ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

分数の大小関係の指導改善に関する研究
–有理数の稠密性に着目して–

前田静香, 山中法子, 溝口達也
Sizuka Maeda, Noriko Yamanaka & Tatsuya Mizoguchi

vol.19, no.5
Jun. 2016

鳥取大学 数学教育学研究室

分数の大小関係の指導改善に関する研究

－有理数の稠密性に着目して－

倉敷市立箭田小学校　　前田　静香
福山市立久松台小学校　山中　法子
鳥取大学　　　　　　　溝口　達也

１．はじめに

分数の学習指導に関する研究は，これまでに数多く行われている。まず，分数に付与される様々な意味については広く研究されている。分数の概念[1]は，操作分数から量分数へ，そして有理数としての分数として形成される（岩崎・橋本，1990）が，演算との関係では分数の意味はどれも重要であるといえる（中家，1996）。また，宮下（1991）は“生活の中に現れる分数”は量に関する“倍”ないし“比”であり，数計算においては算法の＜形式＞のみに依存しているが，分数指導において量の援用は都合的であり，分数の指導には理論的な欠落があることを指摘している。長谷川（1997，2000，2003）は，児童が量分数と操作分数を混同していることから，分数概念の指導について様々な示唆を述べている。つまり，この他にも様々な研究がなされているにも関わらず，分数の加法において分母同士を足すといった誤りや，分数の除法においては除数をひっくり返して被除数にかければよいなどの形式のみの理解がなされていることが依然現状の課題として挙げられる。

これまでの研究では，演算可能性に重きが置かれていると指摘されるが，当該学年での分数の指導における課題のみならず，それ以前の学習である小学校第３学年における有理数の概念の指導[2]の際に課題があるのではないかと考えた。そこで着目したのが，数の「順序性」である。数について考える際，「演算可能性」のみならず「順序性」についても議論がなされるべきであり，その指導方法について検討することが求められると考えた。この観点から先行研究を概観すると，「順序性」に関する研究は数少なく，中でも教材ベースでの指導改善を意図した研究はなされてきていないことが明らかになった（*cf.* Mcintosh, et al.,1992；Teppo, et al.,2014）。数の順序性にそれほど議論が及ばなかった一因として，教科書での扱いは「AとBではどちらが大きいですか」という程度の記述に終始しており，特段に問題視されるほどのことでもなかったからであろうと考えられる。しかし，数学的にみると，数の順序性と演算可能性は独立して考えられるものではなく，数の順序性，つまり有理数の稠密性の認識は，極めて重要であると認められる。そこで，本研究では，小学校第３学年において，有理数の稠密性に着目した分数の大小関係の指導改善について，実践的な研究を行うことを目的とする。ここで「実践的」であるとは，分数の大小関係の授業実践を行うことを通して，本研究における主張の妥当性を検証することを意味し，有理数の稠密性の考えを用いた実践を行うことで，指導上の課題点及び，学習者にとっての困難さを分析することが可能になると考える。

２．有理数の稠密性に関する概念指導の必要性

算数・数学の学習において，大小比較は数と計算領域だけでなく，量と測定領域においても行われる。数は順序構造と演算可能性を有している。上述の通り，これまで演算可能性については広く議論され，指導法へとつながる研究が行われてきたが，順序構造をもとにした研究はあまり行われてきていない。両者がともに議論されなければならないのは言うまでもない。

有理数において，数Aと数Bの大小関係を決定する上で，A＜C＜B となる数 C が存在する。これが有理数の稠密性である。さらに，有理数（及び実数）は，全順序構造を有しているため，各々の数に対応する点を数直線上に取ることができる。数Aと数Bを数直線上に取ったとき，２点の間に数Cを認めることができるのである。

例えば２７８と３２６を比較する場合，十進位取り記数法に基づいて，一の位や十の位ではなく，百の位が比較されればよいという指導がなされる場合が一般的であろう。しかし，この考えがないままにこのような大小比較の指導が行われると，なぜ，百の位から比較するのかという比べ方についての議論は十分になされないことが予想される[3]。それは，学習場面において，比較をする多くの場合には２数の比較が行われるためである。先述したように，有理数において，数Aと数Bの大小関係を決定する上で，A＜C＜Bとなる数Cが

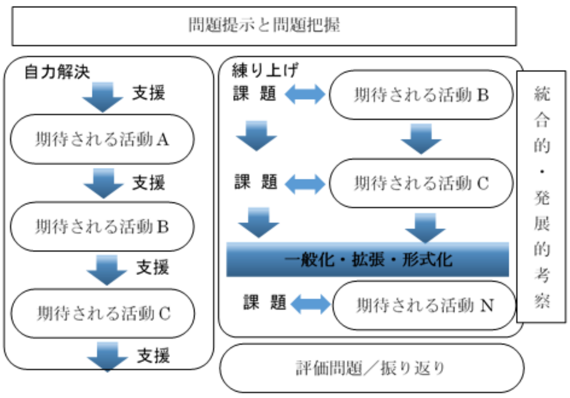
存在することが，指導上触れられていないことが原因である。また，長さなどの比較の際にも同等のことが起きているのである[4]。

このことから，少なくとも大小比較を行う場合にこれまであまり重要視されていなかった有理数の稠密性に着目することで，単に大きさを比べるという指導から，「大きさの比べ方」について学習者自身が思考する活動が設定される指導へと視点を転換することができると考える。

３．授業設計

３．１　問題解決学習　―授業の形式と構造―

授業での様相は個々の教室で異なるものである。本稿で行う授業設計は，問題解決学習を意図したものであり，図１のような形式と構造を有する固有の授業観，および授業モデルに基づいて設計されるものである。（溝口，2010；Mizoguchi,2013）



〔図１〕

３．２　「パターンの科学としての数学観」を用いた活動の設定

（1）「パターンの科学としての数学観」を用いるときの留意点

「なぜ，その活動をするのか」という問いは，授業を考えたときに大変重要な視点である。本研究では，自力解決および練り上げで行う活動が，数学的な本質に迫る適切なものであるかを判断する材料として，パターンの科学としての数学観を用いる。（前田，2012）

