「中学生の無限の認識に関する研究―直線の連続性に着目して―」

鳥取大学　日野 治樹
指導教官　溝口 達也

本論文の章構成

1. 本研究の目的と方法

本研究の目的は,「直線の連続性」に着目して，中学生の無限に対する認識を把握し，無限の概念を学習指導しなければならない理由を明らかにすることである.

そして，以下の 5 つの研究課題を解決することで，本研究の目的を達成する.

【研究課題Ⅰ】

数学において,「連続（性)」とは何であるか

【研究課題Ⅱ】

「直線のグラフ」に関して，生徒は，どのような認識を有しているか

【研究課題Ⅱ-a】

表にないグラフ上の点は何を意味し生徒はどう認識しているか

【研究課題Ⅱ-b】

直線のグラフを任意の 2 点で描くことと直線のグラフを点集合と見て描くことにはどのような生徒の認識の違いがあるか

【研究課題Ⅲ】

「直線の連続性」を学習指導しなければならないのはなぜか

2. 数学における連続（性）の定義

2.1 無限論と連続論の歴史

無限の概念は古代ギリシャを中心に多くの思想家や数学者が困難を感じてきた. そして，現代の数学者にとっても大きな課題である．溝口(2010)は,“過去の数学者のつまづきは，今日の子どもたちの算数・数学学習においても困難であり，子どもたちが実際にそのような困難を抱えるところの同じ数学的概念は，何百年も前の数学者をしてその最終的な形式を作り出せた，という励ましとなるものです”[1]と述べている．したがって，無限の概念を過去の数学者たちが，どのような困難を感じ，どのように乗り越えてきたかを知ることで，算数・数学学習における困難を乗り越える手掛りを掴むことができるとする．そこで,「THE INFINITE」(A.W.Moore, 1993.)及び「無限論の形成と構造」(下村寅太郎, 1979.)を参考文献として，無限論と連続論の歴史を本節でまとめた.

2.2 実数の連続性の基本定理

以下に，実数の連続性の基本定理を示す.

【ア】デデキントの定理(連続性公理)
実数の切断は，下組と上組との境界として一つの数を確定する．
【イ】ワイヤァシュトラスの定理
数の集合 S が上方[または下方]に有界ならば S の上限[または下限]が存在する．
【ウ】有界な単調数列の収束
有界なる単調数列は収束する．
【エ】区間縮小法
閉区間$\mathrm{I_n} = [\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n}] (\mathrm{n} = 1,2,\cdots)$ において，各区間$\mathrm{I_n}$ がその前の区間$\mathrm{I_{n-1}}$ に含まれ，n が限りなく増すとき，区間$\mathrm{I_n}$ の幅$\mathrm{b_n} - \mathrm{a_n}$が限りなく小さくなるとすれば，これらの各区間に共通なるただ一つの点が存在する．

2.3 連続の定義

ある事物の集合に順序を課するとき，それが「連続」であると言われうるのは，その順序において，単にいかなる二つの要素の間にも第三の要素が見い出されると言うだけでなく，そこには何らの「断絶」も存在しないこと．

2.4 「直線の連続性」

直線は実数から実数への写像であるため，実数の連続性から直線上に実数全体の集合が敷き詰められると考えられる．すなわち，実数の連続性は直線の連続性として表すことができる．言い換えれば，直線は実数全体の集合のモデルである．

3. E.Fischbein の研究の検討

3.1 先行研究との関係性

実数の連続性をモデル化した数直線を考える．数直線上にはあらゆる実数が隙間なく存在する．数学的に言えば，実数の連続性公理から，数直線を切断すれば一つの実数が確定する．すなわち，何度切断を繰り返しても断面にただ一つの実数が存在するということである．切断という操作は無限に繰り返すことが可能である．E.Fischbein（1979）は，この切断を無限に繰り返すことが可能か否かを子どもたちがいかに認識しているかを研究した．E.Fischbein は無限の概念が介入した問題解決にあたって，子どもたちが直観的に無限をいかに捉えるのかを無限分割可能性，超限基数，極限の問題をそれぞれ提案し，イスラエルの小学校 5 年生から中学校 3 年生を被験者として調査した．筆者は彼の研究を直線の連続性の観点から見て，子どもたちの無限に対する認識を明らかにしたい．

