ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

数学教育における「重心」の教育的価値に関する研究

荻原友裕　*Tomohiro Ogihara*

vol.19, no.3
Apr. 2016

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

引用・参考文献

参考資料

第 1 章
本研究の目的と方法

本章では，本研究の目的・方法について述べる．
1.1 では，本研究のテーマ設定に至った背景を述べる．
1.2 では，本研究の目的を述べる．
1.3 では，本研究の研究方法を述べる．

1.1　本研究の動機

筆者はボランティアで学校を訪れたときやアルバイトの塾で中学生や高校生に数学を教えることがあった．その中で，数人の高校生に共通して重心・外心・内心の作図方法がわからなかったり，誤って覚えていたりする様子が見られることに気がついた．しかしながら彼らは，例えば内心が内接円の中心であることや，外心が各頂点からの距離が等しいことなど，それぞれの性質については理解しているようだった．また，垂直二等分線の作図や角の二等分線についての作図に関しては問題がないようだった．したがって彼らはその性質と作図方法を結びつけて考えることができていないか，作図によって得られる点や線がどういった意味を持っているのかについて理解していないようだった．

筆者は，この三角形の「心」の理解の差の原因を考えたい．つまり，学習者である高校生に作図ができないという問題があるのではなく，作図を含めた図形のカリキュラムに問題があるのではないかと考える．また，作図することに焦点を置くのではなく，「心」を考えることに重きを置きたい．なぜなら，例えば彼らは垂直二等分線の作図をすることができ，それを用いて作図した「心」が外心であることは気づくことはできても，「外心や重心を作図する」ということができなかったからだ．

そこで，三角形の「心」について調べたところ，現在は重心・内心・外心は数学 A の内容になっているが，以前は中学校 2 年生の内容で教えられていた経緯があることがわかった．

また，三角形の心の中でも重心は他の心とは異なり，発見した人物が明確であること，体系的にまとめられてきた歴史があることや，その体系には幾何学のみならず，物理学的な考えが含められていることがわかった．

したがって，まず重心について現在のカリキュラムにどのよ

うな問題点が考えられるか，考えられるとしたらどのように改善されるべきなのかということを考えたい．

1.2　本研究の目的

幾何教育において，系統的な学習がなされることは以前からの 1 つの目標とされてきた．それはユークリッド原論を第 1 巻の定義から教え込むというようなことではなく，学習者が概念を形成していく中で，数学的に少しずつその概念が高まるという意味であり，学習者が最終的に体系的な理解をするという意味である．その例として，小学校の各学年で学ぶ図形も構成的な高まりを持っているし，それらを最終的には集合で表わし，それぞれの性質についても体系的に理解させる．

また，重心とは重さに対して意味を持つ点のことである．それは，他の図形領域では考えない重さについて考えるということである．したがって，重心は他の図形と本質的に異なり，重さに関して考えられた後で重心が考えられるべきである．

以上のことから，本研究の目的は数学教育では重心はどのように学ばれるべきであるか、について考えることで、現在の重心指導では考えられていない教育的価値について考察するものである．

1.3　本研究の方法

上記の目的を達成する方法として，本研究では，まず，重心にはどのような歴史があり，体系が考えられるのかということについて調べることで, 重心について把握する.（第 2 章）次に，数学教育において，重心がどのような扱われ方をしていたのかについて，学習指導要領の変遷をもとに把握する．また，数学教育において，どのような先行研究があるのかを分析することで，重心指導に関して出版社別に現在の教科書の比較，分析を行う．そして現在の重心指導にどのような問題点が考えられる

のかを数学的に，教育学的に考察する．（第 3 章）ここで，挙げられた問題点と本研究の目的を達成するための課題を述べる．その上で，数学教育における体系的に考えることの目的を述べ，第 2 章で扱う 2 つの体系をもとに新たに重心に関する体系を設定する．（第 4 章）そしてその重心に関する体系を用いて指導がなされたと想定したとき，学習者にどのような概念の形成が見られるかについて検討する理論枠組みとして概念定義と概念イメージを導入し，考察する．（第 5 章）また，概念定義と概念イメージの理論枠組みでは有用でない点や説明できない点についても検討する．そのうえで，本研究の結論にあたる，数学教育における重心の教育的価値がどのように示され得るのか，について明らかにする．（第 6 章）

〈本論文の章構成〉

第 1 章　本研究の目的と方法
本研究の目的と方法を述べる.

第 2 章　重心について
重心に関する Archimedes と M.B.Balk の 2 つの体系を比較し，幾何学的重心を明らかにする.

第 3 章　重心指導について
学習指導要領の変遷と先行研究の分析から，現在の重心指導に関する問題点を明らかにし，現行の教科書を比較・分析する.

第 4 章　重心の新たな体系の設定
Archimedes と M.B.Balk の体系をもとに，相互に補完し合うような重心に関する新たな体系を設定する.

第 5 章　概念定義・概念イメージによる検討
新たな重心に関する体系をもとに指導された学習者の概念形成の過程を概念定義と概念イメージを用いて考察する

第 6 章　本研究の結論と残された課題
本研究の結論と残された課題を述べる.

第 2 章
重心について

2.1　Archimedes の体系について
2.2　M.B.Balk の体系について
2.3　2 つの体系の比較・分析

本章では，重心について述べる．

2.1 では，重心を発見したとされる Archimedes の重心の体系について述べる．

2.2 では，「重心の概念の幾何への応用」で述べられている M.B.Balk の重心の体系について述べる．

2.3 では，Archimedes と M.B.Balk の体系について比較し，2 つの体系の関係について考察する．

2.1　Archimedes の体系について

重心について初めて数学的に記述したのは, Archimedes であるといわれている．しかしながら，Archimedes が書いたとされる現在発見されている論文の中で，重心という概念は定義なしに使用されている．したがって一般には現在失われてしまった機械学についての作品があり，その中で定義されたと考えられている．発見されている論文の中では,「平面のつり合いについて」において第 1 巻で直線図形について扱っており，三角形と台形の重心についての記述で終わっている．第 2 巻では放物線の弓形の重心に焦点をあてて記述している．

そこで,「平面のつり合いについて」の第 I 巻で挙げられている要請と命題について示しておく．それぞれの証明については必要である部分のみ最後にまとめて記述しておく．

「平面のつり合いについて」の要請

1. 等しい重さは等しい距離でつり合う．また等しい重さは不等な距離ではつり合わず，より大きな距離にある重さのほうへ傾く.
2. 2 つの重さがある距離でつり合っているとき，もし，一方の重さにある重さが付け加えられるならば，それらはつり合わず，付け加えられた重さのほうへ傾く.
3. また同様に，一方の重さからある重さが取り去られると，それらはつり合わず，取り去られなかった重さの方に傾く.
4. 等しくて相似な平面図形がお互いに重ね合わされ一致しているとき，それらの重心もまた互いに一致する.
5. 不等であるが相似な図形の重心は，相似な位置にあるであろう.
6. もし，2 つの量がある距離でつり合うならば，それらに等しい量もまた，同じ距離でつり合うであろう.

7. その周が同一の向きにへこんでいる任意の図形の重心はその内部になければならない.

「平面のつり合いについて」の命題

1. 等しい距離でつり合っている重さは，等しい.
2. 等しい距離にある等しくない重さはつり合わないが，重い方に傾く.
3. 等しくない重さは，等しくない距離でつり合い，その重い方が短い距離になる.
4. 2 つの等しい重さが同じ重心を持っていないとき，1 つにされた両方の重心はそれらの重心を結んだ線分の中央の点にある.
5. 3 つの等しい量が等しい距離で一直線上にそれらの重心があるとき，それらすべての量を合わせた量の重心は，中央の量の重心と一致する点となる.

   系 1 奇数個の量を合わせた量の重心は，中央の重心 G と一致する.

   系 2 偶数個の量を合わせた量の重心は，中央の 2 つの量の重心を結ぶ直線の中点 G と一致する.
6. 共測な 2 量は，それらの重さの比を逆にした距離において，互いにつり合う.
7. 共測でない量は，それらの重さの比を逆にした距離において，つり合う.
8. ある量 AB が重心 C を持っていて，その量の一部の量 AD が重心 F を持っているとき，のこりの量の重心 G は, GC と CF の比が量 AD と量 DE 比と等しくなる位置である.
9. すべての平行四辺形の重心は，平行四辺形の対辺の中点を結ぶ直線上にある.
10. 平行四辺形の重心は，対角線の中点である.

11. abc と ABC が相似な三角形であるとき，それぞれの重心 g と G は相似な位置にある.また同様にして，g が三角形 abc の重心であるとき, G は三角形 ABC の重心である.
12. 相似な三角形 abc と ABC があり，bc，BC の中点 d, D が与えられたとき, 三角形 abc の重心が ad 上にあるならば，ABC の重心は AD 上にある.
13. すべての三角形の重心は，頂点から対辺の中点へ引かれた直線上にある.
14. すべての三角形の重心は，いずれか 2 つの，頂点から対辺の中点までの線の交点にある.
15. AD と BC が平行な台形 ABCD があり，AD が BC より小さく，AD，BC が E，F によって 2 等分されるとき，台形の重心 G は EF 上にあり，GE と GF の比が BC の 2 倍に AD を足したものと AD の 2 倍に BC を足した比と等しい位置にある.

以上のように，Archimedes は命題 13 と 14 ですべての三角形の重心について体系的に求めている.

また，それぞれの命題が何を根拠にして証明されているかという，命題のつながりについては図 1 のようにして示される.

Archimedes は重心を求めるときに, 実際にものを糸で吊り下げて，その糸の鉛直線上にあると考え，様々なものの重心を観測したようである.