数学をパターンの科学として捉え，算数・数学教育に用いているドイツの Wittmann(1995,2005)は有名である。Wittmann の本質的学習環境は授業をデザインするという点では大変優れたものである。また，学習者の思考力や観察力，数学的なセンスを高めるためには大変魅力的なものである。しかしながら，その考えが日本の算数・数学教育において普段の授業に広く取り入れられることがなかなかないのは，パターンの科学としての数学観でもって，どのように学習者が数学的な知識を構成するのかということが議論されていないためであると考えられる。これは Wittmann がこのことを考慮していないということではなく，本質的学習環境として我々が目にするものの本質を理解しなければならないということである。Wittmann の研究から，パターンを取り入れた授業などが提案されている研究を概観すると，およそ次のような特徴が見て取れる。

Wittmann の本質的学習環境を表面的に見ると，同じような状況が繰り返される場面を設定し，教師が掴ませたい形式化されたものにあてはめられる状況を作り出せば，そのパターンが数学的な根拠になるというものである。しかし，これは単に，可視化されたものがあたかも同じ形式になる状況がそこにあるだけであり，決してパターンを科学しているとは言えない状況である。Wittmann もこの状況からどんなパターンが見えるかを問うことをしているが，それを使って新たなパターンを生み出すことができるかを主に問うているのではないかと考える。なぜならば，新しいパターンが生み出せるということは，対象の構造を理解し，探究することができているとみなすことができるからである。

本稿では，以上のことを鑑み，パターンの科学としての数学観を用いて活動を設定する場合，問題を提示する段階では，はじめに対象となるパターンを提示するが，自力解決において，教師側からパターンを提示して探究させるということは行わないこととする。

（2）操作的活動からよみ取る活動へ

パターンの探究を行うというときに，特に小学校段階の学習者にとっては操作的活動が大変重要になってくる。それは，証明という手立てをもたない学習者にとっての説明の根拠になりうる活動であるためである（溝口，2012）。そのため，問題提示の場面では，その問題がもつパターンに，数学的な価値があることや数学的知識を構成することが可能かどうかが重要になる。つまり，学習者が探究活動する価値のあるパターンがそこに存在していることが必要なのである。

さらに，操作的活動から得られたものを，次の段階の活動では，操作的活動から離れ，その構造を探究し，検証することが必要である。つまり，操作的活動からよみ取る活動へとつなげていくことが必要である。た

とえば，同値な分数を見つける活動を行うことを例に考えてみる。一般的に教科書で同値な分数を見つけるために例示されるのは，あらかじめ分割されたテープ図やリットルますである。それを指定されただけ色を塗り，その大きさが等しいことから，２数が同値であると認めるのである。しかし，この活動では，確かに$\frac{2}{4}$と$\frac{1}{2}$が同じ大きさを表していることは分かっても，$\frac{1}{2}$から$\frac{2}{4}$を作り出すことはできない。換言すれば，形式的に$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$と書くことはできても，その理由を説明できない状況を生み出してしまうということである。テープ図などに色を塗りたしかめることを操作的活動とみなすならば，従来の指導方法では，そこで活動が終わってしまい，表出したもののみしかよみ取ることはできないといえる。

そこで，テープを折るという作業を取り入れて，同じ課題の解決に当たるとどうであろうか。後述する本研究における実践において，あるテープ（１）を半分にすることで，学習者は$\frac{1}{2}$を作る。その折ったテープをさらに半分に折ってみると，$\frac{1}{4}$が現れる。ここで「もう一回半分に折ったらどうなるかな。」と問うと，多くの学習者が「$\frac{1}{6}$」と答えた。学習者には，「2-4-6」という数の配列が見えていて，操作そのものへの着目はされていないためである。しかし，実際はさらに半分にすると，$\frac{1}{8}$ができる。そのときになって初めて，学習者は自分の操作を反省的に見ることができる。すると半分にするという操作は，二等分すること，つまり，等分されたものをさらに二倍の数に等分することだということが読み取れれば，次に来る数は６ではなく８であると導くことができる。さらに同じ考えを用いれば，それに続く数は16，32，64…と続くと，もはや操作をしなくても導くことができる。

以上のように，操作的活動は当該する課題の状況を可視化させることができ，また検証においても役割を果たす。さらに，操作的活動で得られたことを探究することで，その構造をよみ取り，数学的な表現へとつなげていくことが可能になるのである。

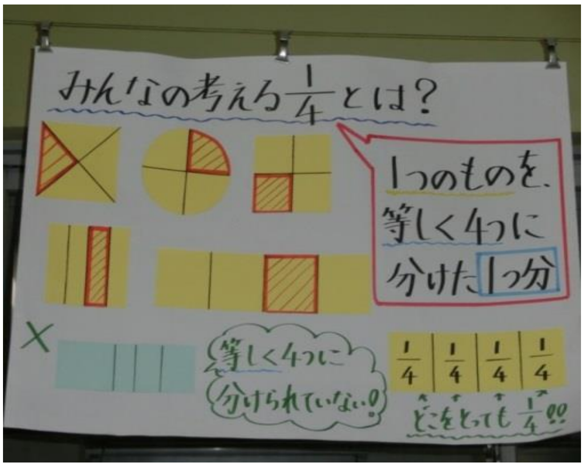
４．授業実践

４．１．授業展開

第３章に基づいて，単元計画を作成した。

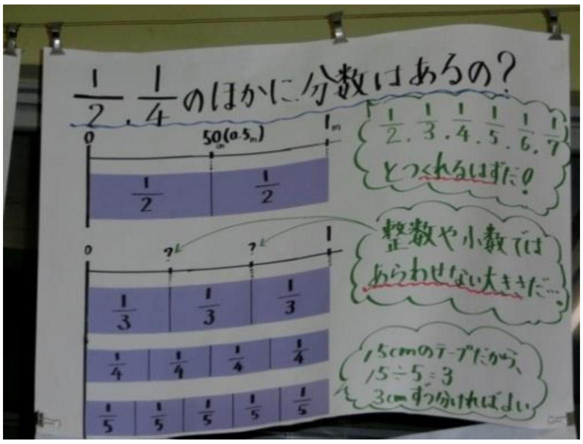
(1)本時までの学習内容

本時は，指導計画上，実践①では第６時，実践②では第５時に位置づけられている。児童は，これまでに，様々な形の$\frac{1}{4}$を見つける活動を通して，分数は，あるものを１と見たときに，それを等しく分けた幾つ分を表していることについて学習した。(図２)