3.2.1 無限分割可能性の調査問題及び結果の検討

筆者が子どもたちに，直線の連続性すなわち実数の連続性を考えさせるのに，直接連続性公理を教えることは不可能と言える．その中で，無限分割可能性の問題を子どもたちに考えさせることは，最も実数の連続性を考えさせることに近いと思われ，E.Fischbein が調査したように，子どもたちは直観で答えることができる．E.Fischbein の無限分割可能性の調査問題そして調査結果を用いることで，あたかも直線の連続性の概念が介入した調査結果が得られたと仮定して以下検討していく．

E.Fischbein が提示した無限分割可能性の概念が介入した調査問題は次のようにある．

“線分 AB を二等分する．点 H はその線分の中点である．今，線分 AB と HB を二等分する．点 P と Q は，それぞれ線分 AH と HB の中点を表す. 同様に分割していく．分割するにつれて，断片はますます小さくなる．

断片がとても小さくなるのでさらに分割することが不可能な状態に辿り着くだろうか．あなたの答えを説明しなさい．” [2]

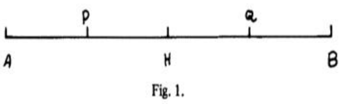

Fig. 1.

この問いに対する E.Fischbein の調査結果は次のようにまとめられた．
【1】実際はその過程に終わりは来るが，理論上は無限である(12.2%).
【2】その過程は無限である(29.0%).
【1+2】無限(41.2%)
【3】その過程に終わりは来る(55.4%).
【4】無回答(3.4%).
回答は 4 つのカテゴリーに分けられている．E.Fischbein は，「無限」という回答

のイメージをより完璧にするためにカテゴリー1 と 2 を組み合わせた．また，カテゴリー1+2 とカテゴリー3 すなわち「無限」と「有限」それぞれの回答の主な理由は次のようにある．

“その過程は無限である．なぜなら：
[1]あらゆる線分には，無限に点が存在する．(5.5%)
[2]私たちは，常に線分の分割を続けることができる．(13.2%)
[3]完璧な方法で常に続けることができる．(5.1%)
[4]線は面積をもたない．(4.0%)

その過程は有限である．なぜなら：
[1]線分は有限である．(47.2%)
[2]私たちの手段は有限である．(4.7%)
[3]全てのものに終わりはある．(0.6%)” 3）

無限分割可能ということは，数学的に言えばデデキントの定理から実数の連続性が成り立つということだが，それは数直線上に有理数以外に無理数が存在するということでもある．しかし，児童生徒は，少なくとも日本の中学校数学科では，中学校 3 年生で初めて無理数を学習するため，この調査でもほとんどの児童生徒が無理数を知らないと仮定する．この仮定で連続性を考えるとき，児童生徒の認識の上では，有理数の稠密性を知っていれば無限分割可能である，すなわち直線は連続であると考えられる．すると，カテゴリー1+2 から 4 割の児童生徒が有理数の稠密性を認識している，有理数が無限に存在することを認識しているという実態を仮定できる．また，過程が無限であるとしたうちの数人は，線分には無限に点が存在することを認識しているため，有理数の稠密性もしくは無理数の存在を認識しているという実態を把握することができる．

また，無限分割不可能であると答える児童生徒は半数以上だが，彼らは有理数の稠密性を認識していないことが上述から言える．彼らの中には，有理数が無限に存在することを認識していないだけでなく，整数の範囲でしか直線を見ることができていない児童生徒もいるかもしれないという実態を把握することができる．さらに，有限と認識している児童生徒の半数が「線分は有限だから」分割は終わりが来るとしている．この調査結果から，線分が有限ということが，分割は有限と認識している大きな原因ではないかと考えられる．

3.3 検討した結果

無理数の存在をほとんどの児童生徒が知らないと仮定すると，児童生徒の認識の上では，有理数の稠密性を知っていれば「直線の連続性」を認識できていると仮定した．このとき，無限分割可能性の概念が介入した調査結果から，無限分割を受け入れる児童生徒が 4 割いるが，彼らが全員，有理数の稠密性を認識しているとは言えない．それは，分割過程が無限であるとした理由のうち，数人しか「線分には無限に点が存在すること」を認識していなかったため，無理数の存在を認識している児童生徒はほとんどいないと言える．また，無限分割を受け入れない児童生徒は，有理数の稠密性を認識しておらず，場合によっては整数の範囲でしか直線を見ることができていないという実態も仮定される．