Archimedes の体系の特徴として, いくつかの要請をもとに証明している．その証明には物理学的な考え方（モーメント）なども含まれている．命題 6，7 において，てこの規則性について証明しており，これを用いて三角形の重心の位置について証明している.また，Archimedes はすべての三角形については述べているが，すべての四角形の重心の位置については述べておら

ず，平行四辺形・台形まででとどめている．

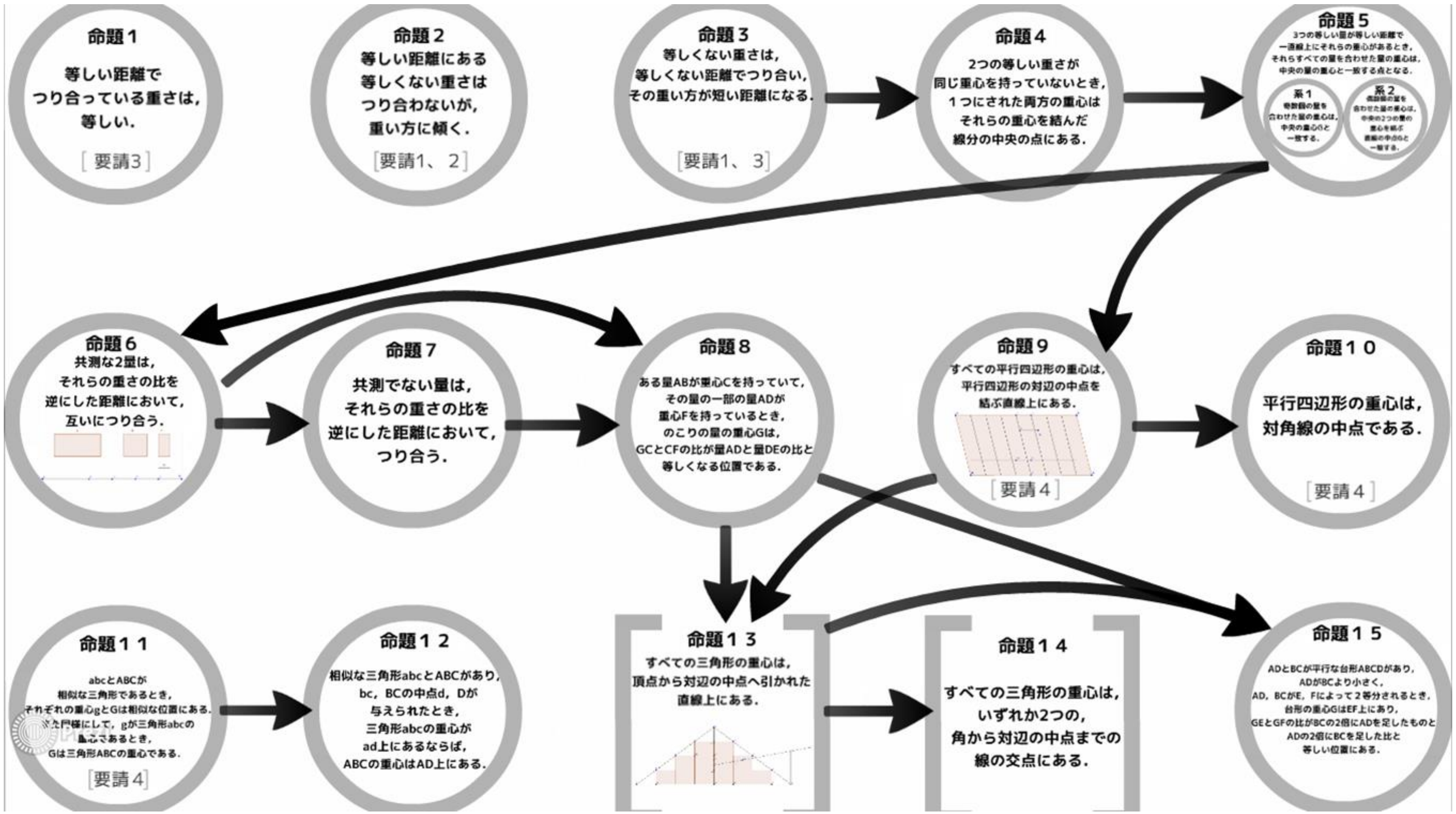


図１　Archimedes の平面のつり合いの体系（○は各命題、□が三角形の重心に関する命題、矢印は証明の根拠に使われるもの

2.2　M.B.Balk の体系について

M.B.Balk（1960）は Archimedes の重心の求め方とは異なる方法で，以下のように系統的に三角形の重心について考えている．

まず質点 A の質量 a を（A，a）として表すことを示したうえで，2 つの質点 A，B の重心を「線分 AB 上にあって，てこの法則を満たすような第 3 の点 C のことである」（M.B.Balk,1960,p.18）として定義している（図 2）．ここで，てこの法則というのは，Archimedes のいう命題 6 と 7 と同値なものであるため，てこの規則性と同じである．

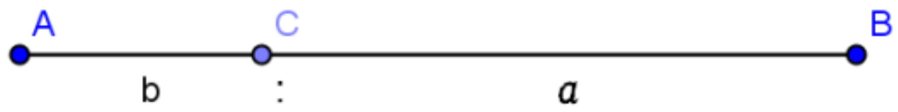


図 2

さらに，2 つの質点の合成という概念を導入し，質点（A，a），（B，b）の重心 C の質量は a+b であるとし，（C，a+b）と表されるとしている．

以上から，いくつかの質点の重心を求める際に 2 つの質点の重心を考えることでいくつかの質点を求めている．その中で，質量が 1，つまり等しい質量を持つ 3 個の質点を考えることで三角形の頂点の重心について求めている．

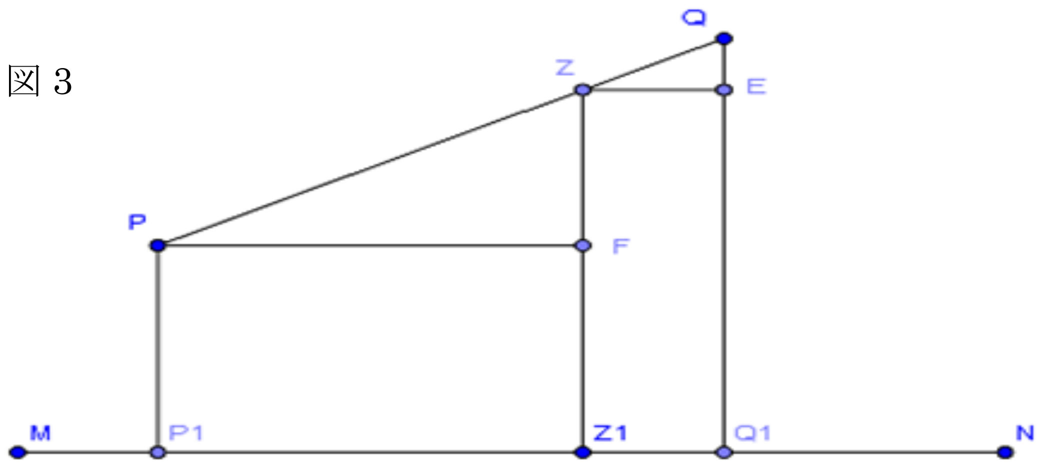
また，いくつかの質点の重心を求めるにあたって以下の 2 つの性質をもとにしている．

① n 個の質点の重心の位置は，これらの点を次々に合成していく順序に無関係である（n 個の質点からなる系の重心の一意性の定理）．

② n 個の質点からなる系の重心の位置は，いくつかの質点をそれらの合成でおき換えても変わらない（質点群の組わけ可能の定理）．

次に，図 3 のような 2 つの質点 P，Q とそれらの重心 Z の軸 MN との距離について考え，いくつかの質点とそれらの重心の軸との距離について求めさせている．この軸との重心の距離は，後述する線分の重心及び面の重心を求めるための根拠となる求め方である．

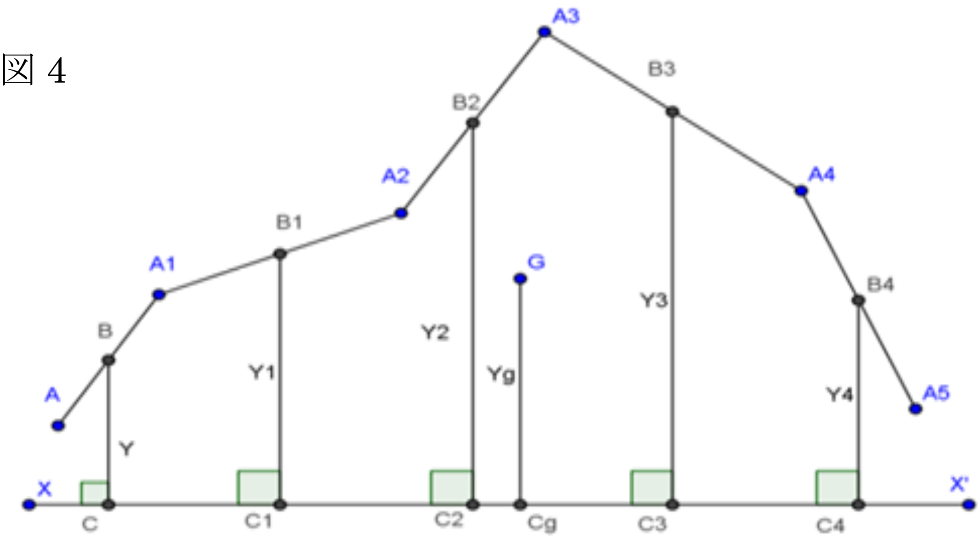
図 3



次に線分について考えるために，長さ 1 の，針金の切片の質量をδ（線密度）で表し，長さ l の質量を lδ と表せることを示した上で,「線分の重心はその中点である」(M.B,Balk,1960,p44) と定義している．

さらに，図 4 のように折れ線や曲線の重心について考えるときには，線分に分け，それぞれの重心を考え，前述した質点と軸の距離を考える方法を用いることで求められるとしている．

