

数学的問題解決における〈イメージ〉の機能に関する研究

A study on functions of <image> in mathematical problem solving.

地域学研究科地域教育専攻 田中 光一

指導教員 溝口 達也

本論文の章構成

1. 本研究の目的と方法

1.1 本研究の動機

1.2 本研究の目的

1.3 本研究の方法

2. 〈イメージ〉の仮説枠組みの設定

2.1 本研究における〈イメージ〉と概念 の定義

2.1.1 本研究における〈イメージ〉と図

2.1.2 本研究における概念

—Concept, Conception—

2.2 〈イメージ〉と概念

2.2.1 ビリヤード問題における解決例

2.2.2 ビリヤード問題の分析

2.3 仮説枠組みの設定と研究課題の抽出

3. 〈イメージ〉を同定する調査

3.1 調査の目的

3.2 〈イメージ〉の同定手順

3.3 調査 I

3.3.1 調査問題がそなえる条件

3.3.2 問題の開発

3.3.3 調査 I の実施

3.3.4 調査 I の結果と考察

3.4 調査 II

3.4.1 調査 II の開発

3.4.2 調査 II の実施

3.4.3 調査 II の結果と考察

3.5 調査結果から読み取る〈イメージ〉 の機能

3.6 第 3 章の結論

4. 〈イメージ〉が持つ機能

4.1 調査の方法

4.2 調査の結果

4.2.1 たけしの解決

4.2.2 のりこの解決

4.2.3 なぜ 2 回転するのか

4.3 調査結果の考察

4.4 〈イメージ〉の機能

4.4.1 問題把握の機能

4.4.2 思考を促す機能

4.4.3 コミュニケーションの機能

4.4.4 思考を評価する機能

4.4.5 リスクを補う〈イメージ〉の機能

4.5 第 4 章の結論

5. 学習指導における〈イメージ〉のコミ ュニケーション

- 5.1 なぜコミュニケーションの機能に焦点を当てるのか
 - 5.2 コミュニケーションの機能をどのように探究すべきか
 - 5.3 授業観察(エピソードⅠ)の記録及び考察
 - 5.3.1 エピソードⅠ-Aの記録
 - 5.3.2 エピソードⅠ-Aの解釈及び考察
 - 5.3.3 エピソードⅠ-Bの記録
 - 5.3.4 エピソードⅠ-Bの解釈及び考察
 - 5.4 授業観察(エピソードⅡ)の記録及び考察
 - 5.4.1 エピソードⅡの記録
 - 5.4.2 エピソードⅡの解釈及び考察
 - 5.5 第5章の結論
6. 本研究の結論
- 6.1 研究の結論
 - 6.1.1 研究課題1の結論
 - 6.1.2 研究課題2の結論
 - 6.1.3 研究課題3の結論
 - 6.2 学習指導に対する示唆
 - 6.3 残された課題

1. 研究の動機

厳密性が求められる数学において、イメージとは曖昧で、不確定なものというネガティブな見方がされるおそれがある。しかし、数学者が問題を解決するにあたってイメージが重要な役割を果たしているという主張もある。数学者を望ましい解決者と考

えるならば、学習者がよりよく数学を解決できるようになるための一方策として、学習者がイメージをよりよく使えるようになるような学習指導を授業者が行うということが考えられる。そのような学習指導はいかにして達成され得るか。また、そのためには授業者は何を了解していなければならないかが問題となる。

2. 研究の目的と方法

本研究は、〈イメージ〉が学習者の問題解決にどう機能するのかを明らかにし、授業者が学習者および教材を、〈イメージ〉という観点において解釈する上で有効な示唆を与えることを目的とする。

研究の方法としてまず、前述したように従来漠然と使用されているイメージを〈イメージ〉として再定義する。そして〈イメージ〉の仮説枠組みを〈イメージ〉の事例分析を基に設定する。そこから抽出された、後述する3つの研究課題を達成することで目的の達成を図る。それぞれの課題に対する方法は結論と併せて述べる。

3. 本研究における〈イメージ〉と概念の定義

3.1 本研究における〈イメージ〉と図

イメージとは通常、心象、心像と呼ばれるように像のことを指し、それはstaticな像を意味する。しかし、数学におけるイメージとはこのようなstaticな像としての意味だけを指せばよいのだろうか。例えば以

