算数・数学学習におけるわり算に関する研究
～概念領域に焦点を当てて～

鳥取大学地域学部地域教育学科　柏木美穂
指導教官　溝口達也

卒業論文における章構成

1．研究の目的と方法

1.1　研究の動機

現在，学習内容の系統性や学習の連続性が重要視され，このことを踏まえた学習指導が求められている．しかし，現状では学習指導要領や教科書の教師用解説書に系統図として示されているものを見ても，単に単元名を並べているだけのものがほとんどであり，各学年，学校種間において，どのような考えがどのようにつながっているのかが見えにくく，ここには学年を通した概念のつながりを本質的に見ようとする視点が欠けていると考える．

筆者は，今までに学習した知識を使って何とか問題を解決しようとする子どもを育てたいと考えている．このような子どもを育てるためには，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導が必要である．そこで，四則計算においても，その考えのつながりや変化を学年を通して見ることが必要ではないかと考え，本研究ではその中でとくに，以前からも表現に関する一貫性という問題点が指摘されてきたわり算について取り上げることにした．

1.2　研究の目的と方法

本研究の目的は，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を設計するために，わり算を

本質的な視点から分析し，各学年でのわり算の学び方を表すための枠組みを用いて，わり算について教材を論理立てることである．

本研究の目的を達成するために，以下のような5つの研究課題を挙げ，研究を進めた．

【研究課題1】
各学年でのわり算の学び方はどのような枠組みで表すことができるか

【研究課題 2】
数学的に見てわり算とはそもそもどのようなものか

【研究課題3】
算数・数学教育においてわり算の学習内容の系統はどのようになっているか

【研究課題4】
よりよいわり算の学習指導をどのように設計するか

【研究課題 5】
どのようにわり算について教材を論理立てるか

これら5つの研究課題が解決されることで，本研究の目的は達成される．

2．G.Vergnaud（1988）の視点の考察

本研究では，子どもたちがそれまでにどのような考えをどのように学んで来ており，今後の学習にそれらをどのように生かし，1 つの概念について理解していくのかを表す枠組みが必要である．そこで，各学年でのわり算の学び方を表す枠組みを構築するための方法について明らかにするために，概念領域に焦点を当てて乗法構造の系統的研究を行った G.Vergnaud（1988）の視点を考察し，以下のような枠組みを得た．

<u>Theorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すこと</u>

多様な解決を数学的な語を用いて一般的に表すことで，場面に依存せず考え方の違いを表すことができ，各学年でのわり算の学び方を表す枠組みになりうる．

3．数学におけるわり算の位置づけの検討

わり算の問題では，1 にあたるものを求める問題がほとんどである．文献の考察から，この 1 にあたるものを求めるということには，除法は，数学的には乗法の逆演算として定義されるが，単位元が 1 である乗法についての逆元を考えると，乗法の逆演算が登場するという数学におけるわり算の位置づけがあるということが明らかとなった．

このことは，実際のわり算の問題場面の計算過程において，1 を作っていることが確認できることから，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていることが明らかとなった．また，1 にあたるものを求める場合でない場合においても，その計算過程において，単位元が 1 であるかけ算についての逆元を求めるという考えが用いられていることを確認することができることから，1 にあたるものを求めるということが前提となっていると解釈することができることが明らかとなった．

4．算数・数学教育におけるわり算の系統

先行研究から，数学では除法は乗法の逆演算であると定義されており，わり算の学習内容の系統を把握するにあたっては，かけ算の学習内容の系統についても，把握する必要があるということが明らかとなった．さらに，各学年におけるかけ算，わり算の学習内容の系統について検討し，それらを「わり算の学習内容の系統表」として示した（柏木－5－参照）．ここから，学年を通して用いられており，今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を考えるにあたって重視するべき3つの関係が明らかとなった．それは，以下に示す関係である．

$\boxed{\text{Ⅰ}}$　除法は乗法の逆演算であるという関係
$\boxed{\text{Ⅱ}}$　除数及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらない」という関係
$\boxed{\text{Ⅲ}}$　「基準量×割合」とその逆演算の関係

5．わり算についての教材論理の検討

5.1　これまでの学習指導と本研究のねらい

本研究ではわり算について取り上げている．数学では，除法は乗法の逆演算と定義されており，教科書では各学年においてかけ算を学習した後にわり算を学習するようになっている．計算の意味を説明する際の道具に着目すると，5 年生の小数のかけ算・わり算では線分図，6 年生の分数のかけ算・わり算では面積図を用いるというように，それぞれの表現の特徴を生かした指導が行われている．しかし，ここには表現に関する一貫性という問題点があると以前からも指摘されてきた．（矢部他，1999）一方，平成 23 年度版の教科書からは 6 社すべてにおいて数直線上の対応図を取り扱っている．

筆者は，今までに学習した知識を使って何とか問題を解決しようとする子どもを育てたいと考えている．このような子どもを育てるためには，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導が必要である．そこで，2 で述べたベルニョの Theorems-in-action（行為における定理）に焦点を当て，4 で挙げた「わり算の学習内容の系統表」に基づき，わり算における Theorems-in-action（行為における定理）について考察した．そして，どのように数直線上の対応図を使えばよりよいわり算の学習指導を設計することができるかについて検討した．