図 4

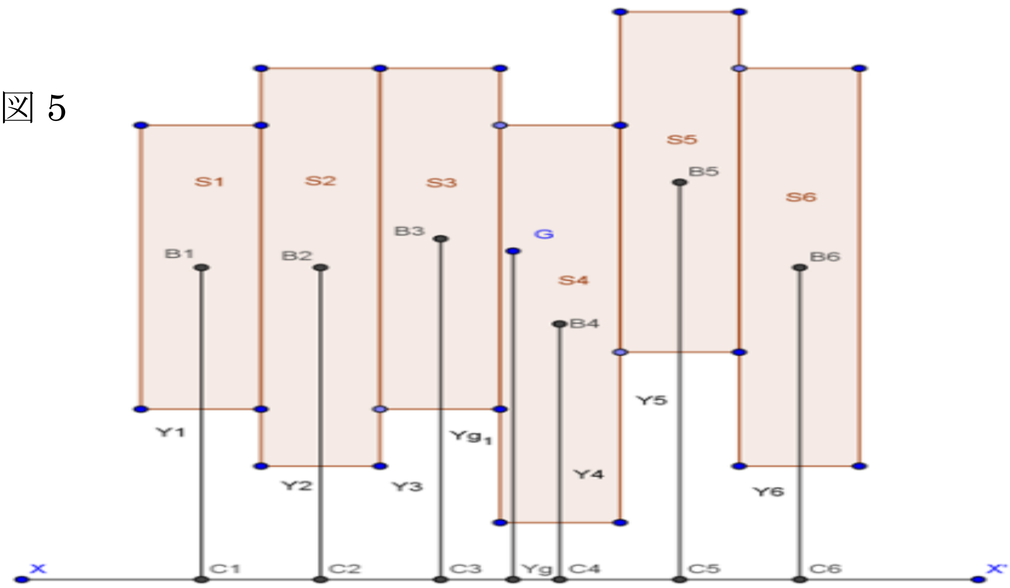


このようにして線分の重心を考えることで，三角形の周の重心について求めている．

次に，平板の重心を求めるために，先程と同様に面積 1 の質量をδ（面密度）として，面積 S の平板の質量を Sδと表せることを示した上で，長方形の平板の重心を「その重心は長方形の対角線の交点になる」(M.B.Balk,1960,p49) と定義している．

さらに，図 5 のような長方形でできた多角形や任意の閉曲線で囲まれた平板の重心については，それらの面に長方形を敷き詰め，それぞれの重心を考え，前述した質点と軸の距離を考える方法を用いることで求められるとしている．

図 5



このようにして面積の重心を考えることで，三角形の面積の重心について求めている．

以上のように，M.B.Balk は三角形の重心を 3 通りに解釈した．M.B.Balk は三角形を点・辺・面に分けて考え，質点・線密度・面密度という力学的な考えをもとにして体系を構成したことがわかる．また，てこの規則性は公理的に扱っており，2 つの質点の重心，線分の重心，長方形の平板の重心のもととなるものを定義で，その定義から演繹することで求めている．また，前述

したように理論的背景として，周の重心と面積の重心の理論には質点の重心が用いられている．

2.3　2 つの体系の比較・分析

2.1，2.2 で示した Archimedes と M.B,Balk の 2 つの体系にについて考察する．

まず, 2 人の体系の出発点として用いられているものについて考察すると, Archimedes は，7 つの「要請」から演繹している．要請とは,「公理ほど自明ではないが，証明なしに原理として立てられる命題」のことである．それに対し M.B.Balk は，2 つの質点の重心や線分の重心を「定義」することから演繹している．したがって, Archimedes の要請から演繹された結論や命題はいつでも正しいといえることができる．一方，M.B.Balk は定義から演繹しているため，もし別の定義を行えば，M.B.Balk の体系とは異なる体系がつくられる可能性がある．

また，2 人とも共通することとして，てこの規則性を命題や定義として扱っていることが挙げられる. Archimedes は証明する対象として，てこの規則性を命題 6，7 で扱っており，M.B.Balk は公理的に扱っている．

また, Archimedes が求めている平行四辺形の重心や三角形の重心は，M.B.Balk の平板の重心に相当するものである．M.B.Balk の質点の重心や，周の重心に相当するような内容は Archimedes の体系の中では扱っていない．

以上のことからこの 2 つの体系は，互いに持っていない要素があるが，てこの規則性を扱っていることや物理学的な考え方（モーメント）を利用しているため，互いに補完し合うことが可能であることがわかる．

第 2 章の要約

重心について

・重心に関して Archimedes と M.B.Balk がそれぞれに体系を作っており，数学的な考えだけでなく，2 人とも物理的な考えも含んでいること．

・2 つの重心の体系はそれぞれを補完しあう可能性があること．

・M.B,Balk によると，三角形の重心について 3 通りの解釈の仕方ができること．

2 つの体系を比較・分析することで明らかになったこと

・Archimedes は，「要請」から演繹し，てこの規則性を証明する対象として命題に取り入れながら，面積の重心についてのみ体系の中で扱っている．

・M.B.Balk は，「定義」から演繹し，てこの規則性を公理として証明に取り入れながら，質点の重心，周の重心，面積の重心について体系化している．

第 3 章
重心指導について

本章では，現在までの重心指導について述べる．

3.1 では，重心に関する学習指導要領の変遷から，重心の数学教育における位置づけを明らかにする．

3.2 では，重心指導について教科書をもとに分析し，重心指導の問題点を考察する．

3.3 では，重心指導の問題点について先行研究をもとに考察する．

3.4 では，本研究の課題について，第 2 章と第 3 章から明らかになったことを基に示していく．

3.1　学習指導要領の変遷

本研究を始めるにあたって，重心の指導が日本の数学教育の中でどのように扱われてきたのかについて，学習指導要領をもとに分析する．以下の表は昭和 22 年，昭和 33 年，昭和 44 年，昭和 52 年，平成元年，平成 10 年，平成 20 年に告示（あるいは施行）された中学校学習指導要領 数学科の中で重心に関係がある目標や内容についてまとめたものである．

年度	学年	目標	内容
昭和２２年	第７学年	六、単一機械の機能を明らかにし，これを用いること。 ・単一機械のはたらきを調べて，その理解を深め，日常生活に用いることを指導すること。また，力の初歩的観念を得させること。	１．力とはどんなものか，また，それはどんなにして測るかについて話し合う。 ２．てこによって，どれ位大きな力を出すことができるかを調べる。 ３．滑車や輪軸によって，どれ位大きな力を出すことができるかを調べる。 ４．力の能率，回転能の意味について話し合う。 ５．仕事の意味について話し合う。 ６．回転能と仕事との関係について話し合う。

	第8学年	六、力や重心の基本的な法則を理解し，これを用いること。 ・重心の位置とその意味，力の合成・分解の仕方を明らかにして，これを用いて物の坐りやいろいろな機械のはたらきを明らかにし，生活を合理化すること。	1．斜面やねじのはたらきについて話し合う。 2．構造物などで，力がどんなに働いているかを調べる。 3．重心の意味とその位置について話し合う。 4．物の坐りの安定度について話し合う。
昭和26年	記述なし		
昭和33年	第2学年	（4） 合同，相似などの図形の性質を活用して，直接測定が困難なものの測定をくふうしたり，能率のよい測定方法を考えたりする能力を伸ばす。 （5） 合同や相似の概念を明らかにし，それらに基いて図形の基本的な性質を明確にする。また，図形に対する直観的な見方や考え方をさらに伸ばすとともに，論証の意義や方法について理解させ，論理的に筋道を立てて考える能力を養う。	**E 図形** （4） 次のような図形の基本的な性質を明らかにし，これを用いることができるようにする。 ア 三角形の基本的な性質。(直角三角形と二等辺三角形の中線についての性質や一般の三角形について内心，外心および重心が存在することなど。) イ 平行線に関する線分の比例についての性質およびこれらの平行平面への拡張。 ウ 平行四辺形の基本的な性質およびこれから類推される平行六面体の性質。

昭和44年	第2学年	（3） 図形を変換の考えで考察することができるようにするとともに，相似の概念を理解させて図形の性質を明らかにする。	C 図形 （1） 変換の考えを用いて，図形の性質を考察することができるようにする。 （2） 三角形の相似条件を明らかにし，合同条件や相似条件を用いて，図形の性質の理解を深める。 （3） 縮図や立体図形の相似を通して，相似についての理解を深める。 （4） 次の用語および記号を用いることができるようにする。 相似，∽，内分，外分，相似比，相似の位置，相似の中心，中線，外心，内心，重心
昭和52年	第2学年	（3）基本的な平面図形の性質についての理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解させ，論理的に表現する能力を養う。	C 図形 （1）平面図形の性質を見いだし，これを平行線の性質や三角形の合同条件をもとにして確かめることができるようにする。 （2）図形の相似の概念を明らかにするとともに，三角形の合同条件や相似条件をもとにして，図形の性質を考察する能力を伸ばす。

平成元年	第２学年	(２)基本的な平面図形の性質についての理解を深めるとともに、図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し、推論の過程を的確に表現する能力を養う。	**B　図形** (１)平行線の性質や三角形の合同条件をもとにして、平面図形の性質を見いだし、それを確かめることができるようにする。 (２)図形の相似の概念を明らかにするとともに、三角形の合同条件や相似条件を基にして、図形の性質を見いだし、それを確かめる能力を伸ばす。
平成１０年	記述なし		
平成２０年	記述なし		

平成１０年，平成２０年度では、中学校数学では重心を扱わず，高等学校の数学Ａで以下のように扱われている．

年度	科目	目標	内容
平成１０年	数学Ａ	平面図形，集合と論理及び場合の数と確率について理解させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する能力を育てるとともに，数学的な見方や考え方のよさ認識できるようにする。	(１)　平面図形 三角形や円などの基本的な図形の性質についての理解を深め，図形の見方を豊かにするとともに，図形の性質を論理的に考察し処理できるようにする。

平成21年	数学A	場合の数と確率、整数の性質又は図形の性質について理解させ、基礎的な知識の修得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察する能力を養い，数学のよさを認識できるようにするとともに，それらを活用する態度を育てる。	(3)図形の性質 平面図形や空間付祈性質についての理解を深め，それらを自称の考察に活用できるようにする。 ア　平面図形 (ア)三角形の性質 三角形に関する基本的な性質について,それらが成り立つことを証明すること。

【考察】

表から分かるように昭和 22 年の学習指導要領（試案）では，第7学年において, てこについて学んだ後に重心を学んでいる．同年の学習指導要領 理科編では，道具や機械についての内容は第 9 学年であるものの，てこや重心については扱っていないようである．しかしながら，昭和 26 年では，数学において，てこや重心について扱われることはなく，昭和 33 年から再び扱われるようになったものの，それはてこや力についてから学んだ後に扱われる内容としての位置づけではなく，外心や内心と同様に存在する性質の 1 つとして扱われている．また，それは現在までも変更されていない.

また，昭和 26 年以降では中学校又は高等学校の理科において重心が扱われているため，参考資料にまとめておく.