〔図２〕

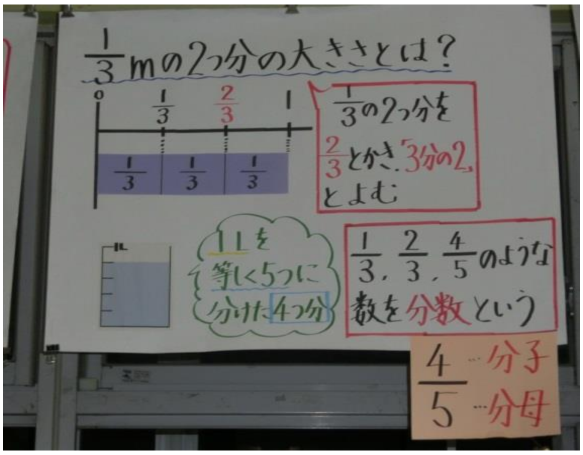
既習事項である$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$だけではなく，テープを折ったり，整数値と同じように考えたりすることで他の分数も作れそうだと予想した。この予想を検証するため，実際にテープを折る活動を行った。この活動を通して，児童は，分母が２の累乗の分数は作ることができ，数として存在する[5]ことを認めた。一方，分母が奇数の場合は，テープを折ることが難しく，また，テープの長さの関係上，計算でも割り切れないという課題を抱えた。しかし，児童は，具体的な操作で正確に分数を作ることができないが，必ずその数は存在するはずだという考えをもった。それは，分数を作りだす活動の中で，分数は１を等分することによって作り出されるものであると了解しているからである。また，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{7}$などの分数を考える中で，割り切れない数の大きさを分数では$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{7}$と表記できるというよさにも気が付くことができた。(図３)



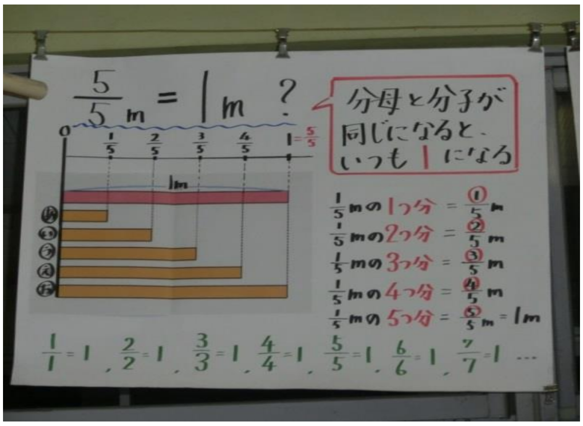
〔図３〕

このように，本時までに，分数の意味や必要性について学習してきた。

さらに，分数が量を表すことや数としての表現形式であることをテープと数直線を併用することで理解を深めてきた。（図４，図５）



〔図４〕



〔図５〕

（２）指導計画

【資料Ⅰ】,【資料Ⅱ】にあるように，授業実践者の前田[6] と山中[7] が勤務校において使用する教科書が異なっている。また，実践①は小数について未習であり，実践②は小数について既習となっている。

本単元では，次の４点を念頭に置いて，両実践が行われた。

ⅰ）分数を操作的活動によって作り出すこと。

ⅱ）量を表す分数としてみる場合はテープ（図）の線の間に分数を書くこと。

ⅲ）数の表現形式として分数をみる場合は，テープ（図）の線の上もしくは，数直線上に表すこと。

ⅳ）作り出した分数を基に，表現が違っても同値の分数が存在することなどの意味の拡張，有理数は数直線上に表すことができ，大小関係が存在することなど，一般化を志向したよみ取る活動を設定すること。

４．２　授業実践の実際

４．２．１　指導案の作成の意図

【資料Ⅲ】に示される指導案は大きく３つの様相を確認する目的で作成されている。１つ目は本研究の目的である，有理数の稠密性を基にして授業の展開が可能であるか，さらには学習者の数学的知識の構成に有効であるかを検証する目的である。これは，主に「問題場面をつかむ」場面で確認される。２つ目は，問題を解決する様相について，操作的活動からよみ取る活動へと変容できるかを検証する目的である。本研究では，児童の活動を「期待される活動」[8] とし，解決に水準を設けることで，その様相を確認する。最後に，我々が期待することに対して，学習者がどのような解決を用い，思考したのか，また理解をしているかを検証する目的がある。これは，「練り上げ・適用問題」の活動を通して確認する。

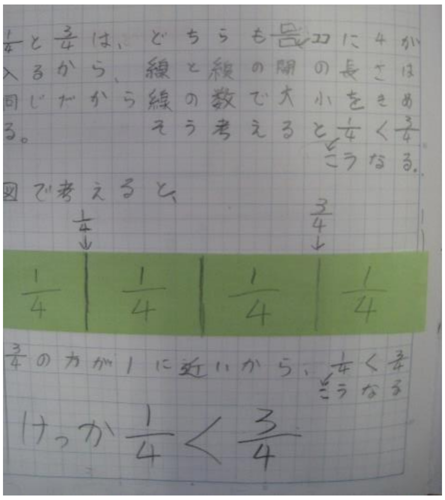
加えて，分数の大小関係の決定を有理数の稠密性を志向した支援を手がかりに解決するなかで，学習者がどのような困難さを感じるのか，また分数の概念理解に寄与できるのかを検証する。

４．２．２　実践①（実施日：2014.12.15）

【資料Ⅲ】の指導案による授業実践を行った。実践の結果，学習者にとって，本時最も驚きをもって解決されたことは，「$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間には，いくらでも分数がある」ということである。それぞれの【期待される活動】の様相を基に，見ていく。

【期待される活動 A】には，これまでの一般的な分数の大小関係の学習同様に，そもそも$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$はどちらが

