角形に注目するように方向付けられている。

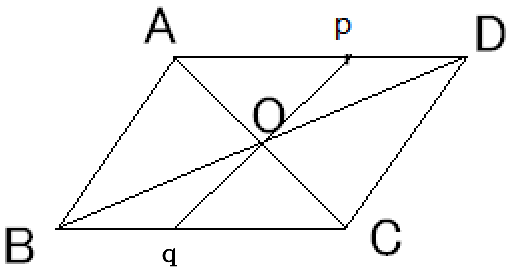
❖教育出版
定義 「２組の対辺がそれぞれ平行な四角形を平行四辺形という」
→平行四辺形の性質をいろいろあげなさい

①平行四辺形では、２組の対辺はそれぞれ等しい。
仮定、結論が書かれ、次に考えかた、そして証明が書かれている。
分かっていること、これから求めようとしているものを色分けしよう、という作業が含まれている。

②平行四辺形では、２組の対角はそれぞれ等しい。
図中に仮定と結論が色分けをして書き込まれている。
仮定が書いてあり、自分で結論を書き込む形になっている。
証明は教科書に記載されている。(このときは平行線の錯角を利用している)
次に、三角形の合同条件を使って同じものを証明する。大阪書籍の最初に出てきたものと同じである。
→１つのものを証明する場合に、様々な面に目を向けることができるのだということに気づかせることができるのではないかと考えた。

③平行四辺形では、２つの対角線はそれぞれの中点で交わる
啓林館の③と教科書への図示のしかたも酷似している。
ここでも、仮定が書かれていて、自分で結論部分を記入してから、証明を行うという手順が取られている。

その後、平行四辺形の性質がまとめられている。
他の２つの教科書と異なる点は、それぞれの性質を示した図に加えて、平行四辺形は向かい合う２組の辺が平行であるという図が示されており、→でその二つが関係付けられて載せられていることである。
３つすべての教科書に採用されている問題



ｏｐ＝ｏｑ
であることを証明する問題である。
啓林館では、２点が線分ＡＢとＣＤ上に取られている）

（２）教科書比較の考察

教科書を比較していく中で、証明の具体的な授業が始まる前には、その準備段階として平行線の錯角や同位角、三角形の合同などについての学習を行っている。前段階で証明内で使用する条件となる性質を学習することに対して、生徒はどのように取り組むのであろうか。平行線の錯角や同位角などを学習している段階では証明で使うために学習しているという意識が薄く、証明に向けて十分に準備ができているのかという点が議題に上った。

また、小学校の段階での既習事項を再度文章化して証明することへの必要性を、生徒に納得させるにはどのようなアプローチが必要になるのかも、検討しなければならないと考えた。

そして、根本的にどうして証明の学習で平行四辺形が取り扱われているのか、という点についても考察が必要であると考えられる。

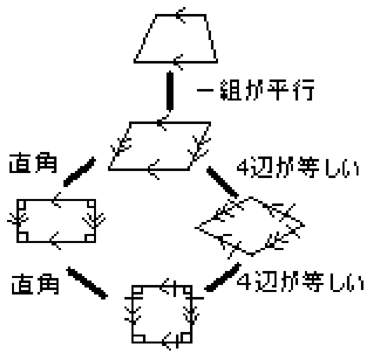
３．四角形の包摂関係

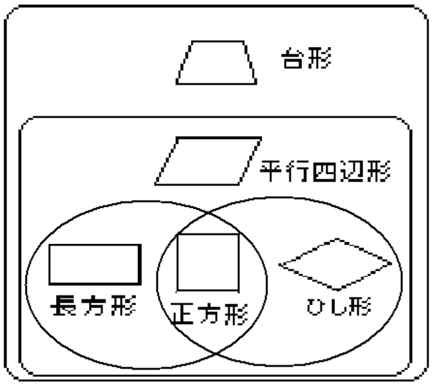
証明の学習において、なぜ平行四辺形が取り上げられるのであろうか。平行四辺形は図形の中でも「四角形」の中に分類されるものである。しかし「四角形」の中には平行四辺形だけでなく、正方形や長方形、台形やたこ形などもある。それにも関わらず、教科書で平行四辺形が取り扱われているのには、何らかの利点があるためだと考えた。

さらに、教科書比較から、平行四辺形の定義の際には、必ず「２組の向かいあう辺がそれぞれ平行のとき」と定義とされており、この必要性についても考察の余地があると考えられる。

