

数学教育における一般化を志向する教授学習に関する研究

A Study on Didactical Situation for Generalization in Mathematics Education

鳥取大学大学院 早田 透

指導教官 溝口 達也

本論文の章構成

第1章:研究の目的・対象・方法

- 1.1 研究の目的
- 1.2 研究の対象
- 1.3 研究の方法
- 1.4 本論文の構成

第2章:数学的認識の本性から見た問題の所在

- 2.1 問題の所在
- 2.2 論証の対象に関する考察
 - 2.2.1 “一般の三角形”と論証
 - 2.2.2 教科書の立場と問題点
- 2.3 論証の観察と一般の命題
 - 2.3.1 特殊に依存しない論証
 - 2.3.2 “一般の三角形”と差異性の捨象
 - 2.3.3 “円周角の定理”事例の問題点
- 2.4.問題点の分析と研究課題の導出
 - 2.4.1 P1についての分析
 - 2.4.2 P2・P3についての分析

第2章の要約及び注

第3章:円の分割事例と“一般化モデル”

- 3.1 一般化の認識過程
 - 3.2.1 直線による円の分割事例
- 3.3 岩崎(2007)による批判的考察
 - 3.3.1 一般化分岐モデルと円の分割事例
- 3.4 円の分割事例の教授学習場面
- 3.5 “一般化モデル”と教授学的三角形

第3章の要約及び注

第4章:『子ども』の数学的思考を捉える基本的枠組み

- 4.1 直観主義とBethの数学的思考の相;小課題1の検討
 - 4.1.1 直観主義

- 4.1.2 Bethの数学的思考の相
- 4.2 Polyaの一般化とBethの数学的思考の相
 - 4.2.1 Polyaの精神と一般化
 - 4.2.2 帰納と類比:ゴールドバッハの予想
 - 4.2.3 《配列》の相
- 4.3 分類
- 4.4 『子ども』の推測・発見と研究課題

第4章の要約及び注

第5章:『教師』の支援とコミュニケーション

- 5.1 学習の動機となるコンフリクト;小課題2の検討
 - 5.1.1 認知的コンフリクト
 - 5.1.2 認知的コンフリクトの例
 - 5.1.3 社会認知的コンフリクト64
- 5.2 コミュニケーションの社会的な機能
- 5.3 『教師』の役割と研究課題

第5章の要約及び注

第6章:一般化を促進する『教材』

- 6.1 特別な特殊を通した学習;小課題3の検討
 - 6.1.1 極端に特別な特殊
 - 6.1.2 有力な特別な特殊
- 6.2 生成的な例
 - 6.2.1 説明から証明への展開;生成的な例を基準にして
 - 6.2.3 特殊から一般への展開;生成的な例を基準にして

第6章の要約及び注

第7章:一般化を志向する教授学習モデルの構築

- 7.1 モデルの本性
 - 7.1.1 公理系を満足させるモデル

- 7.1.2 同型性に基づくモデル
- 7.1.3 モデルの役割
- 7.2 モデルの対応
- 7.3 “一般化モデル”における流れとその目的
- 7.3.1 事例:Star Patterns
- 7.4一般化を志向する教授学習場面のモデル
- 7.4.1 本研究の目的とモデル
- 7.4.2 活動の系列と支援
- 7.4.3 モデルの本性からの検証

1. 本研究の目的と方法

本研究の目的は、我が国の算数・数学教育において、一般化を志向する教授学習場面がどのように展開されるべきであるかを明らかにすることである。

数学を学習する際、学習者自らが既知の数学的概念（技能・知識・考え方など）を基に新たな数学的概念を発明し、獲得するのであるが、こうしたプロセスのほとんど全てに深く関わるのが一般化であり、それは“はじめにあった概念または形式について、その適用範囲が広くなるようにすることである。”（中島，1981）こうした一般化の重要性は、数学という学問そのものにおいてもおよそ全ての人によって認められているところである。