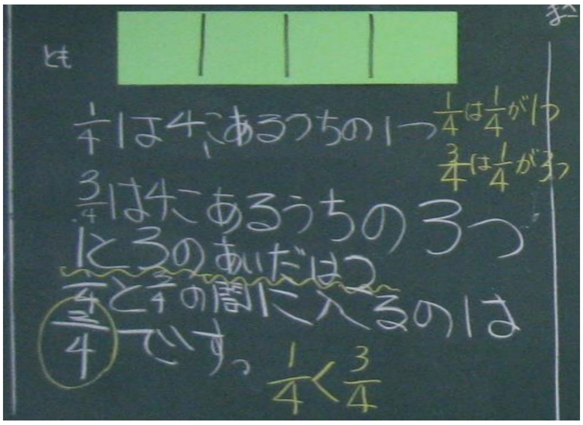
大きいのかを問う活動も設定している。これは導入場面で操作的活動を行った結果明らかに$\frac{3}{4}$の方が大きいことが学習者に了解されるのだが，それを単位分数のいくつ分ととらえて解決させたいというねらいがある。（図６）



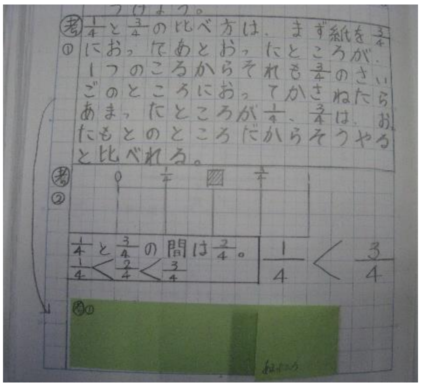
〔図６〕

学習者には，分数の大小関係を不等号を用いて形式化する活動を重視させた。それは，分数が有理数の表現形式であるためである。結果，【期待される活動 B】にあるように，学習者は，間にある数を見つけ，形式化し，$\frac{1}{4}<\frac{2}{4}<\frac{3}{4}$と分子に順序性を持たせることで，分母をそろえて分子を比較し，大小関係を決定することができると結論付けることができた。（図７，８）

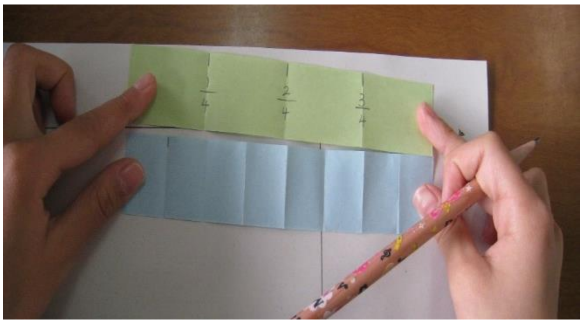
【期待される活動 C】では，操作によって「８分の」という分数を作り，$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間にある分数を見つける活動を行った。（図９）



〔図７〕

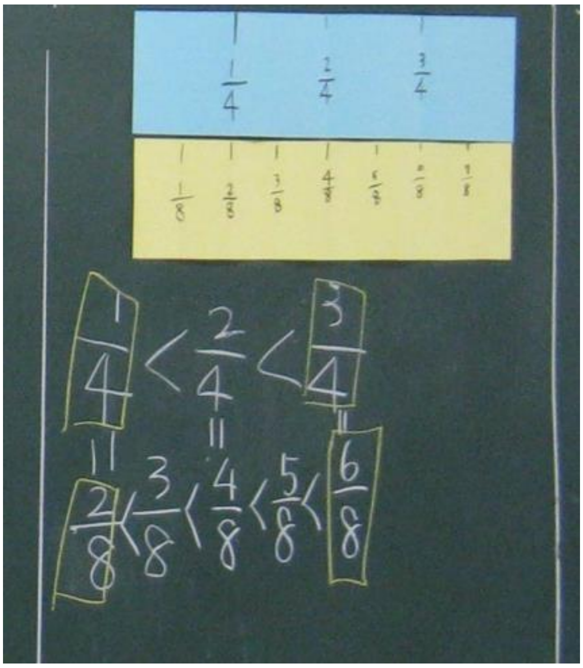


〔図８〕



〔図９〕

学習者は，活動から$\frac{1}{4}$と$\frac{2}{8}$，また$\frac{3}{4}$と$\frac{6}{8}$が同値であることを見取り，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{5}{8}$も$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間にある分数であると認めることができた。（図 10）



〔図 10〕

指導案には特別には載せていないが，我々は学習者に【期待される活動Ｎ】を設定していた。テープを折らなくても，$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間にある分数を作り出すことができるかというものである。これは，まさしく，操作的活動からよみ取る活動へと学習者が変容したことを示すものである。

多くの児童は，テープに線を書き加えたり，あるいはテープを折ったりすることを通して，「８分の」の次にくる分数は「１６分の」にちがいないという考えを検証していた。一方，図１１に示される学習者は，間の数を見つけることに関して，計算によって次々と算出していく活動を行った。

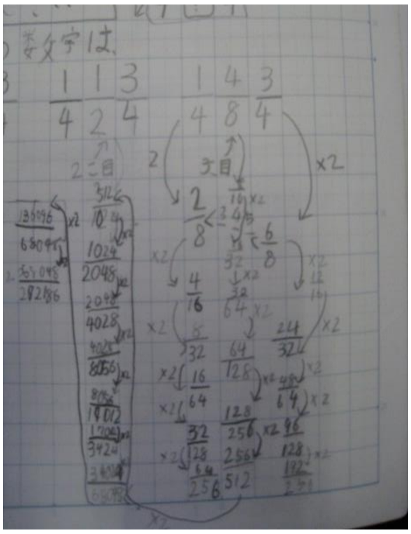
「１６分の」という分数が検証できた後は，「３２分の」，「６４分の」という分数が$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間にあるということを，確信をもって答えることができた。なぜならば，この児童は活動Ｃを経て，同値な分数を作り出すための方法を心得ていた。そのため$\frac{1}{4}<C<\frac{3}{4}$になるようにするためには，分母と分子を常に２の累乗倍したものを両端として，その間の分数が存在すると考えたためである。その中でも，$\frac{2}{4}$を２の累乗倍したものは必ず存在するということも強く主張していた。