また，無限を受け入れない児童生徒の半数以上が，線分が有限であるという事実により無限分割を受け入れることができていない．彼らは，線分を物理的にしか視ることができていないと仮定される．すなわち，実数のモデルである数直線をただの一本の線としてしか視ることができていない．言い換えれば，数学的に線分を視ることができていないことになる．

超限基数の概念が介入した調査結果から，自然数が偶数を含んでいるため自然数の集合の方が大きいと答える児童生徒が多く見られた．この結果は，自然数の集合も偶数の集合も有限集合としか認識していない上に，自然数と偶数が一対一対応の関係にあることを認識できていないことにあると言える．第 4 章で，取り上げる問題では，直線の連続性を認識する上で，一対一対応は重要な関係である．

極限の概念が介入した調査結果からは，ほとんどの児童生徒が極限の考え方ができているのに対して，「点」という概念は 2

割以下の児童生徒しか認識できていないことが明らかになった．

4. 直線のグラフに対する生徒の認識

4.1 離散的表現と連続的表現の統合

第 4 章では，子どもたちの無限に対する認識の実態を把握した上で，具体的に比例の問題を提示し，「直線の連続性」を学習指導しなければならない理由，無限を受け入れなければならない理由を検討していく．

以下に離散量と連続量の問題から得られた表を記す．また，問題自体は省略するものとする．

《離散量の問題》

ある釘の本数と重さには下の表 1 のような関係がある．

《連続量の問題》

ある釘の長さと重さには下の表 1 のような関係がある．

表 1 釘の本数または長さと重さの関係

x[本,cm]	0	1	2	3	4
y[g]	0	2	4	6	8

表 1 のデータをそれぞれ座標平面上にプロットしていくと，図 1 のようなグラフを描くことができ，釘の本数，長さともにグラフが一致することが分かる．図 1 には，釘の本数または長さの数が 0，1，2，3，4，5 のときの x と y の対応点がそれぞれプロットされている．ここで，表とグラフはそれぞれ表現形式が違うが，どちらの表現形式でも同じ関数関係を表しているのは事実である．表は取り得る値が離散的であるのに対して，グラフは連続的である．以下，関数関係を表す表現形式である表とグラフで関数関係を表現することをそれぞれ「離散的表現」と「連続的表現」と名付けることにする．

表が離散的であるのに対してグラフは連続的であるが，これらは同じ関数関係を表している．子どもたちは，関数をグラフ化するとき，表を描いてから座標平面上に対応点をプロットしてグラフを描く．しかし，離散的表現と連続的表現は表現形式が違うが，問題なく表現形式の移行が行えるのか．連続的表現は，その名の通り連続的であるため，2.3 の連続の定義から何らの「断絶」も存在しないと言える．すなわち，グラフは無限の点で構成されていると見ることができる．すると，前述のように離散的表現から連続的表現への移行が行われるためには，取り得る値が一対一対応しなければならない．すなわち，グラフ上にある全ての点が表に表されるはずである．しかし，表は離散的にしか表せないため，全ての点を表に描き表すのは現実的に不可能である．そのため，ライプニッツが定義したように，無限は内的精神の上でのみ認識される．

すなわち，子どもたちは表をあたかも連続的であるとみなして表に表さなければならない．しかし，第 3 章の児童生徒の実態からも言えるように，多くの子どもたちは，数を離散的にしか扱えていないのである．

中には，変数が連続量である問題でさえも表 1 のように，離散量だけで，整数の範囲だけでグラフを描こうとしてしまう児童生徒もいると考えられる．

また，表 1 における釘の長さと重さの関係を考えれば，長さも重さも連続量であるのに対して，表 1 における釘の本数と重さは本数が離散量で，重さが連続量である．重さが連続量ということは，重さの取り得る値は無限に存在するということであり，それに対応する本数が与えられなければ関数関係が成り立たない．