従って、一般化が授業においてどのような過程を経て実現されていくかということを明らかにすることが要請されるが、そうした点はこれまであまり指摘されてこなかった。

7.5 モデルの実際

7.5.1 モデルの有用性

7.5.2 モデルの規範性

7.6 モデルによる授業設計

7.6.1 高等学校:中線定理

7.6.2 小学校1年生:くりあがりのあるたしざん

第7章の要約及び注

第8章:研究の結論

8.1 本研究の結論と意義

8.2 今後に残された課題

そこで本研究は上述の目的を設定し、一般化を志向する教授学習のモデルを構築するという方法で達成をはかりたい。

2. 問題の所在

一般化はその名の通り“特殊から一般へ”と方向性を持った認識であることは確かである。

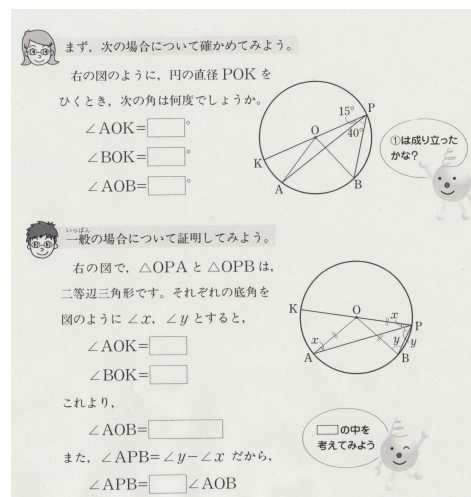


図1：K社教科書の学習場面

しかし一方で、我が国の算数・数学の教科書においてはその意図にも関わらず“特殊から一般へ”という推理がなされていないことが大きな問題であり、典型

例である図1のように、特殊「と」一般について推理しているに過ぎない。

こうした状況を改善し、一般化を志向する教授学習がどのように展開されるべきであるかについて考察するべく、本研究は数学的認識・推論の本性に迫るBeth

(Beth and Piaget,1966)を基に我が国の教科書を分析し、問題点を抽出した。

抽出された問題点を基に、解決しなくてはならない3つの研究課題が導出された。即ち、

・研究課題1

一般化を志向する教授学習において、どのように概念を構成していくか

・研究課題2

一般化を志向する教授学習において、どのように捨象する差異性とその程度を決定していくか

・研究課題3

一般化を志向する教授学習において、互いに異なる特殊から一般の命題が導かれるということを、どのように学習機会として取り入れるか。

である。

これらの研究課題に取り組む事で、一般化を志向する教授学習場面を改善することが出来ると期待される。

3. 一般化モデルと教授学的三角形

3.1 円の分割事例

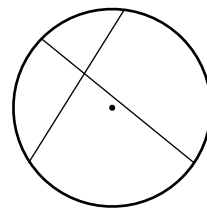
一般化は数学的認識の本性に直結する重要な過程であり、認識論的に基礎づける事は容易ではない。教授学習において

は、学習者が一般化を志向するその過程が重要であるため、これを明らかにすることで何らかの示唆が得られると期待される。ひいては、一般化を志向する教授学習の改善に繋がっていくことも期待されるだろう。

そこで本研究は、一般化の認識過程を扱った研究の中でも、認識論的・心理学的な観点から一般化の認識過程を分析し、抽象と一般化を接続してその過程をモデルという形で初めて提示したDörfler (1991)の一般化モデルと、その批判的考察を行った岩崎(2007)の一般化分岐モデルに注目した。

そこで、一般化を志向する教授学習として典型的な場面である“円の分割事例”を通してモデルの分析を行った。

円Oの中に直線を引いていくつかの部分に分けていく。例えば、図に示した状態は2本の直線で4箇所分割されている。



この円を5本の直線で分割しようとするとき、最大で何箇所分割することが出来るか。

図2：円の分割事例

また、円の分割事例を教授する場面、即ち一般化を志向した授業においては4つの数学的活動(S1～S4)が期待される。

- S1：試行錯誤を行い、実際に書いた図から5本の直線で分割できる最大の数が16であるという事を推測する；
- S2：交点を増やせば増やすほど領域の数が増える事に気付くと共に、5本の直線で分割できる最大の数が16であるという事を推測する；
- S3：分割出来る領域の数が最大になる直線の引き方が、直線の数に関わらず常に成り立つことに気付くことが出来る；
- S4：S2・S3を基に構造を明らかにした図（図3）を描き、最大の数が16であるという事の根拠を明確にし、一般性を示す。