それでは，理科教育と数学教育で重心を扱うことにどのような違いが考えられるだろうか.

理科教育の小・中・高等学校の物理科目の目標に共通することは，「観察，実験」を行なうことで科学的，物理的な態度や能力を育てるということである．この観察については，帰納としての科学として，図 6 のようなモデルがある．Derek（1998）はこのモデルのように，観察や実験は以下の 3 つの条件を満た

すことで，帰納的推論をもとに妥当な普遍化ができると述べている．

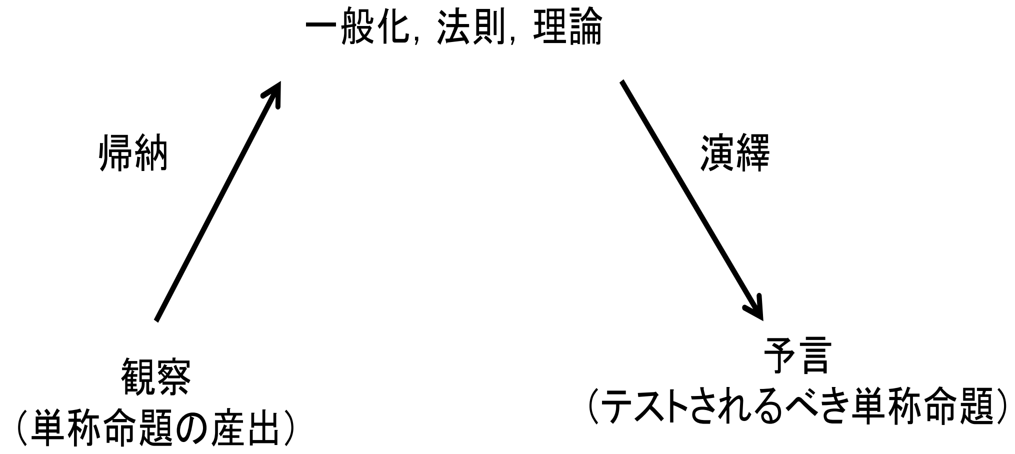


図 6　帰納としての科学

1）観察言明の数は十分に多くなくてはならない。
2）観察は広範な諸条件下で繰り返されなくてはならない。
3）どんな受容される観察言明もそれに基づく普遍化や普遍的法則と無矛盾でなくてはならない。

このように理科教育では十分な観察や実験を行い，帰納的に一般化を行うことが主な活動とされる．当然ながら，仮説演繹的モデルという直観や推測からある仮説を導出し，それを基にある結論が出され，その内部一貫性を観察や実験によってテストを行うという演繹的な考えから始めるモデルもあるが，現在でも帰納的な考え方を主な活動とされている．

算数・数学教育においては，三角形の内角の和のように，最初は多くのデータをもとに帰納的に考えていくが，そのような考え方から得られた結論は必ずしも正しくないことから，最終的には演繹的に考えることが求められる．そして，徐々に具体的な数値を考えなくとも演繹的に説明できるように高めていくことが求められる．また，演繹的な推論から得られた結論は，

体系的にまとめられていくことにもつながる．

私は，数学教育としてこの重心という内容を扱うのであれば，数学教育らしく，演繹的に扱われるべきであると考える．ある操作によって線を引いてみたらそれが重心であった，というような扱われ方や，三角形の重心についてのみ扱い，他の図形についての重心を扱わないのは，全く数学教育的ではないのではないだろうか．したがって，私は昭和 26 年の試案のようにてこの規則性や重心の意味について考えさせることが必要だと考える．

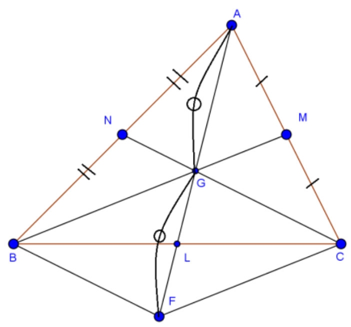
3.2　教科書分析

以下の表は，現行の高等学校数学 A の教科書の中から数研出版，啓林館，東京書籍が出版している教科書の 3 種類を重心についてどのように扱われているかをまとめたものである．

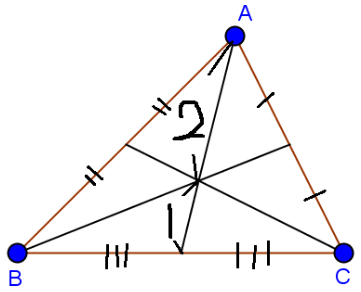
また，小学校の理科の教科書におけるてこの規則生の扱われ方について啓林館の教科書で，高等学校物理 I での重心について啓林館と東京書籍の教科書での扱われ方について参考資料にまとめておく．

啓林館

数学 A

文面	図
『三角形の重心，外心，内心』 〈重心〉 「**三角形の頂点とその大変の中点を結ぶ線分を<u>中線</u>**という.」 定理 「三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり, 各中線はその交点でそれぞれ 2 : 1 に内分される.」	

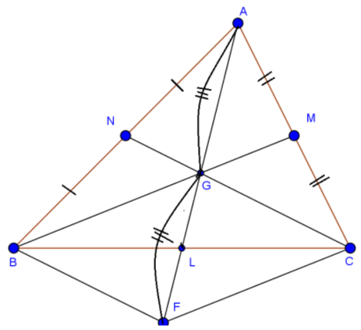
<table>
<tr>
<td>定理の証明
　△ABC の 2 本の中線 BM，CN の交点を G とする．線分 AG の延長上に AG＝GH となるように点 H をとる．
　△ABH において，AN＝NB，AG＝GH
なので，中点連結定理により，NG // BH
　よって，GC // BH
　同様に，BG // HC
　したがって，四角形 BHCG は平行四辺形である．
　平行四辺形の対角線は互いに他を 2 等分するから，特選 AG は辺 BC の中点 L を通り，線分 AL は中線である．
　よって，3 本の抽選は 1 点 G で交わる．
　また，Ag＝GH＝2GL だから，
AG：GL＝2：1
同様に，他の中線 BM，CN も点 G で
2：1 に内分される．

三角形の 3 本の中線の交点 G を, 三角形の　<u>重心</u>　という．</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

新編　数学 A

文面	図
〈三角形の重心〉 　三角形の頂点と，その対辺の中点を結ぶ線分を，この三角形の中線という．三角形の**中線**について，次のことがいえる． 定理 「三角形の 3 つの中線は 1 点で交わる．」	

考え方　2つの頂点からの中線の交点と，残りの頂点を通る直線が，対辺の中点を通ることいえばよい．



定理の証明

　△ABCの2つの中線BMとCNの交点をG，直線AGと辺BCの交点をLとする．

　線分AGのGからの延長上にAG＝GFとなる点Fをとると, Gは線分AFの中点だから, △ABF, △AFCにおいて中点連結定理より，NG // BF，MG // CF

　よって，四角形BFCGは平行四辺形である．

　平行四辺形の対角線は互いに他を2等分するから，BL＝LC

　したがって，ALは中線であるから，3つの中線は1点Gで交わる．

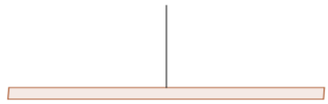
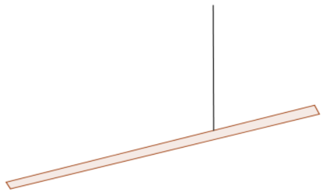
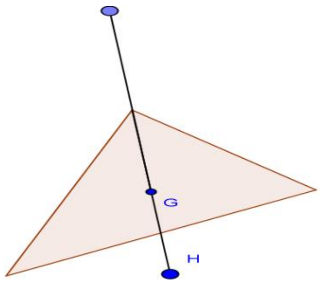
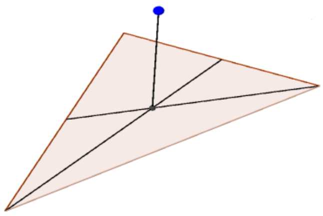
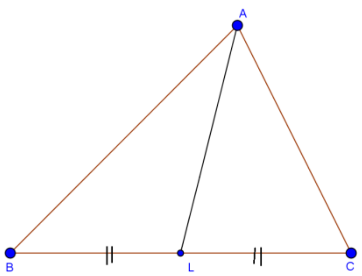
　三角形の3つの中線の交点を，この三角形の**重心**という．

　定理1の証明で，GL＝LFもいえる．よって，AG＝2GLである．

このとき，重心GはALを2：1に分けるという．

○三角形の重心

△ABCの重心をGとすると，Gは3つの中線それぞれ2：1に分ける．

文面	図
〈三角形の重心〉 教師：円形の板を糸でつるして，板が水平になるようにつり合わせるには，糸はどこにつければいいと思いますか。 生徒：やっぱり円の中心でしょう。 教師：そうですね。それでは三角形の板を同じようにつり合わせるには，糸はどこにつければいいでしょうか。 生徒：今度はむずかしいですね。なかなかつり合いません。 教師：では，つり合う点をさがしてみましょう。 右の図のように，△ABC の頂点 A のところに糸をつけてつるしてみてください。 一般に，下にのびた糸は辺 BC の中点を結んだ線と，点 B と AC の中点を結んだ線を引き，その 2 つの線の交点に糸をつけてつるしてみましょう。	○水平につり合う  ×水平でない   
三角形の頂点と，その向かい合う辺の中点を結ぶ線分を，この三角形の中線といいます。 教師：（前略）つまり，三角形の 3 つの中線は 1 点で交わってしまいます。このことを証明しましょう。	

証明　△ABC の 2 つの抽選を AL，BM とし，その交点を G とする。L，M は辺 BC，AC の中点だから，中点連結定理より，　ML // AB，ML＝1/2AB