下のような場合を考える。

円が直線上をすべらず転がるとき、1回転して進む距離は円周の長さに等しい。これは、円周にそってちょうど1周分の長さの“ひも”をかけ、円を転がしながらその“ひも”を直線に伸ばすと、直線上を円が1回転して進む距離と等しくなる、といったようなイメージとして考えられる。このイメージを表したものが図1である。図1ではstaticな様子が描かれているが、思考の中でのイメージはdynamicな回転移動をしているだろう。

この例のように、思考の中でのイメージは必ずしもstaticな像としての意味だけでなく、それを思考の中で操作するdynamicな操作としての意味も考えることができる。本研究ではこのようなstaticな像としての意味だけでなく、思考の中における像のdynamicな操作としての意味も包括して、〈イメージ〉と呼ぶこととする。〈イメージ〉は「解決者の思考の中で形成された心的表象、およびその操作」とする。このように定義すると、先ほどの図1は〈イメージ〉を基に視覚的に描写された像であり、思考の中における心的表象ではない。したがって本研究における図はすべて、「〈イメージ〉の一部を顕在化した物理的対象」とする。

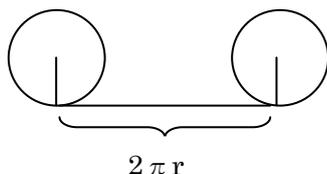


図1 円が直線上を1回転する様子

3.2 本研究における概念－Concept, Conception－

数学的概念とは、個人がそれによしとするものではなく、社会的に共有されるものでなければならない。我々は、子どもが数学を社会的知識として学習することを期待する(溝口, 1995)。それゆえ、算数・数学の授業において、学習者の数学的知識や概念について社会的構成が意図して行われる(友定, 姫田, & 溝口, 2006)。また Vinner. S. & Tall. D. (1981) は数学的概念の形成過程について、概念イメージと概念定義という枠組みによって説明しており、「個人的な概念定義は公的な (formal) 概念定義と区別することができる」と述べている。これらの指摘からも、解決者が持つ個人的な概念は、社会的に共有される概念、言い換えれば他者が持つ概念とは必ずしも一致していないことが考えられる。したがって本研究では、概念を Concept と Conception とに分けて捉える。社会的に共有された、すなわち理論的に構成された概念を Concept とし、個人の中に構成された概念を Conception とする。

4. 研究の結論

事例分析により以下のような〈イメージ〉の仮説枠組みを設定した。

図2より以下の研究課題が抽出された。
研究課題1「解決に困難が生じた時、〈イメージ〉を用いるのではないか。」

研究課題 2 「〈イメージ〉は問題解決にどう機能するのか。〈イメージ〉を用いることのよさとは何か。」

研究課題 3 「授業者は学習者の〈イメージ〉をどう扱うべきか。」

以下はそれぞれ、研究課題と課題に対する方法、及び結論である。

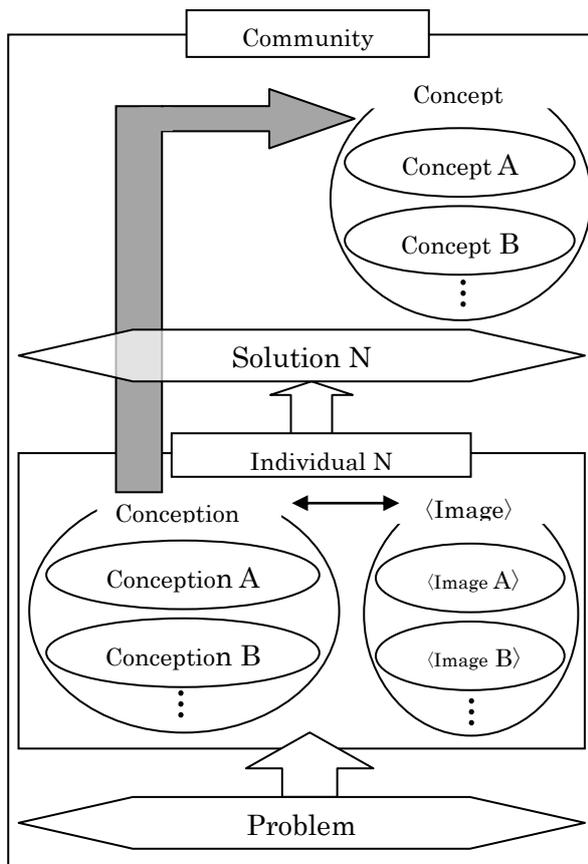


図 2 〈イメージ〉の仮説枠組み

4.1 研究課題 1 の結論

研究課題 1 「解決に困難が生じた時、〈イメージ〉を用いるのではないか。」

方法：観察不可能な〈イメージ〉を観察可能とするためにまず、〈イメージ〉の同定手順を考察した。その同定手順に従い、学習

者の〈イメージ〉を用いているかについての調査を実施し、実際の問題解決場面を分析した。

この調査によって、学習者は問題を解決する際、困難が生じたとき〈イメージ〉を用いていることが明らかとなった。つまり、学習者が困難に立ち向かうとき、〈イメージ〉が問題解決に機能していると言える。