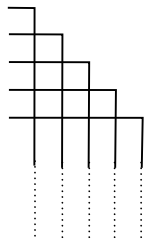


図3：円の分割事例における決定的な図

授業の後半の練り上げにおいては「16箇所」という答えの妥当性が問題になり、そこでは単に解決をお互いに披露し合うのではなく、教師が主導する議論が行われる。議論を通して、学習者が主体的に自力解決S1～S4の活動を順に関連付けていくことで学習が展開されていくと期待される。

こうした学習は、子ども達自らが特殊について推理し、試行錯誤をしながら一般化を達成していく典型的な場面であり、本研究が一般化を志向する教授学習

場面を考える上で規範としたい事例であると位置付けられる。

3.2 “一般化モデル”の問い

Dörfler (1991) の一般化モデルも、岩崎 (2007) の一般化分岐モデルも、「一般化とはどうあるべきか？」という問いにこたえようとした優れた研究であり、授業設計において、特に活動を設計する際に大きく寄与することが期待される。これは、授業を構成する教授学的三角形（溝口,2004,p.2）から見れば『子ども』に関する研究であると位置付けられる。

しかし実際の授業においては、岩崎氏の研究の問いの対象外である一般化以外の数学的思考、即ちS1やS2のような『子ども』の推測・発見を考慮しなければならない。

また、“一般化モデル”に登場しない『教師』が支援を行う際、直接には一般化を促していないにも関わらず、支援が一般化の契機となりえる事が認められた。更に、特別な『教材』が一般化に対して決定的な役割を果たすことが認められた。以上の考察を基に、研究課題に対応している3つの小課題を導出した。

・小課題1

一般化を志向する教授学習過程において、推測や発見に結びつく活動はどう位置付けられるか？

・小課題2

教師からの問いかけが、学習者が一般化へ向かう契機としてはたらくのは、どのような場合であるか？

・小課題3

決定的な役割を果たす特殊はどのように構成され、どう位置付けられるか？

4. 小課題の検討

4.1 『子ども』の推測・発見

小課題1にこたえるため、本研究はBeth (Beth and Piaget, 1966) を基に直観主義という考え方に注目した。それは、“直観主義は数学的推理をできる限り、古典的形式論理学から借用したスキーマよりも実際の思考過程に適応させる試みとして定義される” (ibid, p.21) ので、“実際の数学的思考と、一般にディスコース的な思考全般のメカニズムについての価値ある情報を与える” (ibid, p.21) 事が期待されるためである。

また、伊藤 (1993) によれば、19世紀後半から20世紀初頭に起こった素朴な

(L.E.J.Brouwer以前の) 直観主義の主張の1つが“証明は構成的でなければならない” (ibid, p.21) 事であるが、この事の1つの側面こそが“証明における推論は「特殊から一般へ」と進めることが可能であること” (ibid, p.24) であり、直観主義という考えそのものに一般化が深く根付いていることも重要な点である。

検討の結果、我々の数学的思考は《探求》の相・《配列》の相・《検証》の相という連続的な3つの相に区別されなくてはならないことが明らかになった。

この“Bethの数学的思考の相”を特徴付けるのは、真に発見的で創造的であるが不規則である《配列》の相であるため、

数学における発見学を再構成しようとしたPolya (1945, 1954a&1954b) の主張を位置付ける事で、一般化に対して特徴付けを行った。

その結果、帰納・類比という様相が一般化に対して重要であることが明らかになった。一方、帰納・類比という考えでは円周角の定理などで用いられる、「場合分け」を説明できないことが認められた。その結果、Polyaに不足していた観点として分類という様相が重要であることが認められた。こうした分類には成功的なものとそうでないものがあるが、そのどちらも重要である。

これによって小課題1にこたえると共に、研究課題1には帰納・類比・分類が、研究課題2と3には分類が重要であることが認められた。

4.2 『教師』の支援とコミュニケーション

小課題2を基に、本研究は一般化を志向する教授学習場面における『教師』の支援について考察した。支援は学習者の思考を促進することを意図した『教師』による思考への介入であり、主として言語によるコミュニケーションによって行われる。

こうしたコミュニケーションについてSierpiska (2005) を基に検討した結果、同じ言葉が異なる対象を指すことによって発生する“社会認知的コンフリクト”が発生する場合と、コミュニケーションを維持しようとする社交的な機能が働く場