学習者はこれらの活動から，「$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間には，いくらでも分数がある」という結論に至ったのである。分母の数が大きくなっても，分子に着目すれば大小比較が可能であることや，合わせて，その２数間にいくつ同分母の分数が存在するかについても考えることが可能であった。

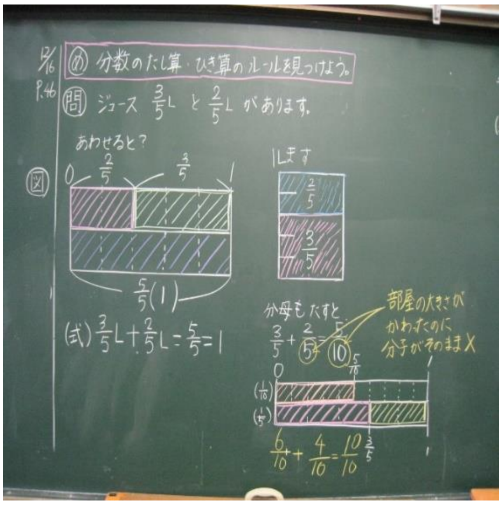
４．２．３　実践①の考察

実践の結果，有理数の稠密性を志向することについて，教材そのものに対する課題は見受けられなかった。逆に，この実践後に行った分数のたし算・ひき算では我々が想定していた以上に，学習者が分数の意味について理解を深めていることが明らかになった。それは，(図12)にあるような活動から見て取れる。

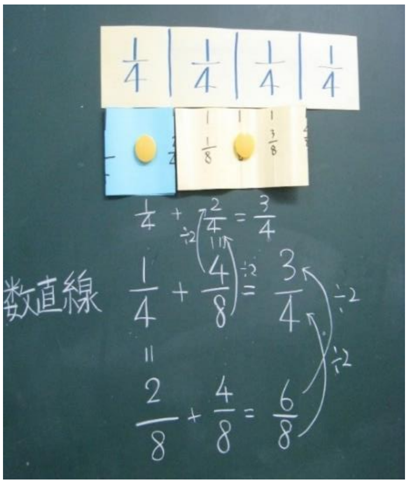
学習者は，分数のたし算において，分子同士を足してもよいのは，分母が同じであるからだということを主張していた。分母同士を足してしまうと，分数の大きさが変化するので，足すことができないからである。しかし，学習者は分母が違っても足せる分数があると言って，その様子を見せてくれた。それが（図13）[9]である。



〔図１１〕



〔図１２〕



〔図１３〕

本時の大小関係の学習で，学習者は自ら分数を作り出し，さらにその分数から新しい分数を作り出すことができるという結論に至った。それは，同値な分数を認めると同時に，その間にいくつもの分数が存在していることを認めることができたと換言できる。結果として，通分はおろか，同値な分数について学習していない学習者でも，限られた場合の異分母分数の演算が可能になったのである。

これらは，大きな示唆を含んでいるが，本時の活動が次年度以降の学習の先取りを行うものではないため，紹介に留めることとする。

実践した結果，授業の進行上，次のような学習者の解決への困難さが明らかになった。

（課題１）比べ方を考えることについて

教師が問題提示の場面で「テープがなくても説明できるか」という発問をした結果，教師の直接比較をしなくても比べられるかという意図ではなく，テープを用いてはいけないという様に学習者がとらえてしまい，活動に取り掛かりづらい学習者が見受けられた。

（課題２）まとめを行うタイミング

本時では，自力解決Ｃを超え，16，32，64，…と分母が大きくなった場合の解決を行った学習者がいた。本時の本来の目的である，大小比較の方法について考えることではなく，自力解決Ｎの様相に興味をもちすぎてしまった点は考慮すべきことであると考える。そのため，学習者の思考が細切れになったり，思考が停止したりしないタイミングで大小関係の決定についてのまとめを行うことが必要である。

（課題３）自力解決ＢからＣへの支援

自力解決Ｂまではほぼすべての学習者が解決でき，Ｃへ活動を高める場面で，「より特殊な支援」[10]が必要であったと考える。「$\frac{2}{4}$の他にはないかな」と問うのではなく，より具体的に，「$\frac{1}{4}$と$\frac{2}{4}$の間に分数はないだろうか」と問うことで，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{5}{8}$の存在を見つけやすくなるのではないかと考える。

４．２．４　実践②（実践日：2015.1.15）とその課題

実践②では，実践①での課題を踏まえ，その課題の克服を目指した授業を行った。なお，4.3 で挙げた課題は，いずれも教材解釈の本質的な課題ではなく，子どもたちにより誤解なく教師の意図を伝えるための改善である。

(1)　課題１の克服に向けた指導の実際

課題１は，問題提示の際の「テープがなくても，分数の大きさを比べることができるか」という発問により，テープを折るという「具体的操作」をしてはいけないと解釈する児童がいたことであった。そこで，実践②では，$\frac{3}{4}$の方が大きいと考えた理由を説明しよう」と問うことで，児童はテープを折るという操作による結果としての根拠だけではなく，「単位分数の幾つ分」の考え方を用いて説明することができていた。

(2)　課題２の克服に向けた指導の実際

課題２は，本時のまとめを最後にしたことにより，そのタイミングが児童の思考の流れに沿っていないということであった。実践②では，練り上げにおいて，期待される活動Ａについて議論した結果として，本時のまとめの文章を黒板に記録するよう変更した。その結果，児童の思考の流れに沿っていた分，児童の言葉でまとめることができた。期待される活動Ｃにおいても，同様のことが認められるが，活動の難易度としては高いので，練り上げでは，期待される活動Ｃをみるときに，期待される活動Ａで明らかになったことがここでも当てはまるのか，検証することとした。