4.2 研究課題 2 の結論

研究課題 2 「〈イメージ〉は問題解決にどう機能するのか。〈イメージ〉を用いることのよさとは何か。」

方法：研究課題 1 の調査における〈イメージ〉の同定手順に基づいた、学習者の問題解決における〈イメージ〉の機能についての調査を通して検討した。

この調査分析により、〈イメージ〉には、

- ・問題把握の機能
- ・思考を促す機能
- ・コミュニケーションの機能
- ・思考を評価する機能

という 4 つの機能があることが明らかとなった。日々の算数・数学の学習指導において授業者は、学習者が困難に自ら立ち向かい、解決していくことを期待する。学習者が困難な問題を解決するためには、このような機能を持つ〈イメージ〉が必要不可欠である。さらに、算数・数学の学習指導に

において授業者が〈イメージ〉について意識あるいは理解していれば、解決の過程で学習者がどんな〈イメージ〉を用いているのかを読み取り、その〈イメージ〉をどう修正すれば解決に至る成功的な〈イメージ〉へと成り得るかを考えられる。つまり、授業者が〈イメージ〉を意識あるいは理解することで、学習者(の特につまづき)に対する支援を理論的根拠の基に設定できることを意味する。

4.3 研究課題3の結論

研究課題3「授業者は学習者の〈イメージ〉をどう扱うべきか。」

方法：本研究で明らかとなった〈イメージ〉の機能の中でも特に、コミュニケーションの機能に焦点を当てて、授業観察・分析を通して検討した。その結果、〈イメージ〉のコミュニケーションにおいて、

- ・〈イメージ〉の dynamic 性を伝達し、〈イメージ〉を制限するためには、dynamic なメッセージが必要であること
- ・〈イメージ〉の dynamic 性を伝達する際に、授業者は dynamic なメッセージを意図的に選択する必要があること

の2点が明らかとなった。送り手のメッセージが受け手の〈イメージ〉を制限しているということから、〈イメージ〉の dynamic 性を伝達するためには、static なメッセージだけでなく、dynamic なメッセージも併せて用いなければならない。static なメッ

セージならば学習者の〈イメージ〉に自由度を持たすことにもなるが、それが誤りの原因となることもある。しかし、メッセージが〈イメージ〉を制限するということは、例えば授業者の〈イメージ〉が誤っていた場合、そのメッセージにより制限された学習者の〈イメージ〉もまた誤った〈イメージ〉となり、果ては誤った Conception(個人的な概念)が構成されてしまうだろう。つまり、授業者は自身が発するメッセージが学習者の〈イメージ〉を制限することを十分に了解した上で、メッセージを意図的に選択することが必要である。

5. 学習指導に対する示唆

本研究の結論から、以下のような示唆が得られた。まず、授業者は学習指導で扱う教材について十分に吟味し、その時間に学習すべき数学的知識や概念とはどんな〈イメージ〉であるかを了解していなければならない。そして、その〈イメージ〉を学習者に用いさせるためにはどのようなメッセージが妥当であるか、学習者が誤って用いている〈イメージ〉を修正するためにはどのようなメッセージが妥当であるかについて、事前に十分に吟味していなければならない。このように〈イメージ〉という観点で学習者及び教材を解釈しようとする事により、日々の学習指導の改善を図ることが期待でき、その暁には学習者がよりよく問題を解決できるようになることも期待で

きるであろう。

引用・参考文献

Vinner, S. & Tall, D. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *ESM*, 12(2), 151-169.

友定章子, 姫田恭江, & 溝口達也(2006). 「授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相」. 鳥取大学数学教育研究, 9(1), 1-14.

溝口達也(1995). 「数学学習における認識論的障害の克服の意義ー子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当ててー」. 筑波大学教育学系論集, 20(1), 37-52.