しかし，離散量は 0，1，2，3，…と数え上げる数だけで，それだけでは連続量の取り得る全ての値と対応する値が得られないのはグラフから明らかである．これから言えるのは，子どもたちは表にないグラフ上の点が何を意味していて，離散量と連続量のグラフが一致する理由を考えずに無意識に離散的表現から連続的表現への移行を行ってしまっているという実態があるということである．

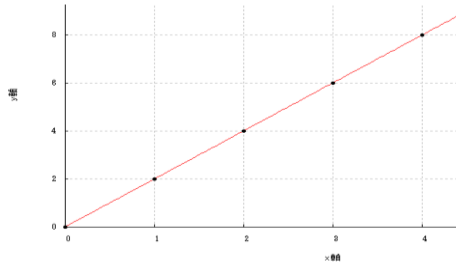

図 1 釘の本数または長さと重さの関係

5. 本研究の結論

5.1 本研究の結論

本研究では，5 点の研究課題が要請された．この 5 点の研究課題が解決されることによって，本研究の目的が達成される．

【研究課題Ⅰ】

研究課題Ⅰに対して，数学における「連続（性）」とは，ある事物の集合に順序を課するとき，その順序において，単にいかなる二つの要素の間にも第三の要素が見い出されると言うだけでなく，そこに何らの「断絶」も存在しないことであるということ明らかになった．また，「直線の連続性」は実数の連続性公理によって構成されることが明らかになった．

【研究課題Ⅱ-a】

研究課題Ⅱ-a に対して，離散的表現と連続的表現の統合を図るには，離散的表現を連続的に観ることが求められる．そのためには，無理数の存在の認識及び表にある点とない点は何を意味するのかを認識している必要がある．無理数の存在に対しては，無限分割可能性の調査結果から有理数の稠密性を認識いている児童生徒は少なく，有限の有理数もしくは整数の範囲でしかグラフ上の点を認識できていないことが明らかになった．また，表の点に対しては，表にある点をグラフ上の代表点として認識する，すなわち他の各々の点が存在することを受け入れた上で，代表点だけをグラフから取り出していると認識する必要があると言える．

【研究課題Ⅱ-b】

研究課題Ⅱ-b に対して，研究課題Ⅱ-a から言えるように，ほとんどの児童生徒が離散的にしか表を観ることができていない．そのため，各々の点を結ぶとき，彼らの中では，直線はユークリッド幾何学による「任意の 2 点で定まるもの」という認識であると考えられる．すなわち幾何学的にしか直線を観ることができていない．そこで，連続的に表を観るためには，実数全体と直線上の点の全体とは一体一の対応が付けられることを認識するために，直観的に数の間の関係を理解できる数直線を用いて，数を直線上に点で表す，点を座標とて認識することを学ばなければならないと言える．

【研究課題Ⅱ】

研究課題Ⅱに対して，研究課題Ⅱ-a 及びⅡ-b から言えるように，「直線のグラフ」は彼らにとってはただの「直線」であり座標平面上に点集合として構成されるグラフとして認識されていない．

【研究課題Ⅲ】

研究課題Ⅲに対して，グラフ上の点と表の数値が一対一の対応の関係にあることを認識していない上に，点を座標として認識できていないため，現在の関数分野の指導では，「直線のグラフ」を関数として扱うことができていないと言える．

また，直観的に数の間の関係を認識することができる数直線と実数全体の対応を学習指導することで「直線の連続性」を学習指導すべきである．

5.2 残された課題

＊直線の連続性に対する認識の実態を調査するための調査問題を提案し，調査研究を実施したい．

＊筆者は直線の概念認識を構造主義者として研究しようとしたが，構造主義で考えることは，児童生徒にとっていかなる価値があるのか，達成水準を設定しなければ数学者の認識を児童生徒に求めることになってしまうため，構造主義と機能主義について文献調査を行う．

＊現在の算数・数学教育に具体的にどのようなアプローチをかけるかを考える．

主要引用・参考文献

*G.Cantor(1897).「Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre」功力金二郎・村田全訳.

*能代清(1970).「極限論と集合論」.

*E.Fischbein(1979),et al.「THE INTUITION OF INFINITY」.

*下村寅太郎(1979).「無限論の形成と構造」.

*高木貞治(1983).「解析概論」.

*A.W.Moore(1993).「THE INFINITE」石村多門訳.

*溝口達也(2010).「算数・数学教育における数学史の活用」.