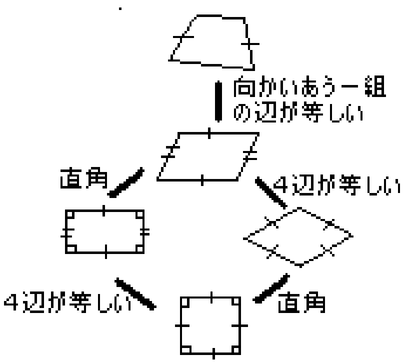
（１）平行四辺形の性質に着目した四角形の分類

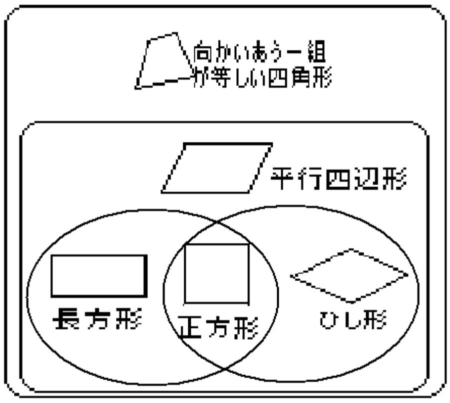
①２組の向かいあう辺がそれぞれ平行のとき（定義）



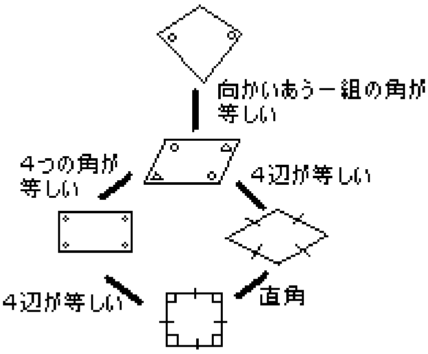


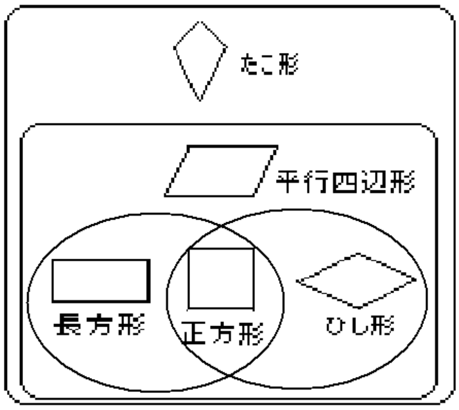
②２組の向かいあう辺がそれぞれ等しいとき



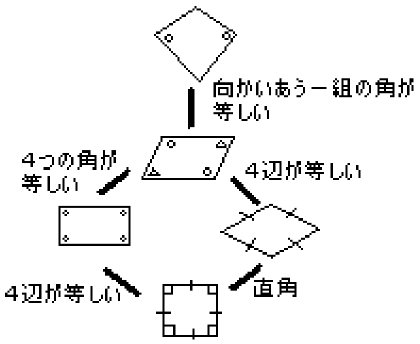


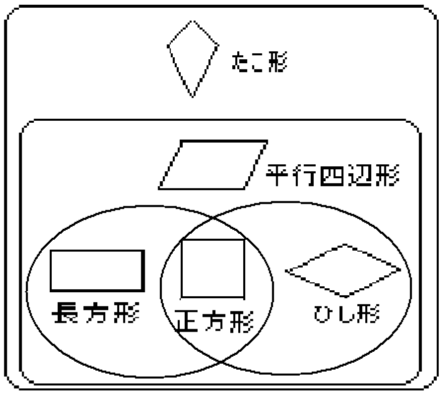
③２組の向かいあう角がそれぞれ等しいとき



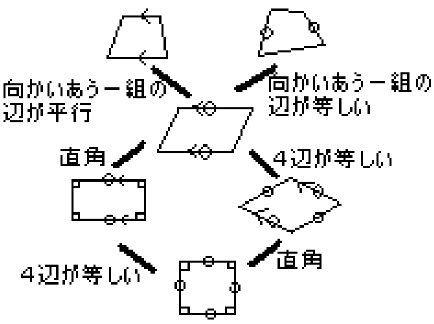


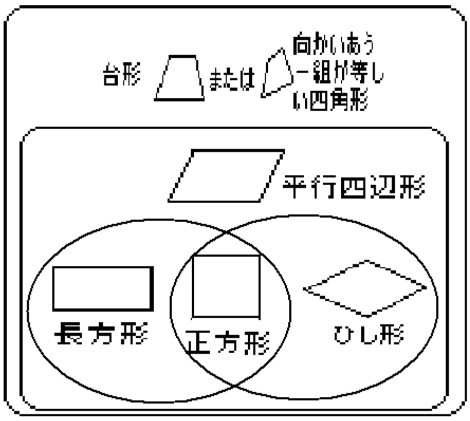
④対角線がそれぞれの中点で交わるとき





⑤１組の向かいあう辺が等しくて平行のとき





（まとめ）

なぜ平行四辺形が取り上げられるのか

→①から⑤のすべてに共通する包摂関係の最も外側にあるのは平行四辺形であった。

なぜ、「①２組の向かいあう辺がそれぞれ平行のとき」を定義としているのか？
→①の最も外側にあるのは**台形**であるが、③と④は**たこ形**であった。

台形・・・・向かいあう一組の辺が平行。

たこ形・・・隣りあう一組の辺が等しい。

「隣りあう」を規定にするより、「向かいあう」を規定にした方が平行四辺形の性質を調べる上で、便利である。

しかし、ここでの課題点は、教科書の中に出てくる包摂関係からしか考えておらず、教科書以外での包摂関係を視野に入れるべき点である。また、平行四辺形の成立条件はどの条件から始めても他のものが導き出せる同値の関係にあり、向かい合う２組の辺が平行であることが平行四辺形の成立条件のもとになる必要性はない。

（３） 平行を基にした包摂関係の良さ

平行線を基にした教科書の包摂関係以外では、どのようなものがあるかと考え、今回は対角線に着目した。しかし、現行の学習指導の図形の関係は，対角線に着目した包摂関係ではなく，平行を基にした（辺と角に着目した）包摂関係で捉えられていると考えた。中学校 2 年の「図形の調べ方」という単元では，最初に「角と平行」が取り上げられていることからも，同様のことが言えると考えられる。また，そのような理由から，たこ型ではなく台形が学習指導の内容に含まれているのではないかと考えられる。

このように，図形の調べ方では，対角線よりも平行線の性質（同位角，錯覚など）について力点が置かれている。課題を考察するために，平行線から導き出せるもののよさを吟味する必要がある。

❖平行線と対角線の比較

〇平行線から（辺と角の関係から）導き出せるもの
- 対頂角
- 平行線は交わらない（平行な 2 直線の距離は一定となる）
- 錯覚が等しい
- 同位角が等しい

↓
- 三角形の内角の和は 180 度

…

〇対角線から導き出せるもの
- 対頂角

以上のことから、対角線よりも平行線に着目した場合のほうが多くの性質を見つけだすことができ

た。よって、より、証明できる範囲が広がると考えられる。また、これらの性質は辺の長さや角の大きさなどの量を問題としないという点もある。それにより、図形を一般的にとらえることができるのである。

しかし以上の点からだけで，平行を基にした包摂関係で図形の関係を捉えることのよさであると、安易に結論付けてよいのであろうか。確かに、現段階の調査では、対角線の性質を使うよりも平行線の性質を使ったほうが性質を導き出すためには有効であるように思われるが、それが平行線の性質を採用していることの決定的な理由にはならないだろうと考えた。