(3)　課題３の克服に向けた指導の実際

課題３は，期待される活動Ｂから期待される活動Ｃへの支援の必要性についてであった。つまり，$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間にある分数において，$\frac{2}{4}$を見つける活動から$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{5}{8}$を見つける活動へと変容するための支援の必要性である。実践①では，「$\frac{2}{4}$の他に分数はないだろうか」という支援であったが，実践②では，この支援に加え，児童の実態に応じて[11]，「$\frac{1}{4}$，と$\frac{2}{4}$の間に分数はないだろうか」という「より特殊な支援」も行った。この結果，テープを折ったら分数をさらに作ることができたという今までの学習を想起し，テープを折る活動を通して，分母の異なる分数を見つけ始める児童が見られた。また，数直線で考えた児童は，分母が３や10 の時でも，間に入る分数があると図で説明をすることができていた。

一方，新たな課題も見つかった。「$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間にある分数」の「間」という言葉の意味を「２数の中間値」と捉える児童がいたことである。そのため，$\frac{1}{2}$と$\frac{4}{8}$などの数が２数の間の分数として見つかった後，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$も同様にみなしてもよいと考えるまでに支援が必要であった。

語「間」の子どもたちの理解については，本研究とは直接的に関連するものではないが，他の学習場面においても同様の様相を示すであろうことが予想されることから，今後の課題としておく。

４．３　授業実践の反省的考察

本研究では，研究の目的に基づき，単元計画の作成，本時案の作成，授業実践を行った。その結果，有理数の稠密性に着目して指導を行うことは教育的価値をもっており，学習者の数学的知識の構成にも有意義であると認められる。特に，従来行われてきた，分数の大きさを分母に合わせて分割されたテープ図を塗ることによって分数を学習するものと違い，学習者が自ら分数を作り出すという，学習の担い手としての活動が充実している。結果として，学習者は操作的な活動を通して様々な分数に触れ，操作的活動から得られた事柄を基に，分数を作り出すこと，つまり，操作的活動からよみ取る活動へと活動内容を変容させることができることが示された。

５　終わりに

有理数の稠密性を基に設計された授業を通して問題解決を行った児童は，間の数を見つける活動を行うことによって，大小比較の方法だけでなく，分数の意味理解も深めたと評価されると考える。あくまで個のクラスでの様相であるため，学習者および学習集団によっての多少の差は認められるところであろうが，有理数の稠密性に着目して指導を行うことの意義は十分に認められる。

今後の課題としては，分数だけでなく，他の単元においても，本研究と同様に有理数の稠密性を基にした開発的な指導改善が可能であると考えられることから，これらについても，カリキュラムの一貫性という観点から研究開発を行うことが要請される。

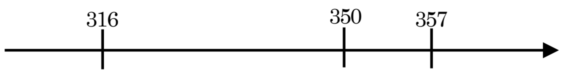
注

１）本研究では，「分数」を概念として表現されるものではないという立場をとっている。ただし，先行研究においては，「分数概念」と表記されているため，そのまま引用したものである。

２）本研究では，特に分数の大小関係に焦点を当てて論述しているが，これは，分数の大小関係についてだけでなく，有理数全体について考慮した上でのものである。そのため，分数は有理数における，数の表現形式の一部と捉えている。そのため，有理数の概念の一つとして，大小関係が決定できることを，指導することを示している。

３）整数の大小関係の決定では，大きな位から比べてみるという指導が一般的である。しかし，有理数の稠密性を基にすると，数直線の目盛りとして位を見ることができると考える。例として挙げると，次のような数直線を用いることができる。

(問) 357 と 316 はどちらが大きいか。



数直線上に表すと，316 と 357 の間には様々に点が取れるが，今回は 350 とする。316 と 357 を比較しようとするとき，対象とするのは，十の位である。それは，二数間に取られる点の百の位が同値で，大小関係の決定には，十の位が必要だからである。つまり，間に取られる数は 320 でも 330 でもいいのだが，我々が着目しているのは，十の位だということである。

４）長さや面積の比較の際にも，２つのものを直接比較し，任意単位で測定し，普遍単位での測定と通常学習が行われる。しかし，任意単位が現れる場面でよくあるのは２つのものが物理的に比較できない状況にあることが多く挙げられる。「直接比較」や「間接比較」は大小間の《順序性》を決定する認識である。しかし，ここでは対象間の順序のみが決定されることを目的とし，個々の対象の≪大きさ≫それ自体を直接の目的とはしていない。特に「直接比較」では，この点は明白である。一方，「間接比較」においては，２つの対象Ａ，Ｂの(当該の量についての)順序を決定するにあたり，媒介Ｃを用い，Ａ＜Ｃ＜Ｂを決定する過程において，$|A-C|$と$|B-C|$の差同士の比較が問題とされる。ここにいたって初めて，Ａ，Ｂ，Ｃの≪大きさ≫それ自体が決定される必然性が生じる。

「任意単位による測定」は,《大きさ》を数によって表現することが課題となり，それぞれの場面でその単位が選択される。しかしそれでは不都合が生じるため,「普遍単位による測定」が必要となるのである。

5）表現形式として，分数が数直線上にプロットすることが可能であることから,「順序構造」と「演算可能性」を認め, 数として存在すると認めることができる。

6）実践①の授業は，共著者の一人である前田が実施した。前田は，２．で示した本研究の基盤としての固有の授業観，および授業モデル〔図１〕に精通している。

7）実践②の授業は，共著者の一人である山中が実施した。山中は，２．で示した本研究の基盤としての固有の授業観，および授業モデル〔図１〕に精通している。

8）期待される活動とは，学習者がどのような活動を行うか予想するものではない。本時において，学習者が行うことが望ましいと指導者が設定する活動であり，それらの活動は文脈上に位置づけられ，活動内容がより高次なものへと変容するように規定されるものである。

9）図 13 は児童の発言を基に，前田が板書の補助を行った結果である。

１０）通常，支援と呼ばれるものは，当該の問題解決に直接的に有効なものを指す。しかし，本研究では，支援を「より一般的な支援」と「より特殊な支援」とに区別してとらえている。「より特殊な支援」とは，児童・生徒の活動を変容させる上で，有効であるが，当該の問題解決を直接的に変容させるものであり，その後の問題解決場面においては，必ずしも機能するものではない可能性が高い。一方で,「より一般的な支援」とは，その日の問題解決以外にも有効であり，従って，そのような支援が幾度となく施された児童・生徒は，次第に問題解決において，自身がそのように活動してくれることを期待するものである。（*cf.* 溝口，2010； Mizoguchi,2013）

１１）「より特殊な支援」は学習者の活動を促進（変容）させることに有効である。しかし，その前に「より一般な支援」をしたいと考える。注１０）に詳述したが,「より特殊な支援」を行うことで，学習者の解決の糸口は的確に与えられる。しかしながら，それが毎時間となると，一つ一つが独立した様相を呈した授業となってしまう。連続した学びとして実現できる可能性を有するためには,「より一般的な支援」の比率を増やしていくことが大切である。そのため，まず「より一般的な支援」を行うが，それで活動が変容しない場合に,「より特殊な支援」を行うことが必要となる。これは，一時間の学習だけでなく，単元間，学年間を通して行われるべきである。

引用・参考文献

Mcintosh, A., Reys, B. J. and Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8, 44.