合において、学習者の一般化を促進することが認められた。

これにより、研究課題1と3に対して『教師』の役割としてのコミュニケーションが重要であることが認められた。

4.3 一般化を促進する『教材』

教授学習において『教材』が大きな役割を果たすということは疑い無く認められるが、『教材』は学習の内容によって固有の性質を持つという側面があり、それらについて一律に述べる事は非常に困難である。しかし、Polya (1945, 1954a&1954b) によれば、いくつかの特別な特殊が一般化を促進する。検討の結果、非常に極端な“極端に特別な特殊”や、一般の場合の解決を含む“有力に特別な特殊”について推理することが、学習者の一般化を促進することが認められた。

それに加えて、円の分割事例において決定的な役割を果たす図(図3)である“生成的な例”が、一般の命題を論証したり、特殊の中に一般を見つける手助けとなることが明らかになったため、これを“有力に特別な特殊”の中に位置付けることとした。

これによって、研究課題1と3に対して特別な『教材』の果たす役割が重要であることが認められた。

5. 一般化を志向する教授学習モデルの構築

Dörfler (1991) の一般化モデルも、岩崎 (2007) の一般化分岐モデルも、その

目的は一般化の認識過程を明らかにする事であった。一方、本研究の目的は一般化を志向する教授学習がどのようにあるべきかを明らかにする事である。

従って、目的の違いから、理解研究における理解の“過程モデル”と“様相モデル”(小山,2010)のように、一般化という1つの事柄に対して異なる要素に対応した、異なる特性を持つモデルが要請される。

本研究の目的に照らし合わせれば、問題解決授業を前提に、一般化を志向する教授学習における数学的活動において、一般化を達成するために推測や発見を含めどのような活動が期待されるべきであるか、不規則にあらわれるそれらの数学的活動に対して、教師や教材がどのような役割を果たすべきであるか、といった事を明らかにするモデルが要請される。そして、教授学的な立場から考えたとき、必要となるのは“個人差に応じた指導(解決予想)の根拠は、学習者の可能な解決パターンにあるのではなく、教授上いかなる指導(支援)が要請されるかにある。”(友定他,2006,p.5) ことを踏まえた活動の系列である。

以上を踏まえ、本研究が一般化を志向する教授学習場面の典型的な例として位置付ける仮想事例であった“円の分割事例”を基に、議論された『子ども』『教師』『教材』の役割を図示したものが、図4である。

Hesse (1966) , 小山 (1989) によれば、モデルとはある種の同型性に基づき

表現され、理論の全てを成り立たせるものである。こうしたモデルの本性から図4を検討すると、図4は教室で展開される『子ども』の活動を、教授上いかなる支援が必要であるかという観点に基づいて系列化している。従って、それぞれの活動は教師が意図した（主として言語による）コミュニケーションにおいて実施される〔支援〕によって高められていく。展開されるコミュニケーションによって発生する社会認知的コンフリクトと、その社交的な機能（Sierpinska,2001）が活動を促進するという同型性に基づいて表現されている。

同時に、実際の授業において〔極端に特別な特殊〕，〔有力に特別な特殊〕，〔生成的な例〕に取り組むことで、『教材』を通して学習者の活動が高められていくということが、矢印を用いた同型性に基づいて表現されている。

以上のような観点から、図4一般化を志向する教授学習場面における学習者の活動と、教師と教材の役割を同型性に基づいて表現したものであることが認められる。

同時に、本研究によって展開された議論の全てが成り立っている。同型性に基づいて表現され、本研究の理論のすべてを成り立たせるものであると認められるため、図4は一般化を志向する教授学習のモデルであることが認められる。

更に、円の分割事例の検討によれば、図4で示された活動を通して、一般化分岐モデルで明らかにされた活動を達成されることが期待される。従って、本モデルは一般化分岐モデルに対して整合性を有している。