４．単元構成の考察

（1）単元構成について

<table>
<tr><th>教科書の単元構成</th><th>論証グループの単元構成（案）</th></tr>
<tr><td>
１．平行と合同
角と平行線
対頂角、同位角、錯角
平行線の性質と成立条件
多角形の角
三角形の内角の和・外角の和の性質、鋭角・鈍角
多角形の内角の和・外角の和の性質
三角形の合同
合同な図形の性質
三角形の合同条件
２．証明
証明とそのしくみ
合同条件と証明の進め方
３．図形の性質と証明
三角形
二等辺三角形、正三角形、直角三角形の合同
四角形
平行四辺形の性質、平行四辺形になる条件
長方形、ひし形、正方形
</td><td>
１．平行と合同
三角形の合同
合同な図形の性質
三角形の合同条件
多角形の角
三角形の内角の和・外角の和の性質、鋭角・鈍角
多角形の内角の和・外角の和の性質
２．証明
証明とそのしくみ
合同条件と証明の進め方
３．図形の性質と証明
三角形
二等辺三角形、正三角形、直角三角形の合同
四角形
平行四辺形の性質、平行四辺形になる条件
長方形、ひし形、正方形

証明の都度必要に応じて、対頂角、平行線の性質（同位角・錯角）成立条件を学習に盛り込んでいく。
</td></tr>
</table>

教科書の単元構成は，上の表の左側の順番となっているが，論証グループは上の表の右側のように構成した．その理由として，

・最初に対頂角，平行線と錯覚・同位角などを習う必要感が感じられない．

・章の途中で証明でないものが入るため，なぜそこは証明をしないのかという疑問が生じる．証明を取りあげない事項については，単元の始めにすませてしまった方が良いと考えた．

が挙げられる．以上のことを踏まえて，証明の中で必要な定理へのアプローチを図ろうと考える．

（2）授業設計（案）

論証グループの授業設計の中で，第２時の三角形の内角の和，角と平行線を扱おうと考えた理由は，

・角と平行線の性質が証明の基本となるため，その導入を大切に扱いたいため．

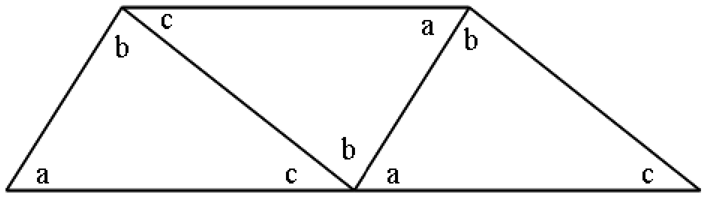
・内角の和が 180° であることから出発して，角と平行線の性質へと導くことができるため．

・対頂角，同位角，錯覚が別々の知識として与えられるのではなく相関関係のあるものとして一つの問題の中で扱いたいため.

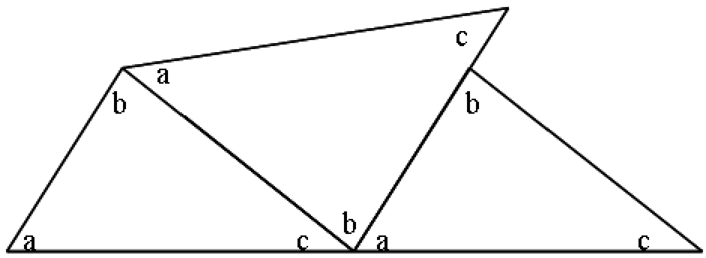
からである．教科書では，対頂角・及び平行線の錯角・同位角の性質については，定義のような位置づけであるが，論証グループでは，むしろこれらの性質を導き出すことに焦点を当てたいと考えたので，敢えて平行を既知の物として扱った.

❖本時の活動❖

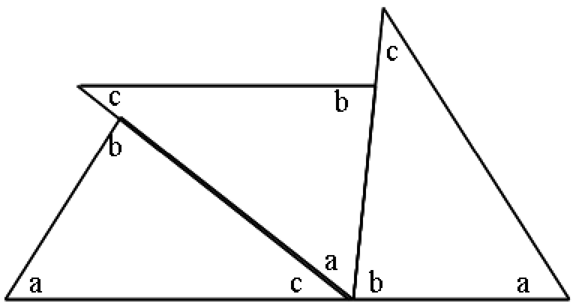
●図 A



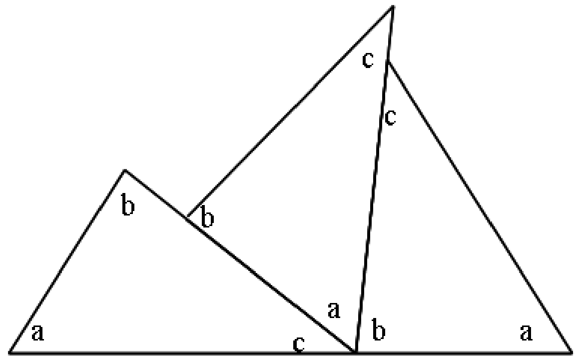
●図 B



●図 C



●図 D

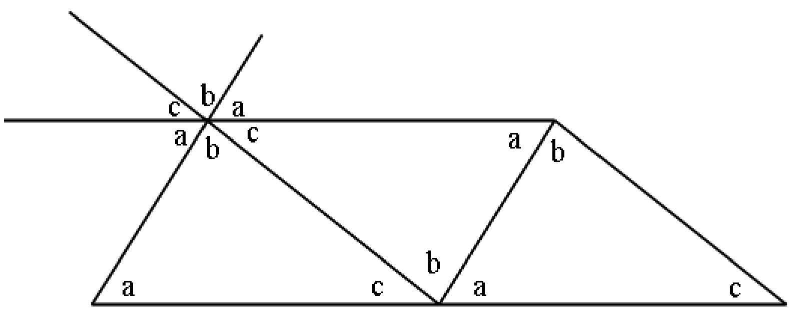


合同な三角形 3 つを，上の図のように並べた．この時，図の中に平行な辺の組が出る組み合わせ（図 A～C）と，そうでない図 D がある．どの様な条件を満たせば平行な辺の組が存在するかを考えなさい.

・生徒にさせたい活動

●辺の長さは平行であるかどうかに関係が無いことに気付く.
●平行が出来る図，出来ない図を比較することで，角の位置関係がポイントであることに気付く
●それにより，同位角や錯角が等しければ平行であることに気付く
●更に，同位角と錯覚が等しいことなどを利用することで，外角の性質の一部や，対頂角の性質を見出すことが出来る.