Mizoguchi, T. (2013). Design of problem solving lesson and teacher’s assistance: Based on refining and elaborating mathematical activities. *Proceedings of the 6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME6)*, *vol.2*, 194-203.

Teppo, A., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: The number line as an example. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *46*(1), 45–58.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics Education as a ‘Design Science’. Educational Studies in Mathematics, 29(4), 355-374.

Wittmann, C. E. (2005). Mathematics as the Science of patterns: A guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood. The paper presented at the International Colloquium: ‘Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood’. (July 7-9/2005).

長谷川順一 (1997). 『量分数概念の確立に関連する知識の検討』. 日本数学教育学会誌, 79(10), 11-19.

長谷川純一 (2000). 『量分数概念の理解に関数る継続的研究ー小学校 3～4 年生を対象としてー』. 日本数学教育学会誌, 82(12), 2-14.

長谷川順一 (2003). 『量分数の概念理解に関する調査研究』. 日本数学教育学会誌, 85(10), 2-10.

岩崎秀樹・橋本正継 (1990). 『分数における意味と指 示について(II)ー分数の操作図式ー』. 日本数学教育学会第 23 回数学教育論文発表会論文集, 31-36.

前田静香 (2012). 『パターンの科学としての数学観に基づく算数・数学教授学に関する研究：児童・生徒の数学的な見方と問題解決学習に焦点をあてて』. 鳥取大学数学教育研究, 14(5) 1-125.

宮下英明 (1991). 『分数の教材研究』. 日本数学教育

学会誌, 73(4), 84-90.
溝口達也 (2010).『第 10 章　指導方法』.「新訂 算数教育の理論と実際」所収 (172-197), 聖文新社.
溝口達也 (2012).『「論証指導」の基盤としての「説明の指導」: 研究ノート』. 鳥取大学数学教育研究, 15(3), 1-9.
中家 覚 (1996). 『小学校児童の分数の理解について—分数の加減に関する題材を用いて—』. 日本数学教育学会誌, 78(8), 223-227.

A research on improvement of the teaching on deciding the size of fractions:

Based on the concept of the dense nature of the rational number

Shizuka MAEDA
Yata Elementary School, Kurashiki City
Noriko YAMANAKA
Hisamatudai Elementary School, Fukuyama City
Tatsuya MIZOGUCHI
Tottori University

Abstract

There are many research works on the teaching of the fraction, however, in actual classroom situations, the problem of teaching only formal aspects of the fraction is pointed out as ever. As a background of this problem, the notion of order (especially, dense order) is not discussed enough as the notion of operation of the fraction in each grade. Therefore, this research aims to improve practically the teaching of decision of the size of fractions in grade 3 by focusing of the dense nature of the rational number.

In this paper, firstly, we argue the dense nature of the rational number and insist on the importance of the teaching of this concept. Our research is accomplished practically, so the lesson model as problem solving and the perspective of mathematics as the science of patterns are suggested then. Based on them, two same lessons are implemented in the different classrooms in turn. Especially, the second lesson is intended to overcome the instructional problems of the first one.

In conclusion, students can find new number (fraction) by themselves through the activities in which they seek for new fraction between the given fractions. In other words, they can shift from the manipulative stage to interpreting stage. By these evidences, the suggested instruction is appreciated for teaching not only the procedure to decide the size of fractions but also the deep understanding of the meaning of fraction.

【資料Ⅰ】実践①指導計画（小数は未習）

時	学習内容	本時のめあて	評価の観点				評価規準（方法）
			関	考	技	知	
1	はしたの長さの表し方を考え，単位分数について理解する。	長さを測り取るには，どのように分数を作ればよいか考えよう。	◎		○	○	テープを折って作った分数ではしたの長さを測り，どう表せばよいか考え，興味をもって取り組むことができる。(観察・ノート)
2	長さの表し方を通して，単位分数のいくつ分という分数の表し方を知る。	分数を使って，長さを表す方法を考えよう。				○	分数の意味と表し方が理解できる（観察・ノート）
3	かさの表し方を通して，単位分数のいくつ分という分数の表し方を知る。	分数を使って，かさを表す方法を考えよう。		○			長さと同様に分数でかさを表すことができる。 １０等分，$\frac{1}{10}$をもとに，考えることができる。(ノート・発言)
4	数としての分数の意味を知り，１との関係を理解する。	分数も数のなかまか調べよう。また，１と同じ分数について調べよう。			○	○	分数を数として捉えることができる。また，分母と分子が同じ分数は１であることを理解している。 （観察・ノート）
5	数直線上に分数を表わしたり，数直線上の点を分数で表す。	分数が表す量と大きさの違いを説明しよう。		◎	○	○	数直線上に分数を表したり，読み取ったりできる。また，量として扱う分数と，数として扱う分数の違いについて考えることができる。 （観察・ノート・発言）
6（本時）	分数の大小関係・相等関係を考える。	分数の大きさの比べ方を考え，説明しよう。		◎		○	同分母分数の大小比較の仕方を理解している。(観察・ノート)
7	同分母分数の加減計算の仕方を考え，計算をする。	分数のたし算・ひき算の仕方を考え，説明しよう。		◎	○		同分母分数のたし算・ひき算を，単位分数をもとにして，整数と同じように考え，説明することができる。(ノート・発言)
8	分数の習熟を確かなものにする。	分数の学習の復習をしよう。			○	○	８割以上の問題を正確に解くことができる。 （ノート，プリント）
9	単元テスト						