したがって，△ABG ∽ △LMG だから，

AG : GL＝AB : ML＝2 : 1

次に，2 つの中線 AL，CN の交点を H とすると同じようにして，

AH : HL＝AC : NL＝2 : 1

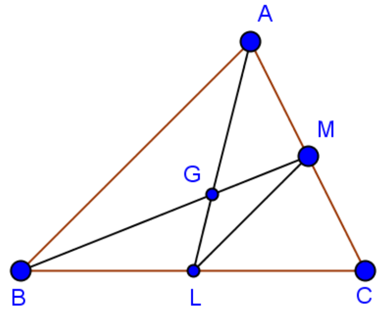
よって，G と H はともに AL を 2 : 1 に分ける点で一致する。

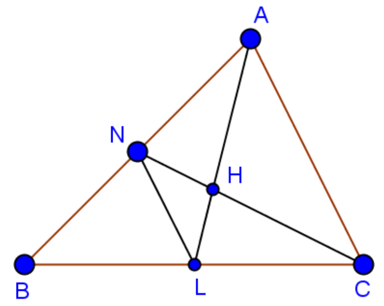
三角形の重心

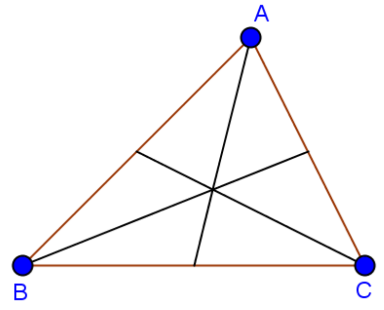
三角形の 3 つの中線は，1 点で交わる。

この点は，3 つの中線を，それぞれ 2 : 1 に分ける。

三角形の 3 つの中線の交点を，この三角形の重心といいます。

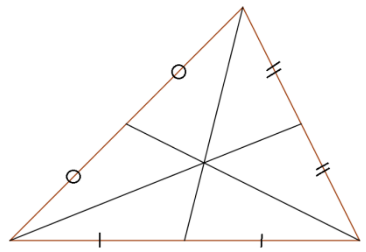
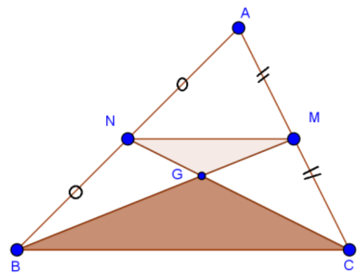
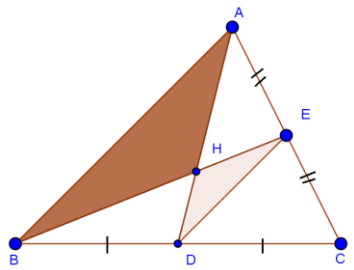




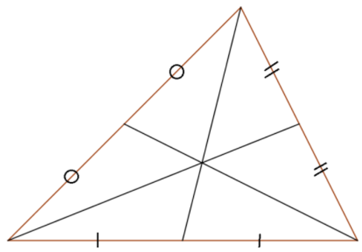
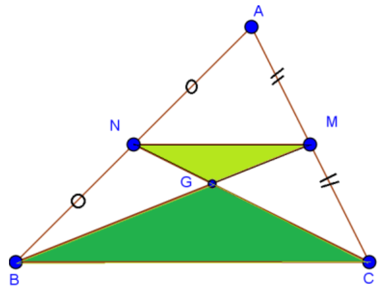
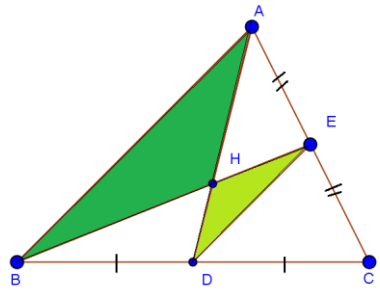


東京書籍

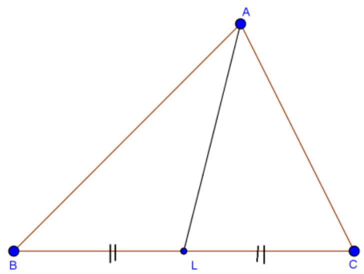
数学 A

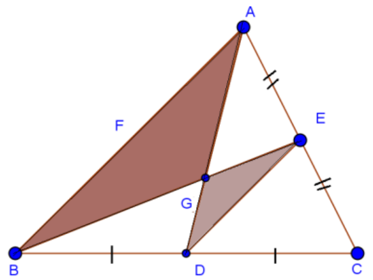
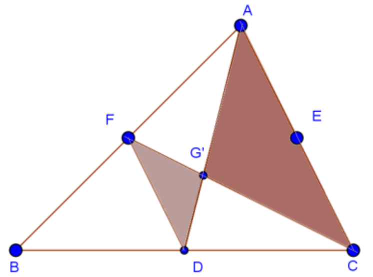
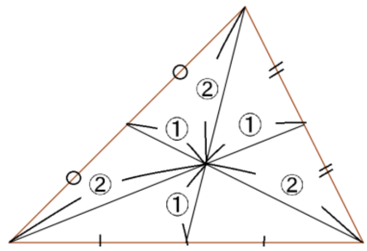
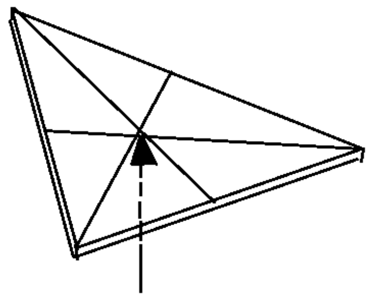
文面	図
『三角形の重心・外心・垂心・内心』 〈三角形の重心〉 　三角形の頂点と大変の中点を結んだ線分を中線という。 定理 　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。その交点は，それぞれの中線を 2 : 1 に内分する。	
証明 　△ABC において，2 本の中線 BE と CF の交点を G とする。E，F はそれぞれ辺 AC，AB の中点であるから　EF // BC　かつ　BC＝2EF よって　BG : GE＝CG : GF＝2 : 1 一方，2 本の中線 BE と AD の交点を H とすると，同様に　DE // AB　かつ　AB＝2DE であるから　BH : HE＝AH : HD＝2 : 1 よって，G と H は，中線 BE を同じ比に内分するから一致する。 すなわち，3 本の中線は 1 点 G で交わり，G はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分する。 三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の重心という。	 

新編　数学 A

文面	図
『三角形の重心・外心・内心』 〈三角形の重心〉 三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を中線という。 三角形の重心 定理　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。その交点は、それぞれの中線を 2 : 1 に内分する。	
証明　△ABC において，2 本の中線 BE と CF の好転を G とする。E，F はそれぞれ辺 AC，AB の中点であるから，中点連結定理により 　EF // BC,　　BC : EF＝2 : 1 よって　BG : GE＝CG : GF＝2 : 1 一方，2 本の中線 BE と AD の交点を H とすると， 同様に，　DE // AB,　　AB : DE＝2 : 1 であるから　BH : HE＝AH : HD＝2 : 1 よって，G と H は中線 BE を同じ比に内分するから，一致する。すなわち，3 本の中線は 1 点 G で交わり，G はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分する。	 

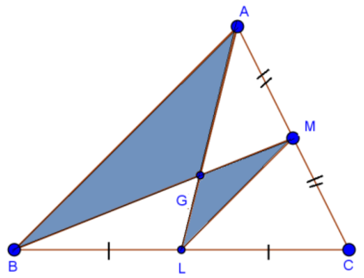
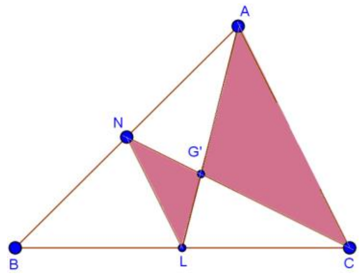
新数学 A

文面	図
『三角形の重心・外心・内心』 〈三角形の重心〉 三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を中線という。	

△ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とする。D，E が BC，CA の中点であるから，中点連結定理により　　ED // AB，　ED＝1/2AB 中線 AD, BE の交点を G とすると，△AGB∽△DGE より　　AG : DG＝BG : EG＝2 : 1 同様にして，AD，CF の交点を G’とすると 　AG’: DG’＝CG’: FG’＝2 : 1 よって，G と G’はともに線分 AD を 2 : 1 に分ける点であるから，同じ点である。 　また，AG : DG＝BG : EG＝CG : FG＝2 : 1 である。 　したがって，三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その交点は中線を 2 : 1 に分ける。	 
三角形の重心 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その交点は中線を 2 : 1 に分ける。 　三角形の板を 1 点で支えることは難しいが, 重心で支えると，そのときつり合いがとれる。	 

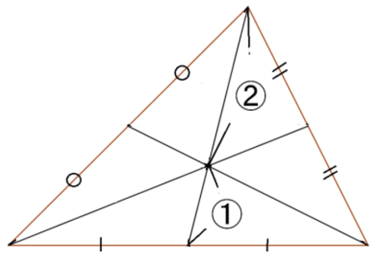
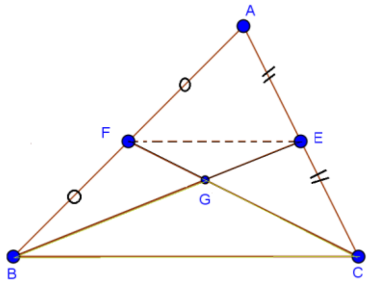
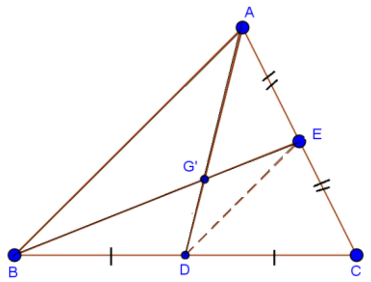
数研出版

数学 A

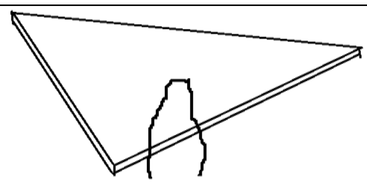
文面	図
〈重心〉 三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を中線という。 三角形の中線 定理　三角形の 3 つの中線は 1 点で交わり，その点は各中線を 2；1 に内分する。	
証明　△ABC において，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とする。 L，M は，それぞれ辺 BC，CA の中点であるから 　ML // AB，　2ML＝AB よって，中線 AL と BM の交点を G’とすると，上と同様に考えて 　AG’：G’L＝AC：NL＝2：1 ゆえに，G と G’はともに線分 AL を 2：1 に内分する点であるから，この 2 点は一致する。 したがって，3 つの中線は 1 点 G で交わり， AG：GL＝2：1 である。 同様に，BG：GM＝CG：GN＝2：1 であるから，G は各中線を 2：1 に内分する。	 