＊対頂角や外角の性質が見えるようになる補助線の一例



課題点

問題提示の際,「平行である」ことを示す必要性があるが，どの様な理由で平行であると言うかについて，十分な議論が尽くせていない．証明できないので，定義付けのような形にならざるを得ない．またこの考え方では、証明の学習内容であることにもかかわらず、演繹的ではなく、帰納的な学習内容となってしまっている。また、今後使用してもよいと決めた事象のみを使って証明していくという了解のもと学習を進めていくためには矛盾が生じている。

平行四辺形が証明の問題で取り上げられていることと併せて、単元構成がどのような背景をもってつくられているかについて、調査する必要性があると考えた。

５．命題のネットワーク

（１）平面幾何の公理的構成

命題のネットワークを作るにあたり、中学校 2 年生で学習する証明に関連があると考えられる公理、定義、定理を小平邦彦著『幾何のおもしろさ』の第 1 章「平面幾何の公理的構成」を参考にし、整理した。教科書で学習する内容について書かれているものについて、番号、系を□で囲んで示した。

§1　結合と順序の公理

公理	定義	定理
1.相異なる二点AとBが与えられたとき、AとBを通る直線はただ一つしかない。 **⇒公理：点と直線**		1.相異なる二直線は交わらないか、またはただ一つの点で交わる。 **⇒定理：点と直線**
2.直線 l が三点A,B,Cのいずれをも通らないとき、l は三つの線分AB、AC、BC のいずれとも交わらない。または、そのうち二つと交わって他の一つと交わらない。 **⇒公理：線分と点**	1.線分ABがlと交わらないならば点 A と B は**同じ側**にあるという。線分AB が l と交わるならば A と B は直線 l の**反対側**にあるという。	2.直線 l に関してBとAが同じ側にあり、CとAも同じ側にあるならば、B と C は同じ側にある。l に関して B と A が反対側にあるとき C と A が反対側にあるならば B と C は同じ側にある。L に関して B と A が同じ側にあり、C と A が反対側にあるならば、B と C は反対側にある。 **⇒定理：線分と点**
	2. l 上にOと異なる二点 A、Bをとったとき、O が A と B の間にないならばAとBは点Oに関して**同じ側**にあるという。O が A と B の間にあるならばAとBは点O に関して**反対側**にあるという。	3.直線 l 上の点Oに関して B と A が同じ側にあり、C と A も同じ側にあれば、B と C は同じ側にある。Oに関して B と A が反対側にあり、C と A も同じ側にあり、C と A が反対側にあれば、B と C は反対側にある。 **⇒定理：直線上の点の位置**
	3.∠AOB が平角で	4. ∠AOB が平角ではないとき、半直線 OC が線分

	ない場合、∠AOB の辺上にない点 P が直線 OA に関して B と同じ側に、直線 OB に関しては A と同じ側にあるとき、P は∠AOB の**内部**にあるという。そして∠AOB の内部にある点の全体を∠AOB の内部と呼ぶ。∠AOB が平角ではない場合には直線 AB が定める二つの半平面のいずれか一方を選んでそれを∠AOB の内部とよぶ。	AB と A と B の間の一点で交わるならば、点 C は∠AOB の内部にある。 **⇒定理：角と点** 5.∠AOB が平角でないとき、点 C が∠AOB の内部にあれば半直線 OC は線分 AB と A と B の間の一点で交わる。 **⇒定理：角と線分** 6.二点 B と C が直線 OA の同じ側にあるとき、半直線 OB と半直線 OC が一致しないならば、点 C が∠AOB の内部にあるか、または点 B が∠AOC の内部にある。 **⇒定理：直線と線分**
2.△ABC の頂点を通らない直線は△ABC の 3 辺のいずれとも交わらないか、または、二辺と交わって他の一辺と交わらない。 **⇒公理：三角形と直線**	4.点 P が直線 BC に関しては頂点 A と同じ　側にあり、直線 CA に関しては頂点 B と同じ側にあり、直線 AB に関しては頂点 C と同じ側にあるとき、P は△ABC の**内部**にある点の全体を△ABC とよぶ。	7. D を△ABC の辺 BC 上の B と C の間の一点とすれば、直線 AD 上の A と D の間にある点は△ABC の内部にある。△ABC の頂点を通らない直線 l が△ABC と二点で交わるとき、その二点の間にある l 上の点は△ABC の内部にある。 **⇒定理：三角形と内部の点**ˆ 8. P を△ABC の内部の一点、l を P を通る直線とする。l が△ABC の頂点の一つ、たとえば A を通るならば l はその対辺 BC と交わる。そしてその交点を D とすれば D は B と C の間にあり、P は A と D の間にある。l が△ABC の頂点のいずれも通らないならば l は△ABC と二点で交わる。その交点を E、F とすれば P は E と F の間にある。 **⇒定理：三角形と内部の直線** （系 1.三角形の内部の点 P から出る半直線はその三角形とただ一つの点で交わる。） （系 2.三角形の内部の点 P と辺上の点 Q を結ぶ線分 PQ の上の Q 以外の点はすべてその三角形の内部にある。）

		（系 3.三角形の内部の点 P と外部の点 Q を結ぶ線分 PQ はその三角形とただ一つの点で交わる。） （系 4.△ABC の辺上にない二点 P と Q を結ぶ線分 PQ が△ABC と交わらなければ、P と Q は両方共△ABC の内部にあるか、または両方共△ABC の外部にある。） 9.∠AOB の内部の点 P と外部の点 Q を結ぶ線分 PQ は∠AOB とただ一つの点で交わる。 **⇒定理：角と外部と内部を結ぶ直線** （系.線分 PQ の内部にあるか。または両方とも∠AOB の内部にあるか、または両方とも∠AOB の外部にある）

§2　計量の公理

公理	定義	定理
3.線分 AB 上の点 C が A と B のいずれとも異なるとき、等式 AB=AC＋CB が成り立つ。 **⇒公理：線分の和**		10.半直線 OA 上に O と異なる点 C を取ったとき、OC＝OA ならば C は A と一致する。 **⇒定理：線分と等しさ**
4.点 C が∠AOB の内部にあるとき、等式∠AOB＝∠AOC＋∠COB 成り立つ。 **⇒公理：角の和**		11.直線 OA の同じ側二点 B と点 C をとったとき∠AOB＝∠AOC ならば、半直線 OC と半直線 OB は一致する。 **⇒定理：角と等しさ**