5.2　数直線上の対応図の有効性

$\boxed{\text{1 点目}}$：表現に関する一貫性という点

各学年のわり算の学習で用いられる考え方は，等分除の場合，包含除の場合，除数が有理数であるわり算の場合の 3 つであるが，それらの異なる考え方は 2 本の数直線上の対応図という道具を用いてすべて表すことができる．

$\boxed{\text{2 点目}}$：数学的な本質という点

3 で述べたように，逆元を考えようとすると，逆演算が登場する．実際に子どもたちが単位元，逆元ということを知っているわけではないが，数直線上の対応図を用いて，わり算の計算の過程を図上で見ることで，単位元が 1 である乗法の逆元を考えるとわり算が登場することを確認することができる．

5.3　わり算における Theorems-in-action（行為における定理）

4 で挙げたわり算の学習内容の系統表から，わり算における Theorems-in-action（行為における定理）は，以下の 3 点であると考える．

$\boxed{\text{1 点目}}$：除法は乗法の逆演算であるという関係
$\boxed{\text{2 点目}}$：除数及び被除数に同じ数をかけても同じ数で割っても商は変わらないという関係
$\boxed{\text{3 点目}}$：「基準量×割合」とその逆演算の関係

小学校 5 年生の小数のかけ算，わり算の学習で登場する「基準量×割合」とその逆演算の関係は，それまでに学習してきた整数の範囲における「基準量×いくつ分」という同数累加とその逆演算の考え方を統合するものである．したがって，3 点目については，「基準量×いくつ分」と「基準量×割合」の関係を区別するために，2 つに分けて示すことにする．

以上の 3 点を Theorems-in-action（行為における定理）TaⅠ～TaⅢとする．

【TaⅠ】：$c\times b=a \longleftrightarrow a\div b=c$
【TaⅡ】：$a\div b=c \longleftrightarrow (a\times m)\div(b\times m)=c \longleftrightarrow (a\div m)\div(b\div m)=c$

【TaⅢ－α】: $a \times b = \sum_{k=1}^{b} a$

$(\sum_{k=1}^{b} a = \overbrace{a + a + a + \cdot \cdot \cdot + a}^{b\text{個}})$

【TaⅢ－β】: Ap＝B (A, B, p∈ ℚ, A≠0, B≠0, p≠0)

5.4 わり算における Theorems-in-action（行為における定理）の違い

これら 3 つの Theorems-in-action（行為における定理）は，ある学年の学習のみで習得されるものではなく，学年を通してそれぞれの学年での学び方をすることで習得されていく．3 つには，それ自体に変化があるものとそうでないものという違いがある．

①【TaⅠ】

各学年において条件の変更は行われるが，【TaⅠ】自体に変化はない．

②【TaⅡ】

各学年において条件の変更は行われるが，【TaⅡ】自体に変化はない．

③【TaⅢ】

各学年における条件の変更に加えて，【TaⅢ】自体が拡張され，2 段階の変化がある．

5.5 本研究の視点から見た教材論理の系統

数直線上の対応図を使ったよりよいわり算の指導を考えるために，小学校 3 年生，小学校 4 年生，小学校 5 年生（小数のかけ算とわり算），小学校 6 年生，中学校 1 年生においてどのような事柄がより強調される必要があるかについて検討した．

そして，設計したわり算の学習指導を基に，第 4 章で示したわり算の学習内容の系統表を「Theorems-in-action（行為における定理）を視点とした教材論理の系統」として本研究の視点から捉え直した（柏木－6－参照）．

6. 研究から得られた結論

本研究では，Theorems-in-action（行為における定理）を数学的な語で表すという枠組みを用いて一般的に表すという視点を大切にし，本質的な視点から分析を行うことで，教材を論理立てること，そして，学年，学校種間を通して，子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を根拠を持って設計することが可能になるということが明らかとなった．

本研究では，わり算を取り上げたが，他の教材においても同じような方法で教材を論理立て，学年，学校種間を通して子どもたちが今までに学習した知識を生かし，積み重ねていくことができるような学習指導を設計することができるのではないかということを提言したい．

7. 残された課題

1 点目は，3 において単位元と逆元という視点から，数学の中でのわり算の位置づけについて明らかにしたが，数学で逆元を認めるということがなぜ大切にされているのかについては考察することができていない点である．

2 点目は，実践面についてである．本研究で検討した学習指導を実践した際，学年を通して教師が実際にどのように指導を行っていくのか，また，子どもはどのような反応を示すのかについては検討することができていない．