【資料Ⅱ】実践②指導計画（小数について学習済み）

時	学習内容（ページ数）	本時のめあて	評価の観点 関	考	技	知	評価規準（方法）
1	身の回りのもので，分けた大きさをとらえる。	分けた大きさの表し方を考えよう。	○				分けた大きさの表し方に興味を持ち，取り組もうとしている。（観察，発言）
2	単位量に満たないあまりの大きさの表し方を考える。	分数の表し方を考えよう。		○			10 等分した目盛りで表せない１より小さい大きさの表し方を考えることができる。（観察）
3	１より小さいかさを分数で表す。	１ｍや１Ｌより小さい長さやかさの表し方を考えよう。		○			分数は単位分数のいくつ分で表せることに気づいている。（観察）
4	１と同じ大きさを分数で表す。	テープの長さを調べよう。				○	分母と分子が同じ分数は１であることを理解している。（観察・ノート）
5（本時）	分数の大小関係を考える。１より大きい数を分数で表す。	分数の大きさの比べ方を考え，説明しよう。				○	同分母分数の大小比較の仕方を理解している。単位分数のいくつ分で考えると，１より大きい分数がつくれることを理解している。（ノート）
6	分母が 10 の分数と小数の関係を考える。	分数と小数の関係について調べよう。				○	小数第一位の小数は，分母が 10 の分数で表せることを理解している。
7	（真分数）＋（真分数）＝（真分数）の計算の仕方を考える。	分数のたし算の仕方を考え，説明しよう。		○	○		同分母分数のたし算を，単位分数をもとにして，整数と同じように考え，説明することができる。
8	（真分数）－（真分数）＝（真分数）の計算の仕方を考える。	分数のひき算の仕方を考え，説明しよう。		○	○		同分母分数のひき算を，単位分数をもとにして，整数と同じように考え，説明することができる。
9	分数の習熟を確かなものにする。	分数の学習の復習をしよう。			○	○	７割以上の問題を正確に解くことができる。（ノート，プリント）
10	１ｍのテープを使って，分数ものさしをつくり，いろいろなものの長さをはかる。	分数ものさしを作り，いろいろなものの長さをはかろう。	○				身の回りのものを，分数ものさしを使ってはかろうとしている。（観察）
11	単元テスト・小テスト						

【資料Ⅲ】学習指導案

めあて	単位分数の幾つ分かで分数の大小を比べたり，テープを折って２数の間に入る分数を探したりすることを通して，分数の大小・相当関係の比べ方を考えることができる。

学習活動と内容	指導上の留意点	評価規準 (評価方法)
1．問題場面をつかむ。 ○このテープで，$\frac{1}{4}$や$\frac{3}{4}$を作ることができますか。 ・できる。(実際にテープを使って作る) ○$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$を比べると，どちらが大きいですか。 ・$\frac{3}{4}$の方が大きいです。	・分数の大きさのくらべ方に焦点をあてるため，２つの分数のどちらが大きいかは，操作活動を通して最初に明確にさせておく。 ・$\frac{3}{4}$が大きいと判断した理由(大小の比べ方)については，ここでは触れない。	
テープがなくても分数の大きさを比べることができるか考えてみよう。また，２つの分数の間に入る分数を探しましょう。		
2．課題を知る。 分数の大きさのくらべ方を考え，説明しよう。		
3．分数の大きさのくらべ方や，2 つの分数の間に入る分数を探す。 【期待される活動 A】 ①テープを折って大小比較する。 ②単位分数の幾つ分と考えて大小比較する。 ③分子の大きさで大小比較する。 【期待される活動Ｂ】 ①テープや図を分けたりして，間に$\frac{2}{4}$が入ることを見つける。 ②単位分数の幾つ分と考えて，整数値を用いて２が間に入ることを見つける。 【期待される活動Ｃ】 ①テープや図の目盛の間に線を入れることで，間の分数を見つける。 ②テープをさらに半分に折っていき，分母を８にしたときの間に入る分数を見つける。	・【期待される活動 A】への支援 どんなくらべ方をしたか説明してみよう。 ・直接比較だけではなく，単位分数の幾つ分で考えられるようにさせる。 ・【期待される活動 B】への支援 $\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$の間には，どんな分数が入るだろう。 ・操作の結果として，$\frac{2}{4}$を見つける。 【期待される活動 C】への支援 $\frac{2}{4}$のほかには，分数はないだろうか。 ・意図的に分数を作りだし，大小を比較する。	(数学的な考え方) ○単位分数の幾つ分，2 数の間の分数を見つける活動を通して，分数の大小関係・相当関係の比べ方について説明することができる。 (ノート，発言)
4．分数の大きさのくらべ方について話し合う。 ○分数の大きさの比べ方には，どんな方法があり	・具体物，図，数直線を関連させながら，考	

ましたか。 ・【期待される活動Ａ】	えをまとめていく。 ・不等号を使って，大小関係を表すようにさせる。 ・単位分数が幾つ分かで大小比較ができることを押さえる。	
○大きさが違うということは,間に数が入るということですね。どんな数が入るか説明しましょう。 ・【期待される活動Ｂ】	・2 つの数が同じ大きさでないならば，それらの間には数が存在することを想起させる。 ・テープを折るという操作の結果，2 数の間の数である$\frac{2}{4}$に気づかせる。	
○他にも間にある分数はありますか。 ・【期待される活動Ｃ】	・テープを折るという操作を通して，意図的に$\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$のような分母の異なる分数を見つけさせる。	
5．本時のまとめ 分母が等しい分数の時は，分数の大小は分子の大きさで比べることができる。		
6．適用問題をとく。 ・$\frac{2}{7}$，１，$\frac{5}{7}$　を小さい順にかきましょう。 ・$\frac{2}{5}$，と１の間に入る分数をかきましょう。	・適用問題の数値に「１」を用いることで，「分母が等しい分数」という条件を満たすことができるかみとる手段とする。	
7．学習の振り返りを書く。		

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881−6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/