§3　三角形の合同

公理	定義	定理
5.△ABC と一直線上にない任意の三点 O,P,Q に対して、半直線 OP 上の点 B'と直線 OP に関して Q と同じ側にある点 C'を合同式△OB'C≡△ABC が成り立つ	⑤.△ABC、△DFC についての等式∠A=∠D、∠B=∠E、∠C＝∠F、BC=EF,CA=FD、AB=DE がなりたつとき、△ABC と△DEF は合同であるという。△	12. 線分 AB と半直線 OP が与えられたとき、直線 OP 上に点 B'を OB'＝AB となるように定めることができる。 13.∠CAB と一直線上にない三点 O、P、Q が与えられたとき、直線 OP に関して Q と同じ側にある点 C を'∠C'OP＝∠CAB となるように定めることができる。 **⇒定理：線分の合同** 14.△ABC と△DEF において AB=DE ならば、直線

ように定めることができる。 **⇒公理：三角形の合同**	ABC と△DEF が合同であることを△ABC ≡ △DEF とあらわす。	DE に関して F と同じ側にある点 C'を合同式△DEC'≡△ABC が成り立つように定めることができる。 **⇒定理：角の合同** $\boxed{15}$（二辺夾角の合同の定理）二辺とその夾角がそれぞれ等しい二つの三角形は合同である。 **⇒定理：三角形の合同条件（二辺夾相等）** $\boxed{16}$二等辺三角形の二つの底角は等しい。 **⇒定理：二等辺三角形の定理** $\boxed{17}$（一辺両端角の合同定理）△ABC と△DEF において AB=DE、∠A=∠D、∠B=∠E ならば△ABC ≡△DEF である。 **⇒定理：三角形の合同条件（二夾角相等）** $\boxed{18}$△ABC において∠B=∠C ならば AC=AB である。 **⇒定理：二等辺三角形の性質** $\boxed{19}$（三辺合同定理）三辺がそれぞれ合い等しい二つの三角形は合同である。 **⇒定理：三角形の合同条件（三辺相等）** （角の大きさに関する基本的な定理） $\boxed{20}$.すべての平角は等しい。 **⇒定理：直線は 180°** （系.∠AOB＝2∠R ならば∠AOB は平角である。） $\boxed{21}$.対頂角は等しい。 **⇒定理：対頂角の性質** $\boxed{22}$二つの直線 l と m が第三の相異なる二点で交わっているとき、錯覚が等しければ l と m は交わらない。 **⇒定理：錯角と交わらない 2 直線** （$\boxed{系}$.二つの直線 l と m が第三の直線と相異なる二点で交わっているとき、同位角が等しければ l と m は交わらない） 23.（二角一対辺の合同定理） △ABC と△DEF において∠A=∠D、∠C=∠E、AB＝DE ならば△ABC≡△DEF である。 **⇒定理：三角形の合同（教科書外：定理 17'）** 24.△ABC の辺 BA の延長線上に点 E をとる。点 D

		が直線 AB に関して C と同じ側にあって∠EAC＝∠ABC ならば D は外角∠CAE の内部にある。 **⇒定理：平行線と直線で作る角** （系 1.三角形の外角はその内対角のいずれよりも大きい。） （系 2.P を△ABC の内部の一点とすれば∠BPC＜∠BAC である。）

§4　三角形における辺と角の大小

公理	定義	定理
		25.△ABC において AC＜AB ならば∠B＜∠C、AC＞AB ならば∠B＞∠C である。 26. △ABC において∠B＜∠C ならば AC∠AB、∠B＞∠C ならば∠AC＞∠AB である。 27..△ABC において AB＋BC＞AC である。すなわち、三角形の二辺の和は第三辺より大きい。 28. △ABC と△DEF において AB=DE,AC=DF であるとき∠A＜∠D ならば∠BC＜∠EF である。 29. △ABC と△DEF において∠A＜∠D ならば∠BC＜∠EF、∠A＝∠D ならば∠BC＝∠EF、∠A＞∠D ならば∠BC＞∠EF である。。 30. .△ABC と△DEF において AB=DE,AC=DF であるとき∠BC＜∠EF ならば∠A＜∠D、∠BC＝∠EF ならば∠A＝∠D、∠BC＞∠EF ならば∠A＞∠D である。

§5　中点、垂線、直角三角形

公理	定義	定理
		31.任意の線分 AB に対してその中点に存在する。 **⇒定理：中点の存在** 32. 直線 l と l 外にある点 C が与えられたとき、C を通って l に垂直な直線がただ一つ存在する。 **⇒定理：垂直の存在** $\boxed{33}$ 二等辺三角形△ABC の頂点 A と底辺 BC の中点 M を結ぶ直線 AM は底辺 BC に垂直で頂角∠A を二等分する。 **⇒定理：二等辺三角形の頂角の二等分線** 34. △ABC において∠C＝∠R ならば∠A＜∠R、∠B＝∠R、AC＜AB、BC＜AB である。 **⇒直角三角形の角** 35. △ABC と△DEF において∠C=∠F、AB=DE、AC＝DF ならば△ABC≡△DEF であるか,または∠B＋∠E＝2∠R である。 $\boxed{36}$（斜辺と一辺の合同定理）.△ABC と△DEF において∠C＝∠F=∠R、AB=DE、

		AC=DF ならば△ABC≡△DEF である。 **⇒直角三角形の合同条件** $\boxed{37}$点 P が二点 A と B から等距離にあるための必要にして十分な条件は線分 AB の垂直二等分線上にあることである。 **⇒定理：垂直二等分線** 38.△ABC の頂点 A からその対辺 BC へ下ろした垂線の足を H とする。△C が鋭角ならば H は B と C の間にあり、∠C が鈍角ならば H は辺 BC の延長線上にある。 **⇒定理：垂線の位置** （系.直線 OB 外の点 A から直線 OB へ下した垂線の足を H とする。∠AOB が鋭角ならば H は半直線 OB 上にある。∠AOB が鈍角ならば H は半直線 OB の延長上にある。） $\boxed{39}$∠AOB は平角でないとして、∠AOB の内部の点 P から辺 OA および辺 OB に下ろした垂線の足をそれぞれ H および K とする。このとき PH=PK であるための必要にして十分な条件は P が∠AOB の二等分線上にあることである。 **⇒定理：二等分線と辺の距離**