新編　数学 A

文面	図
『三角形の外心・内心・重心』 〈三角形の重心〉 　三角形の頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分を，	

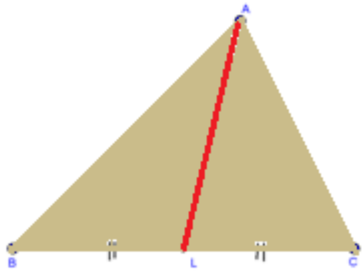
三角形の中線という。三角形の中線には，次のような性質がある。 □三角形の中線 定理　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その点は各中線を 2：1 に内分する。 三角形の 3 本の中線が交わる点を，三角形の重心という。	
証明　△ABC の中線 BE と中線 CF の交点を G とし，中線 AD と中線 BE の交点 G’とする。 このとき，まず 2 点 G，G’が一致することを示す。 中点連結定理により 　FE // BC，BC：FE＝2：1　となるから 　BG：GE，BC：FE＝2：1　よって， 点 G は線分 BE を 2：1 に内分する。 同様にして　BG’：G’E＝AB：ED＝2：1　よって 点 G’は線分 BE を 2：1 に内分する。 線分 BE を 2:1 に内分する点は 1 点だけであるから， 2 点 G，G’は一致する。 したがって，3 つの中線は点 G で交わる。 また，AG：GD＝BG：GE＝CG：GF＝2：1 であるから，3 つの中線の交点は各中線を 2：1 に内分する。	

高校の数学 A

文面	図
厚紙でつくった三角形を 1 本の指でささえるとき，つりあいのとれる点が 1 つだけ見つかります。この点の性質を調べます。	

三角形の頂点とそれに向かいあう辺の中点とを結ぶ線分を，三角形の中線といいます。

□練習　△ABC の辺 CA の中点を M，辺 AB の中点を N とする。中線 BM と中線 CN を下の図に書きなさい。



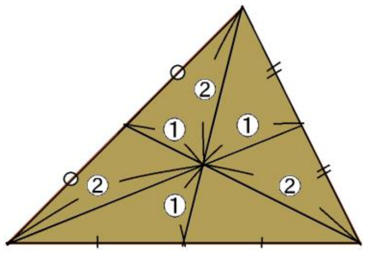
三角形の 3 つの中線は 1 点で交わります。

この点を，三角形の重心といいます。

性質　三角形の重心

①三角形の 3 つの中線は 1 点で交わる。

②その点は，各中線を 2 : 1 に分ける。



証明　△ABC の中線 AL と中線 BM の交点を G とし，中線 AL と中線 CN の交点 H とする。

[1]　CM : MA＝CL : LB　であるから，「平行線と線分の比」の関係より　AB // ML

このとき，図において，∠x＝∠z，∠y＝∠w であるから　△ABG∽△LMG

また，AB : ML＝CA : CM＝2 : 1 であるから

AG : GL＝2 : 1，　BG : GM＝2 : 1

[2]　[1]と同様に考えると

△ACH∽△LNH　AC : NL＝2 : 1

よって AH : HL＝2 : 1，　CH : HN＝2 : 1

G，H がともに線分 AL を 2 : 1 に分ける点であるから，G と H は一致する。よって，①が成り立つ。

また AG : GL＝BG : GM＝CG : GN＝2 : 1 であるから，②も成り立つ。

【考察】

証明の方法には大別して 2 通りあり，啓林館の「数学 A」,「新編 数学 A」では平行四辺形の性質をもとに重心の位置を示しており，他の教科書では中線の交点を 2 通りに表し，その交点が一致するという証明を示している．

高等学校の数学 A における重心の扱いは,啓林館の「Ole！ 数学シリーズ　数学 A」のみ，他の図形の平板における重心について考えたり，つり合いとは何かについて考えたりしているが,他の教科書では．扱われていない．加えて，啓林館の「Ole！ 数学シリーズ　数学 A」，東京書籍の「新数学 A」では三角形の平板は中線の交点でつり合うというように示されており，数研出版の「高校の数学 A」では，三角形の平板がどの位置でつり合うのかを問いとして示している．また，啓林館の「Ole！ 数学シリーズ　数学 A」においても，重心が中線の交点にあることは示されているが，なぜ中線の交点なのか，なぜ，中線を考えるのかについては示されていない．上記の 3 種類の教科書以外では，中線の交点が重心であるということのみしか述べられていない．

重心に関するこのような扱い方は，重心とはどのようなものかについて扱っているのではなく，重心の性質を用いて何かを求めるようなことに重きを置いているようである．しかしながら，重心とは何かについて扱われなければ，前述したように全く数学教育的でない．何かから演繹されたり，三角形の重心から一般的もしくは発展的に考えたりされるべきだが，教科書の紙面上において，三角形の重心を扱った後に挙げられている問題の多くは，他の心との位置関係を考えるような問題である．

3.3　重心指導に関する先行研究の分析

先行研究として，飯島（1988）「算数・数学の指導に取り入れる実験の意義」と村上（1989）「数学教育における重心指導の問題点とそのあり方について」を分析する．

〇飯島の先行研究について

研究の目的は，日常の事象に数学が役立っているという認識をまず持たせることが大切と考え，それを明らかにするために物理学的現象をよく理解すること，そのために実験を行うことが教育的にどのような意義があるのかについて考察することである．

その結果の分析として，大学生の L 字の厚紙の重心の位置に関する正答率が 13%と低かったこと，その原因として三角形の重心を通る直線が，その三角形の面積 2 等分しているという性質が，一般の図形についても言えるかのように考えてしまっていることが挙げられている．また，一般の四角形の重心を実験的に求めるために，三角形の頂点からの鉛直線（錘をつけた糸）の交点が重心であることから，四角形でも同様に鉛直線の交点として重心が求められることも示している．

以上のようにして，実験を行うことで，誤った一般化を正していき，適切な一般化を実験から考えるということをしている．

〇村上の先行研究について

村上は，自身が行った指導案について反省的に問題点を挙げているが，その中でも重心を扱う上での教具のまずさについて指摘している．それは，M.B.Balk の 3 通りの解釈のモデルを以下のように示したうえで，三角形の重心と三角形の周の重心のモデルは一致しないため，三角形の周のモデルではなく三角形の頂点のモデルを教具として扱わなければならないとしている．

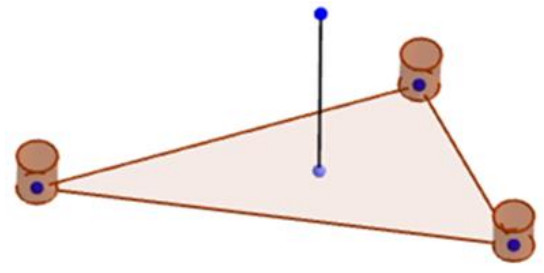
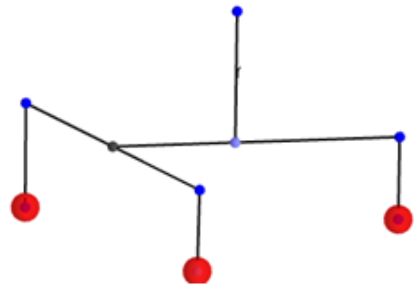
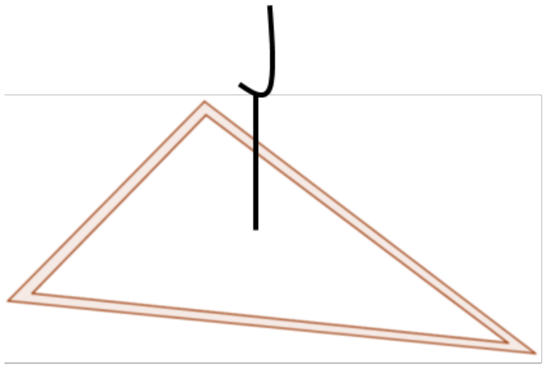
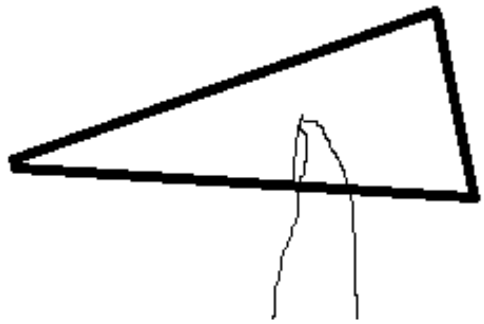
三角形の頂点の重心のモデル①	三角形の頂点の重心のモデル②
	
三角形の周の重心のモデル	三角形の面積の重心のモデル
	

表 1　村上による M.B.Balk の三角形の重心の 3 通りの解釈のモデル

これらのモデルのうち，三角形の頂点のモデルが面積の重心のモデルよりも幾何学的重心に対応していると述べている．また，周の重心や面積の重心は物理学的重心に対応しているとも述べている．

また，村上は重心指導のあり方について，「数学は日常の現象を理解し，日常の問題を解決するのに数学が役立っているという認識をまずもたせることが大切ではないか．そのためには，算数・数学の題材とされる物理的現象をよく理解することも重要なことである.」（飯島，1988，p3）という意見を認めた上で，重心の理解の難しさを考慮し，「少なくとも三角形の重心を教える場合でも，頂点，周，面積の重心の違いを明らかにしたうえで，いま教えている重心はどれかを明示して指導すべきだと考える」（村上，1989，p361）と述べている．

3.4　本研究の課題について

第 2 章，第 3 章で重心について，さらに重心の指導がどのように行われているかについて見てきた．その中で見えたこととして教科書で扱われていた重心のモデルは, 3.3 で示したように物理学的重心のモデルをもとに指導が行われていることが挙げられる．したがって教科書の紙面上に，数学教育において扱いたい幾何学的重心ではなく，物理学的重心を掲載している現状がある．これによって学習者が物理学的重心と幾何学的重心を混同して理解する恐れがある．それによって，例えば四角形の重心を求めるときに，幾何学的重心を求めるために物理学的重心を用いる方法をから求めることが想定される．しかしながら，平行四辺形を除くすべての四角形では，物理学的重心と幾何学的重心の位置は異なっている．その証明は，以下のとおりである．

図 7 のように, 四角形 ABCD を対角線 AC, BD で分けた△ABC, ACD，ABD，BCD の重心を G1，G2，G3，G4 とする．また，対角線 AC，BD の中点を E，F とする．