一般化分岐モデルは子どもの活動の記述性と規範性を有しているが、一方で教師の立場から見れば、授業設計にあたって具体的にどのような算数・数学的活動

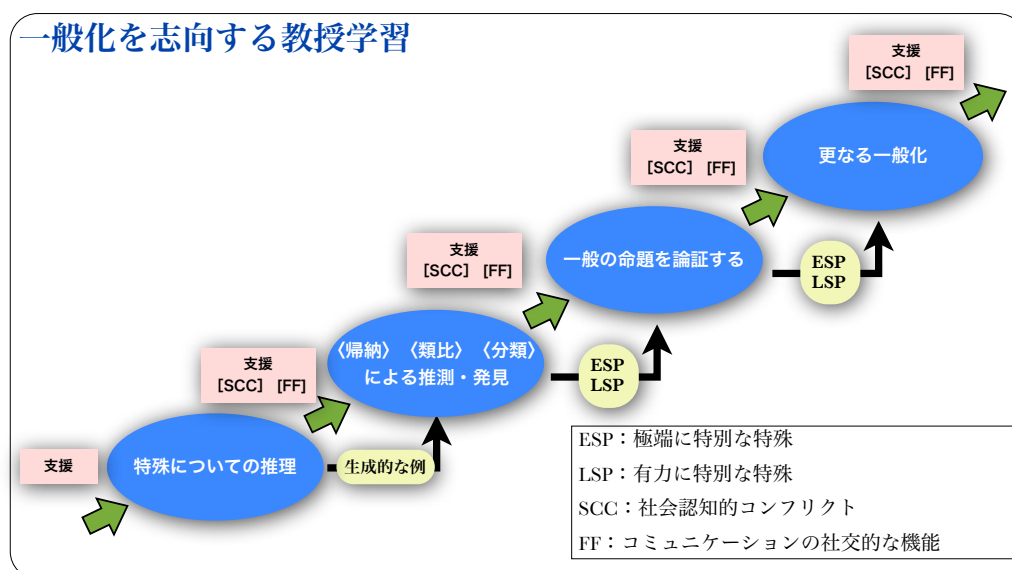


図4：一般化を志向する教授学習モデル

と支援を設計すればよいかは必ずしも明確ではない。

従って、本研究のモデルは教師の授業設計に用いられることで有用なモデルであると位置付けられる。勿論、一般化分岐モデル単体での授業設計も可能ではあるが、そこから直ちに「教師」と「教材」の役割が明らかになるとは限らない。本研究のモデルはいわば、教師が実際の授業を設計しようとするとき、一般化分岐モデルと実際の授業設計との橋渡しをする役割を果たしていると認められる。

教師がモデルを用いて一般化を志向する授業設計をすることで授業が改善され、子どもたちが“《真理に対する責任の担い手》”（友定他,2006,p.6）として成長していくと期待される。更に、こうした授業を日々行うことで、教師の支援がなくとも子ども自らが一般化を志向するような、いわば契約のようなものが成立することが期待される。

6. 今後の課題

本研究において重要な役割を果たすと考えられる特別な特殊について、それをどのように構成するかということについては、検討が十分に行われていない。学習中に教師が投げ入れることも考えられない訳ではないが、学習として質の高いものを目指すためには、やはり子ども達が自らこれらの特殊を構成できるようになることが望ましい。しかし、そのような子どもばかりであるとは限らないた

め、そこにどのような支援が要請されるのか、そこに至るための障害は何か、といった点が今後検討されなくてはならないだろう。

また、一般化の質や対象が異なる場合に学習者に与える影響について、本研究自身は殆ど何も触れていない。そのため、今後検討されなくてはならないといえる。

主要参考・引用文献

- Beth.E and Piaget,J (1966) [W.Mays,Trans.], *Mathematical Epistemology and Psychology*, D.Reidelpublishing company
- Dörfler.W, (1991), “Forms and means of generalization in Mathematics”, In Bishop.A (ed.) *Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching*,pp.63-85, Kluwer Academic Publishers
- Polya.G, (1954a), 数学における発見はいかになされるか1「帰納と類比」(柴垣和三訳), 丸善株式会社
- Sierpinska.A (2005), “Discoursing Mathematics Away”, in J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O.Skovsmose (Eds.) *Mathematics education library*: Vol. 37.
- 岩崎秀樹, (2007), 数学教育学の成立と展望, ミネルヴァ書房
- 友定章子・姫田恭江・溝口達也, (2006), 授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相, 鳥取大学数学教育研究, Vol.9, No1, pp.1-10
- 中島健三(1981), 算数・数学教育と数学的な考え方その進展のための考察, 金子書房
- 宮崎樹夫, (1995), 学校数学における証明に関する研究—証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して—, 筑波大学学位論文