§6　平行線の公理

公理	定義	定理
	6. 二つの直線 l と m が交わらないとき l と m は平行であるという。	$\boxed{40}$.二つの直線 l と m が第三の直線と相異なる二点で交わっているとき、錯角が等しければ l と m は平行である。 **⇒定理：錯角と平行** （系 1.二つの直線 l と m が第三の直線と相異なる二点で交わっているとき、同位角が等しければ l と m は平行である。） （系 2.一つの直線に垂直な二つの直線は平行である。）
6.同傍内角∠BAD と∠BAC の和が 2∠R に小さければ l と m は直線 AB に関して C と同じ側にある一点で交わる。 **⇒公理：2 直線で作る内角** （平行線の公理：		$\boxed{41}$.二つの直線 l と m が第三の直線と相異なる二点で交わっているとき、l と m が平行ならば錯角は等しい。 **⇒定理：平行線で作る錯角** 42.二つの直線 l と m が第三の直線と相異なる二点 A、B で交わってなる錯角が等しければ第四の直線と相異なる二点 C、D で交わってなす錯角も等しい。 **⇒定理：2 直線で作る錯角と平行線** $\boxed{43}$ 三角形の内角の和は 2∠R に等しい。 **⇒定理：三角形の内角の和は 180°** （系 1.三角形の外角はその内角の和に等しい。）

直線 l と l の外の一点 B を通って l に平行な直線はただ一つしかない。）		（系 2.直角三角形の直角でない二つの内角の和は∠R に等しい。） （系 3.正三角の三つの角はそれぞれ 2/3∠R に等しい。）
4..点 C が優角∠AOB の内部にあって∠AOC の内部と∠COB の内部が共に∠AOB の内部に含まれているとき、等式 ∠AOB ＝ ∠AOC ＋ ∠COB が成り立つ。 **⇒公理：四角形の内部の点で作る角**	7. 点 P **が凸四角形**の各辺を含む直線に関してその辺上にない頂点と同じ側にあるとき、P はその四角形の**内部**にあるという。 8.**凹四角形**ABCD において対角線 AB が対角線 BD の延長と交わっているとき、∠ABC の内部と∠ADC の外部の共通部分を.凹四角形 ABCD の**内部**とよぶ。	$\boxed{44}$.四角形の内角の和は 4∠R に等しい。 **⇒定理：四角形の内角の和は 360°** $\boxed{45}$.1)平行四辺形の対角は等しい。 **⇒定理：平行四辺形の性質** 2)平行四辺形の対辺は等しい。 **⇒定理：平行四辺形の性質** $\boxed{46}$.平行四辺形の対角線は互いに他を二等分する。 **⇒定理：平行四辺形であるための条件** $\boxed{47}$.二組の対辺が等しい四角形は平行四辺形である。 **⇒定理：平行四辺形であるための条件** $\boxed{48}$.一組の対辺が平行で等長な四角形は平行四辺形である。 **⇒定理：平行四辺形であるための条件** $\boxed{49}$.対角線が互いに他を二等分する四角形は平行四辺形である。 **⇒定理：平行四辺形であるための条件** $\boxed{50}$.三角形の二辺の中点を結ぶ線分は第三辺に平行で、その長さは第三編の長さの半分に等しい。 **⇒定理：中点連結定理** （系.△ABC の辺 AB の中点を通って辺 BC に平行な直線は辺 AC を二等分する。） 51.平行線 l 、l'、l'が直線 a および直線 b と交わっているとして、その交点をそれぞれ A、A'、A"および、B、B'、B"とする。このとき B'が BB"の中点ならば A'は線分 AA"の中点である。 **⇒定理：3 平行線と 3 直線で作る中点** 52.平行線 l、l1、l2、…、ln が直線 a および B と交わっていてその交点がそれぞれ A、A1、A2、…、An および B、B1、B2、…、Bn であるとき、B、B1、B2、…、Bn－1 が線分 BBｎを n 等分するならば A1、A2、…、An－1 は線分 AAn を n 等分する。 **⇒定理： n 平行線と n 直線で作る中点** 53.任意の自然数 n≧2 に対して任意の線分 AB の n 等

		分点が存在する。 **⇒定理：線分のn等分点**
7.長さが 1 に等しい線分 OE が存在する。 **⇒公理：長さ 1 の線分**		54.任意の正の有理数rに対して長さがrに等しい線分が存在する。 **⇒定理：長さrの線分**

（2）命題のネットワークの考察

学校教育の場面で直線や角が考えられるのは、前提として、すべての図形が平面上で扱われていることを前提としてあげることができる。また多くがユークリッド原論を基にしていることも分かった。ユークリッド原論は複雑なものからより少ない要素のものへと分解していく作業を通して、定義や公理、公準、命題が定められ、「ユークリッド原論」の中でそれ以外の特例を許容しないということが了解のうちに示されている。

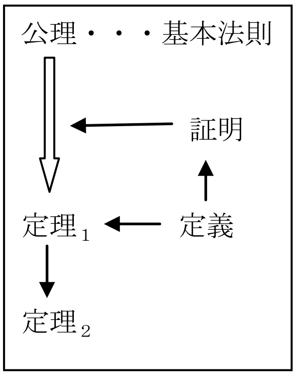
また、ユークリッド原論の中で証明されている命題は、すべて作図による具体例を文章化しているものである。中学２年生で証明を行うまでに作図の学習を行ってきた背景には、
教科書が「ユークリッド原論」を基に図形の単元を構成しているためだということがわかった。また単元の章構成も「ユークリッド原論」の命題の並び順に批准している。

６．証明指導に焦点を当てた授業づくり

（１）証明の準備

命題のネットワークを作ったことにより、単元構成が平面図形上のことのみを相手にしているために平面図形の元になる平行線の規定から始められていることがわかった。しかしながら、現在参考にしている啓林館の教科書は，内容を重視した構成となっていて，証明指導に関しては不十分ではないかと考えた．論証班は、証明指導を重視した授業展開をおこないたいと考えている。しかし、証明を行うためには、内容を十分に理解していることが必要となるのとも考えている。

中学２年生までの段階で生徒は,「説明」を通して平面図形をとらえてきたが, この単元からは「説明」が「証明」に変わらなくてはならないと考えた。そしてそこには何らかの理由があるはずだと考えた.