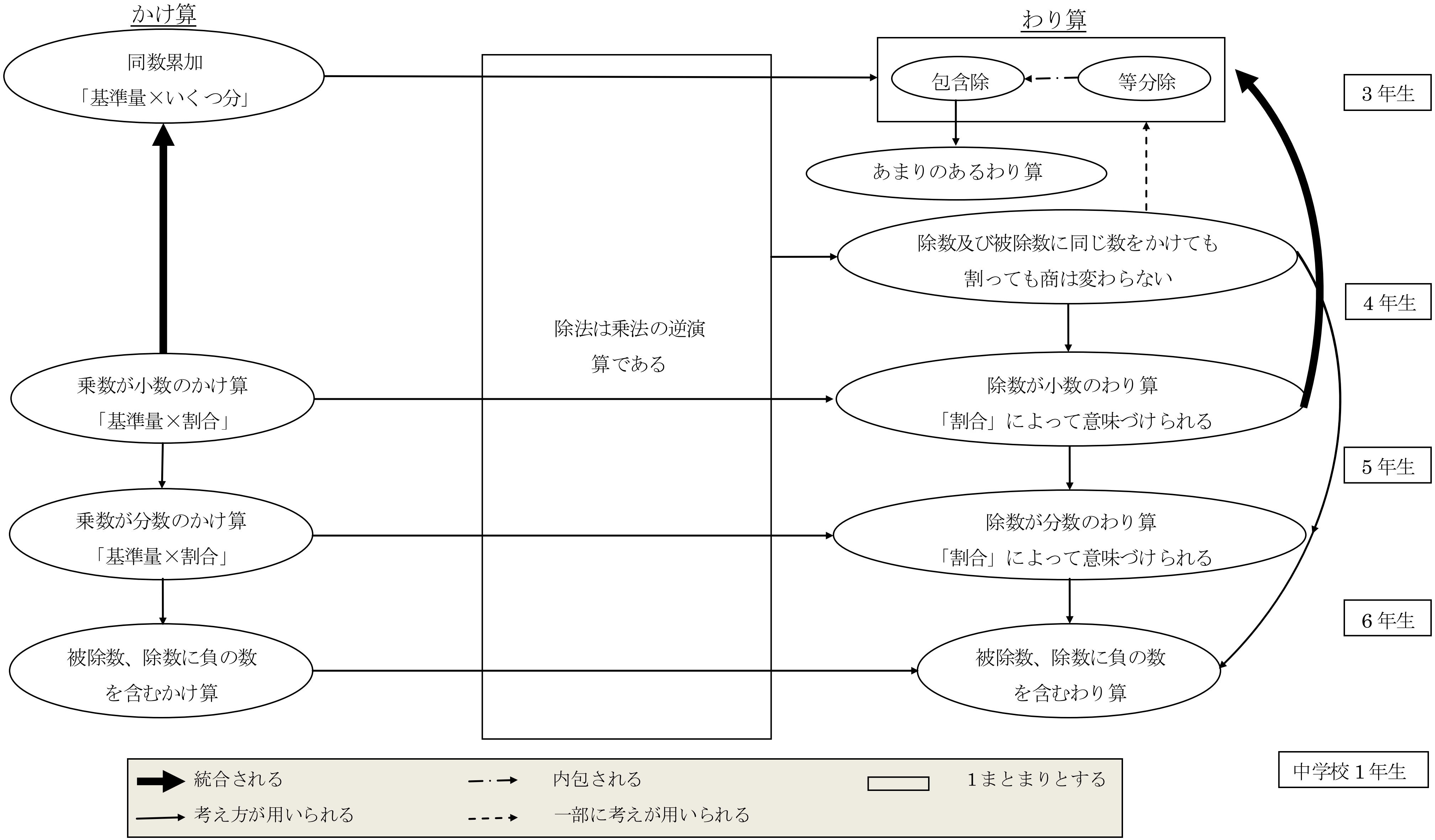
〈主要引用・参考文献〉

・伊藤説朗(2008).　算数科の未来型学力＝思考力・表現力を育てる授業，明治図書

・中島健三(1981)．算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察，金子書房

・Vergnaud G.(1988). Multiplicative Structure. Hiebert,J & Benhr,M (Eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. NCTM.

わり算の学習内容の系統表



		学年及び学習項目				
		小学校３年生	小学校４年生	小学校５年生	小学校６年生	中学校１年生
		包含除、等分除		小数のわり算	分数のわり算	正の数・負の数のわり算
Theorems-in-action(行為における定理)	【TaⅠ】 $a \div b = c$ $\updownarrow$ $c \times b = a$	同数累加の逆演算		「基準量×割合」の逆演算		
	【TaⅡ】 $a \div b = c$ $\updownarrow$ $(a \times m) \div (b \times m) = c$ $\updownarrow$ $(a \div m) \div (b \div m) = c$		何十でわるわり算に限る	小数にも適用できる	分数にも適用できる	負の数にも適用できる
	【TaⅢ－α】 $a \times b = \sum_{k=1}^{b} a$	統合される		拡張		
	【TaⅢ－β】 $Ap = B$ $(A, B, p \in \mathbb{Q}, A \neq 0, B \neq 0, p \neq 0)$			小数にも適用できる	分数にも適用できる	負の数にも適用できる

※ツールとして数直線上の対応図を位置づける

Theorems-in-action（行為における定理）を視点とした教材論理の系統