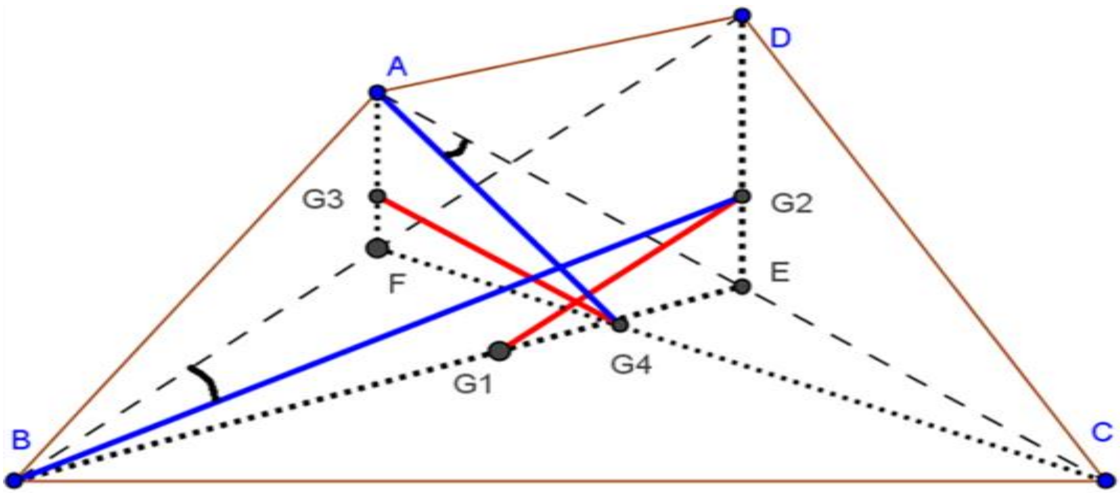


図 7　∠G2BD，∠G4AC＞0　のとき

[1．∠G2 BD，∠G4 AC＞0（対角線上にどの分け方をした三角形の重心もない）のとき]⇒図 7

頂点の重心は，線分 G4 A，G2 B を 1：3 で分ける点であり，線分 G4 A と G2 B の交点でもある．また，面の重心は，線分 G1 G2，G3 G4 上のどこかである．しかし，線分 G2 B と線分 G1 G2 の交点は点 G2 しかなく，線分 G4A と線分 G3 G4 の交点は点 G4 しかない．これらの点は明らかに四角形 ABCD の重心ではない．よって，[1]のとき四角形の頂点の重心と面の重心は一致しない．

[2．∠G2 BD＝0，∠G4 AC＞0 もしくは∠G2 BD＞0，∠G4 AC＝0 の一方が成り立つ（どちらかの対角線上に三角形の重心がある）とき]⇒図 8

頂点の重心は，線分 G2 B，線分 G4 A 上にある．面の重心は線分 G1 G2 と線分 G3 G4 上にある．∠G2 BD＝0 のとき，点 E が BD 上にあり，線分 G1 G2 と G2 B は重なるが，線分 G3 G4 と G4 A の交点は G4 しかなく，四角形の重心は一つに定まらない．∠G4 AC＝0 のとき，F 点が AC 上にあり線分 G3 G4 と G4 A は重なるが，線分 G1 G2 と G2 B の交点は G2 しかなく，四角形の重心は一つに定まらない．よって[2]のとき四角形の頂点の重心と面の重心は一つに定まらない．

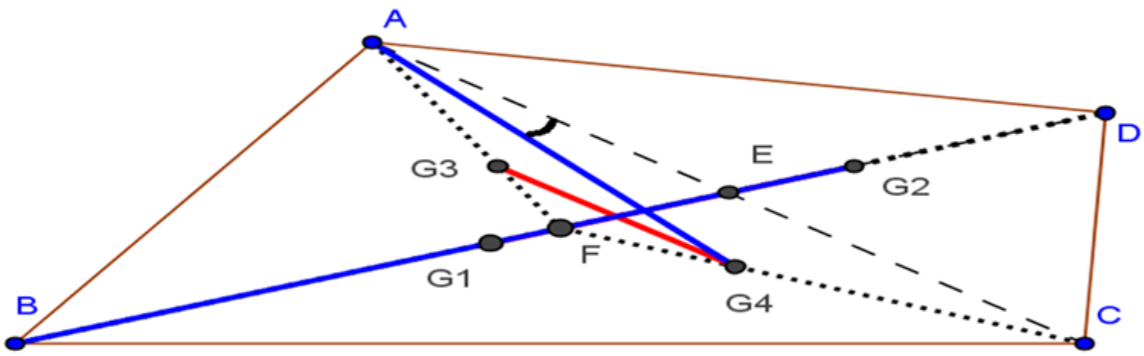


図 8　∠G2 BD＝0，∠G4 AC＞0 もしくは∠G2 BD＞0，∠G4 AC＝0 の一方が成り立つとき

[3．∠G2 BD＝∠G4 AC＝0（どちらの対角線上にも三角形の重心がある）のとき]⇒図 9

このとき，点 E，F は BD，AC 上にあるため点 E と点 F が一致する．AE＝CE＝BF＝DF となり，∠AEB＝∠CED，∠BEC＝∠DEA より△AEB≡△CED, △BEC≡△DEA. したがって，四角形は平行四辺形である．

頂点の重心は対角線の中点を結んだ線分の中点であるため，点 E に位置する．面の重心は線分 G1 G2 と線分 G3 G4 上にあるため，点 E に位置する．よって[3]のとき，つまり平行四辺形の頂点の重心と面の重心は一致する．

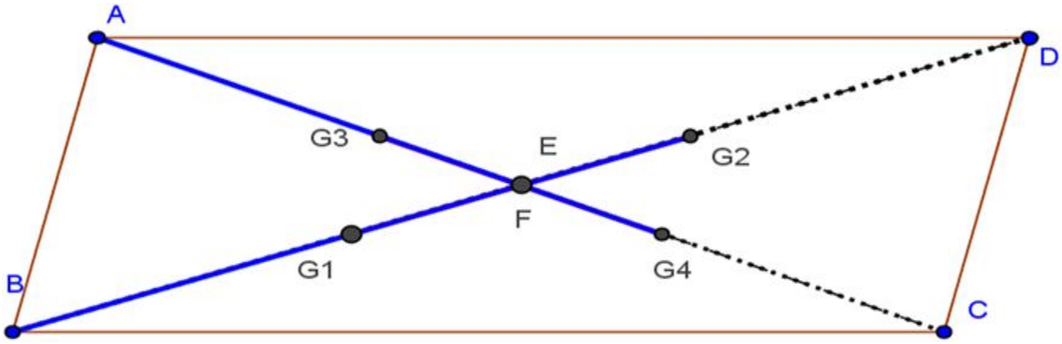


図 9　∠G2 BD＝∠G4 AC＝0 のとき

[1]，[2]，[3]より，四角形の頂点の重心と面の重心は，四角形が平行四辺形のときのみ一致する．[証明終了]

したがって，幾何学的重心と物理学的重心の両方について体系的に指導する必要があると考えられる．

以上のことから，本研究の課題として，以下の 3 つを提示する．

①重心に関する体系を Archimedes と M.B.Balk をもとに，すべてが演繹的に証明されているような体系を設定する．

②新たに作られた重心に関する体系が学習者に指導されたとき，どのように概念が形成されていくのか.

③新たに作られた重心に関する体系をもとに指導するときと以前までの指導と比べてどのような差が考えられるのか.

①については第 4 章で扱い，第 5 章において，概念定義と概念イメージをもとに新たに作られた重心に関する体系をもとにした指導について考察していく.

第 3 章の要約

重心指導について明らかになったこと．

・昭和 22 年の試案の段階では，てこの規則性や重心について数学教育で行われる予定だったが，以降は数学教育から除かれた後，昭和 33 年以降から外心や内心とともに再び扱われ，三角形の性質の一部として位置づけられたこと．

・現状の指導は，演繹的に重心を求めるものではなく，ある操作を行った結果，m 得られた点が重心であるというような扱いであること．

・三角形の重心についてのみ指導した場合，誤った一般化をする可能性が高いこと．

・適切な理解とそれに伴う意図を持った実験を行わなければ，誤った重心に関する理解を促してしまうこと．

本研究の課題として以下の 3 つを設定する．

①重心に関する体系を Archimedes と M.B.Balk をもとに，すべてが演繹的に証明されているような体系を設定する．

②新たに作られた重心に関する体系が学習者に指導されたとき，どのように概念が形成されていくのか．

③新たに作られた重心に関する体系をもとに指導するときと以前までの指導と比べてどのような差が考えられるのか．

第 4 章
重心の新たな体系の設定

本章では，　重心に関する新たな体系について設定する．

4.1 では, 体系化をする意義･目的について杉山（1986）の「公理的方法に基づく算数・数学の学習指導」をもとにまとめる．

4.2 では，Archimedes と M.B.Balk の重心に関する体系をもとに，重心に関する新たな体系について設定する．

4.1　体系化する目的について

3 章で確認したように，現在の重心指導は全く演繹的でなく，「作図した結果、重心だった」というように，なぜそれが重心ということができるのかについては全く指導されていない．そこで，演繹的に根拠を持って説明すること，つまり数学教育における証明の必要性や体系化する意義とはどのように主張されるかについて考察する．

体系化の必要性について，杉山（1986）の「公理的方法に基づく算数・数学の学習指導」では以下のように述べられている．

> 英語には，証明，あるいは，論証を意味する言葉として，proof と demonstration がある。いろいろな論文の中で，これらが必ずしも厳密に区別されて使われているわけではないが，この二つの言葉は，証明に二つの意味があることを示している。一方の demonstration は,「表示する」という意味に根ざしており，真なることを「外へ向けて示す」ことを意味している。それに対して proof は,「調べる」という意味から出ている。proof と語源を同じくする言葉として probe という言葉があるが，これは「探り針で探る」という意味を持っている。demonstration が「外へ」示すことを意味するなら，proof は「内へ」探りを入れていくという意味にとることができる。（中略）さらに，証明にも，公理的方法にも，内へ探りを入れていくという考え方があり得ることを大切にしたい。この立場に立ったときの証明が proof と考えられる。つまり，ある判断があるとき，その真なることを確かめるだけに止どまらず，その真なることを保証する要素についてのあらゆる判断を分析し続けていこうとすれば，そこには体系を作る必要も生まれてくるはずである。このようにして得られた体系内での証明は，真な