論証班は図形における証明の仕組みについて、左図のように考えた。
この図から、以下のことを考察した。
説明とは①経験的に知っていること・性質を知っていること
②実測に基づくデータ（具体数）
③図示することで正しいとする
証明とは①（万民が真であると認めた事象を前提とする）定義を使うこと
②言語で表現されている
③図は証明時にイメージとして使用するが、直接証明の中に反映されるものではない

証明も説明も，命題が正しい事を推論しているという点では一致しているが，証明は演繹的な推論方法であり，説明は帰納的な推論方法ではないかと考えた．そこで,「演繹的」とは何か，また「帰納的」とは何かを，辞書を用いて調べてみた．

演繹	正しいと認められる一般的な前提を用いて，より特殊な結論を得る推論方法. **前提が正しいと認められる限りにおいて，得られる結論は必ず真。**
帰納	個別的・特殊的な事例から一般的な規則を見出そうとする推論方法. **結論が真であることは保証されない.**

ここで，帰納すなわち説明では『結論が真であることが保証されない』事が問題であることが解る．つまり，説明を証明としていく理由は,『結論が必ず真であることを保証』するためであると，論証班は結論づけた．

更に，演繹的な推論を行う為には，その道具として『正しいと認められる一般的な前提』が必要であることも解った．それは数学においては定理と呼ばれるもの，その定理を（演繹的な推論で）正しいとするために定義・公理が必要なのではないかと考えた．

それを踏まえて教科書を見ると，先に述べたとおり「内容を重視した構成」であるので，証明を行うために必要な道具は十分に揃えられる．しかし，これまでの帰納的な考え方が演繹的な考え方になる必

要性については殆ど触れられていない点が問題であると言える．

例えば，教科書で証明が導入されるにあたり，

このように，あることがらが成り立つことを， すじ道を立てて明らかにすることを**証明**と言います．

としか書かれておらず，これは説明であっても言えることである。証明が必要な理由について明らかに不足しているので論証グループは，以下の用語を増やして使用することを決めた．

あることがらが成り立つことを，<u>正しいとされることのみを使って</u>すじ道を立てて明らかにすることを証明と言います．

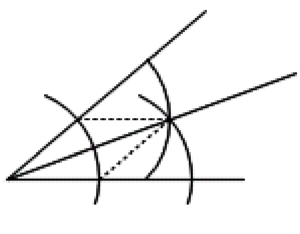
＜４－（２）の問題を考えた理由＞

定義や定理を求めることに意味や価値付けを行うことで生徒の学習に対する意欲を高めたいと考えたからである．学習に対する意欲・心情面でしか、単元の流れを考えていなかったことが問題であった。また，前回の問題では帰納的な推論しか行っていないということが，証明とは何かを考えていく上で明らかになった．つまり，４－（２）の問題では，証明指導につなげるには不適切かつ無駄な活動であると言える．

よって，論証班は教科書の内容構成をなぞりつつ，演繹的な推論を始めるための準備段階としての取り組みが可能な授業設計を行うことにした。

（２）問題場面・活動の方針案１

以上を踏まえて，論証班が目指したい活動を，具体的な問題場面で説明する．（この問題を実際の授業ですると決定したわけではない）



１年生で習得した角の二等分線を作図する（角の頂点からコンパスで角をなす辺に同じ距離をとり、その幅と変えることなくそれぞれの交点から等距離の点を取る)，左図のような方法について考える．

この時, なぜこの方法で角の二等分線を常に書くことが出来るか, と言えば, ひし形の対角線が角を必ず二等分する，という性質を利用しているからだと**説明**されていた（中１教科書）．この説明は，ひし形の対角線が角を必ず二等分するという性質が正しいとすれば，常に正しい．

しかし、前提となっていることが正しくないとすれば, 得られた結果が変わってくることに着目する．すると，本当にひし形の対角線が角を必ず二等分するか，調べなくてはならない．そして，その時も正しいという事柄のみを用いて推論を構成しなくてはならず，今の段階ではそのような説明をするための，「正しいという事柄」・・・例えば角の性質・・・が，そのような推論をなされていない事に気づき，今まで正しいとしてきた事柄を１つ１つ調べ直すような動機付けにしたい．またこのように，正しいという事柄のみを用いて推論を構成すれば, その結果得られる結論も正しくなる，という事に気づかせたい．

このような問題場面を設定することにより、生徒が今まで経験してきた説明というものの不十分さに気づけるようゆさぶりをかけ、「正しい事柄」を集めていく必要性を感じることで内容重視の現行の教科

書の構成をより証明指導のために価値のあるものとすることができるのではないかと考える。

さらに、生徒自身が命題の体系をつくっていけるような授業展開が単元の学習を通して求められると考える。何より、認められる前提はその後常に使用することができる、という思考の体系とすることが必要になってくると考える。

（３）問題場面・活動方針２

教科書の単元構成を採用することを決め，そこに証明に関する指導を加えて，論証グループの単元構成を行おうと考えた。その中でも特に，第１次の「平行と合同」の「多角形」を考えることで，証明を始める前の準備を行おうと考えた。

その準備に必要なものとして，「証明に必要な種々の性質を知ること」と，「演繹的な推論の機会」の２つがあると考えた。前者は，教科書の単元構成そのままで十分に達成されているが，後者が不十分である。論証グループが作成したネットワークを見ると，「角と平行線」の性質は，演繹的に導き出すことが中学生にとって困難であり，学習指導において証明の対象から外すことに学習上の問題はない。そうなると，「角と平行線」の学習においては演繹的な推論をする機会としては乏しい。そこで，「角と平行線」の性質を利用して演繹的に導くことのできる「多角形の角」を授業として扱いたいと考えた。その際に，演繹的推論をさせたいと考え，次のようなねらいを設定した。

Ⅱ.「多角形の角」でのねらい

・前時の性質とのつながりを考える。
・三角形の内角の和は常に 180 度であることを①数学的に確かめる。
・内角・外角の和の性質を理解する。
・多角形の内角の和の公式を導き出すことを通して，多様な見方・考え方を養うこと，一般を見ること，演繹的な推論をすること。
・②説明では不十分であることに気が付く。

①　数学的に確かめるとは？

中学２年生までの段階で，子どもは三角形の内角の和が 180 度であることを学習している。
そのことが正しいとする説明の仕方の例としては，分度器によって測ったり，紙を切って一点に集めることで 180 度であることを確かめたり，実際に三角形を折って一直線上に角を集めたりすることを通して説明するだろう。しかし，例に挙げた方法だとそれぞれの三角形が 180 度であることは確かめられても，まだ見ぬ三角形ではどのように内角の和が 180 度であることを説明するのかという問題が出てくる。今までのように，「調べる方法・確かめる方法」はいくらでもあるが，「毎度調べなくても，三角形の内角の和が常に 180 度であるといえる方法」を見つける必要性を示すべきだと考えた。

②　　説明では不十分とは？

・子どもたちにとっては，具体的操作によって得られた「三角形の内角の和が 180 度」という命題は真である。例えば，切って貼った場合でも，180 度になる見通しは立つ。しかし，それがまだ確かめていない三角形でも常に成り立つとは限らないことを，どのように自身の課題とし，動機づけるか。

・「常に成り立つのか？」という揺さぶりは，子どもの動機づけとなり得るか。

Ⅲ．現時点で考える授業の流れ

・子どもに三角形の内角の和が 180 度であることを説明させる。
・調べや確かめでは常に成り立つとは言えないと揺さぶりをかける。
・どんな角でも成り立つ性質の必要性に気づく。
・平行線と錯角，同位角の性質を用いて説明する。

7．授業計画

活 期待される生徒の数学的活動 支 教師の支援 意 支援の意図 評 評価

【問題提示場面】

(凸)五角形の内角の和をどうやって求めますか。

S_1：三角形と四角形に分けて，180＋360＝540

S_2：1つの頂点から補助線をひき，三角形3つに分けて，180×3＝540

S_3:五角形の図の内部に点を取りその点から頂点に補助線をひき,三角形5つに分ける。そして，内部の点における角の和360を引く。180×5−360＝540

T：三角形の内角の和は本当に180°だと言えるのか。

問題：どんな三角形でも内角の和が180°であることをどうやってたしかめますか。

【自力解決C】’

活 分度器を用いて内角を測りその和が180°であることを説明する。

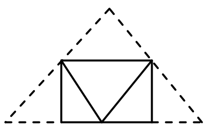
支 分度器を使わなくてもよい方法はないかな。

支 小学校ではどうやって説明したかな。

【自力解決C】図を操作して視覚的に説明する。

自力解決C-1

活 図を切り貼りしたり、折ったりして，3つの角を1点に集め直線となることを説明する。



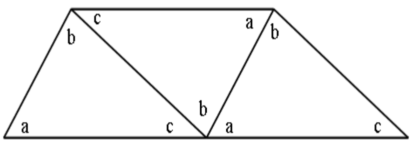
支 たしかに直線のように見えるけど，本当に直線と言えるの？

支 調べていない三角形でも同じことは言えるの？毎回調べなくてもよい方法はないかな？

意 図による説明では正確さが不十分であること，この三角形についてしか説明できていないことに気付かせたい。

自力解決C-2

活 同じ三角形を3つ用意し,それぞれの角が1点に集まるように並べ，直線となることを説明する。



支 角がどんな大きさであっても説明できる方法はないかな？

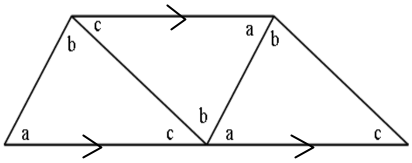
支 どんな大きさでもいいように角に文字を置いてごらん。

支 角の並び方に注目して図から気づくことはないかな？

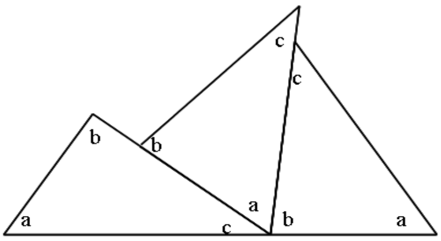
意 図の三角形以外については説明できていないことに気付かせたい。角と平行線の性質に着目させたい。

【自力解決 B】

活 図のように同じ三角形を３つしきつめ，錯角が等しいので平行であることから，１点を共有する２本の底辺は一直線上にあり，a＋b＋c＝180° であることを説明する。



支 （ 平行がないパターンの並べ方を見せて）この並べ方だったらどのように説明する？例外を許さない方法はないだろうか。

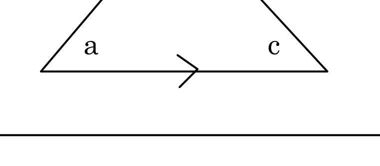


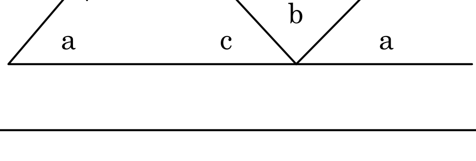
支 どのような条件があれば ３ つの角が直線となることを説明することができるだろう？平行線を基にして考えてみよう。

意 この説明では，角の並びから錯角が等しいことを見つけ，平行であることに気づき説明しているが，帰納的であり，三角形の並べ方によっては説明できなくなる。並べ方は人それぞれで違っており，この方法では必ずしも説明できないことに気付かせたい。

【自力解決 A】

活 図のように１点を通り対辺に平行な直線をひき，角と平行線の性質を用いて，３つの角が一直線上に並ぶので内角の和が 180° であると説明する。





支 これ以外の平行線のひき方では説明できる？
意 この方法のように「平行線をひく」という前提をおけば，例外なく説明できるというよさに気付かせたい。角と平行線の性質と，三角形の内角の和の性質がつながりを持っていることに気付かせたい。
評 前時で学習した，角と平行線の性質を用いて，演繹的な推論をしている。

【集団による討議】
活 三角形の内角の和が 180° となることのたしかめかたについて話し合う。
・図を操作して説明する。
・三角形をしきつめ，錯角が等しいことから平行であることを導き，3 つの角が一直線上に並ぶので 180° であると説明する。
・平行線を基にして，角と平行線の性質を用い演繹的に説明する。

○前時で学習した性質とつながっていることを確認する。
○B の説明では，例外があるので不十分であり，A では例外なく説明できるよさに気づく。
○どんな三角形でも成り立つというような，普遍妥当性を相手にすることの必要性を感じる。