ることを外へ主張するときにも大きな力を持っている。（杉山,1986,p.127）

上記のように，体系を作る目的のひとつとして，ある事柄が真であることを保証するための要素を明らかにするために体系を作る，というものが考えられる．

重心指導について考えてみると 3.2　教科書分析でも確認したように,「なぜ中線の交点が重心であるということができるのか」ということや，M.B.Balk の体系において,「線分の重心はその線分の中点に位置する」や「長方形の平板の重心は，対角線の交点に位置する」などを定義としているがなぜそれが真であるかについては述べられていない．これらのことを明らかにするために体系を作る必要があるということである．

また，体系を作る２つめの目的として杉山（1986）は以下のように述べている．

その分析の結果得られた要素の間の関係を調べることによって，体系を作ることの動機，あるいは，体系のよさに対する理解が与えられる。なぜなら，それらを適切に配列することによって，いちいち公理に戻らなくてもすむようになり，思考の経済がはかれるからである。（中略）このように考えることによって，公理，定義，定理の意義がよく理解されると考えられる。（杉山,1986,p.128）

したがって，目的のひとつめで述べられているように，ある事柄 A が真であることが一度でも保証されさえすれば，次にその事柄を利用してある事柄 B が真であることを証明するときには事柄 A が真であることを述べなくてもよいということである．

現在の重心指導においては，重心であるということ自体が演繹的に証明されていないため現在の指導ではこの目的は考えら

れていない．Archimedes の体系で分析したように，それぞれの命題間の関係を明らかにすることによって，どのようにそれは真であるとされるのかということや，なぜその命題を考える必要があったのかということを振り返って考えることも重要であると考えられる．

また，礒田（1987）は，体系を作ることを「体系化」とし，上記の杉山の目的を考察した上で，図形指導の観点に体系化を加える意義について以下の４つを挙げている．

ア．論証と実測をもとにした説明との違いは，誰もが真と認める根拠をもとにした演繹的な推論をすすめる説明の仕方の違いであり，知識を体系的に位置付けるかどうかの違いである．体系化の意味で論証を理解することが論証の意義の理解に必要である．

イ．すでに真であると認めたことを前提に結論を導くという演繹的推論の仕組みを，演繹的な体系を作るという高次の観点から理解することができる．たとえば，未知の事実を既知のものとして扱ったり，結論を証明の中で使ってしまう循環論法なども演繹的な体系を作るという観点からは誤りであることが指摘できる．

ウ．証明に必要な基本的性質や定義を，体系の中で位置付け，系列化することにより，容易に利用することができる．たとえば定義とある性質が同値であることがわかっていれば，その図形の証明をするときにその性質を定義と同様に使うことができる．それは，必要十分条件の利用の学習でもある．

エ．体系化という本質的で必須の数学的活動を知ることにより数学的思考に関する高次の理解が得られる．この理解は論証の意義の理解と併わせて，中３から高等学校へのよ

り抽象的な数学の学習に対する見方を養うと考えられる．
（礒田,1987,p.323）

アは，論証の必要性に対する意義，イ，ウは，上記の杉山の目的と同様の内容である．特にウではその言葉自体は扱わないが，証明の「定理の逆」などで現在も扱われている内容や高等学校へのつながりについても述べている．またエでは，体系化を「本質的で必須な数学的活動」とし，幾何領域以外の論証においても同様に重要な活動であるとしている．

以上のように，数学教育において体系化は行われるべき活動であるが，杉山（1986）は従来の論証指導には演繹的な体系を作っていくという証明の求めている役割がみられないことを指摘している．また，現在までの重心指導においても体系化は行われていないが，Archimedes や M.B.Balk によって重心の体系は作られている．したがって，学問としての数学における重心の体系化が必要であると考えられる．

4.2　重心に関する新たな体系

2.3 章で分析したように Archimdes の体系も M.B.Balk の体系も物理学的な考え方を用いており，2 つとも体系の中に，「てこの規則性」を含み，それをもとにして様々な図形における重心についてまとめている．しかしながら，それぞれの結論が異なっており，完全な公理系を考えられているわけではない．

本節では，課題にも挙げたように Archimedes と M.B.Balk の体系をもとに新たな体系を作る．

体系を作る前に，２つの体系を相互に補完するために Archimedes の命題間の証明で使われている言葉と M.B.Balk の使っている言葉を比較する．

まず，Archimedes の各要請について分析する．要請とは，論証はできないが，認識・理論の成立の前提として必要とするものである．Archimedes はこの要請を根拠として命題を証明している．

第一に，要請 1，2，3 での「重さ」について，M.B.Balk は「質量」として扱っている．M.B.Balk は，科学的に確かな言葉を用いるために「質量」と記述しており，本質的には同じ意味で扱っているといえる．

第二に，要請２の「もし一方の重さに<u>ある重さが付け加えられる</u>ならば」や，命題３の「一方の重さから，<u>ある重さが取り去られる</u>と」のように，重さを変化させることについて M.B.Balk は「合成」として扱っている．また，M.B.Balk は扱っていないが，物理学には合成の逆に分解という考え方もあるため，要請 2，3 については M.B.Balk の体系でも同様に扱うことができる．

次に Archimedes の各命題について分析する．Archimedes の命題 6「共測な２量は，それらの重さの比を逆にした距離において，互いにつり合う」（てこの規則性）では，下図のように示し

ながら，証明を進めている．この図 10 で表している長方形はあくまでも量を視覚化したものであり，その量がある線分上の点にかかっているということを示しているだけなので，「量」とは M.B.Balk のいう平板の重心のみ示しているわけではない．量は質点の大きさとも，線分の大きさとも，平板の大きさとも解釈される．したがって，命題 6（てこの規則性）は M.B.Balk の体系にも用いることができる．

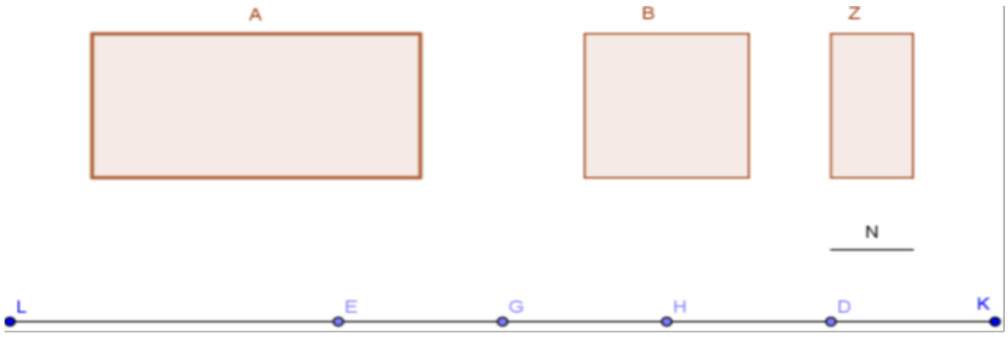


図 10　Archimedes が示す，命題 6 における参考図

しかしながら Archimedes の命題 9「すべての平行四辺形の重心は，平行四辺形の対辺の中点を結ぶ直線上にある」では，図 11 のように平行四辺形を辺と平行な線分で分割しており，これは明らかに M.B.Balk の平板の重心について述べているため，他の質点や線分の重心について証明するとき，この命題は根拠にならない．したがって，命題 9 をもとにして証明されている命題 10，13，14，15 は新たな体系に用いることはできない．

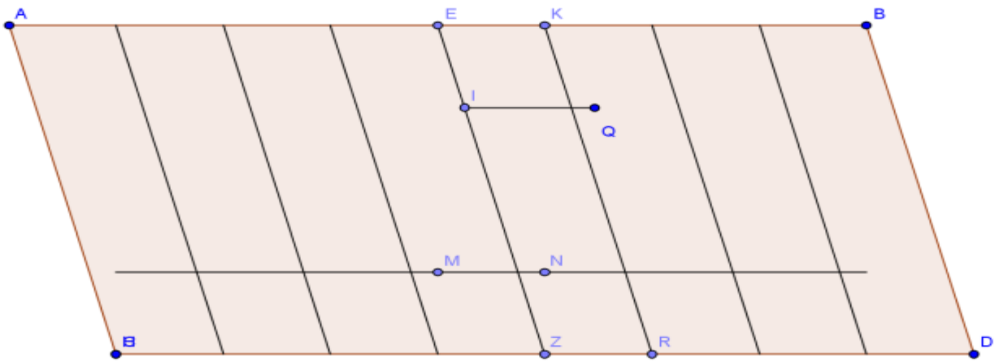


図 11　Archimedes が示す，命題 9 の参考図

以上のことから，Archimedes の要請は M.B.Balk の体系においても言葉は異なっているが，適用され得るため，Archimedes の要請をもとに新たに体系を作る．

まず，要請として以下の 6 個を挙げる．

1. 等しい重さは等しい距離でつり合う．また等しい重さは不等な距離ではつり合わず，より大きな距離にある重さのほうへ傾く．
2. 2 つの重さがある距離でつり合っているとき，もし，一方の重さにある重さが付け加えられるならば，それらはつり合わず，付け加えられた重さのほうへ傾く．
3. また同様に，一方の重さからある重さが取り去られると，それらはつり合わず，取り去られなかった重さの方に傾く．
4. 等しくて相似な平面図形がお互いに重ね合わされ一致しているとき，それらの重心もまた互いに一致する．
5. 不等であるが相似な図形の重心は，相似な位置にあるであろう．
6. ある量が重心をもつとき，重心はその量の重さを持つ．

Archimedes の要請 1～7 のうち，要請 1～5 を公理とする．要請 6「もし，2 つの量がある距離でつり合うならば，それらに等しい量もまた，同じ距離でつり合うであろう」については，要請 1 の「重さ」を M.B.Balk の体系で扱うように質点，線分，面のそれぞれに解釈して捉えることができるため，要請 6 は必要ない．また，要請 7「その周が同一の向きにへこんでいる任意の図形の重心はその内部になければならない」については，空間図形の内容であるため，ここでは取り上げない．また，6 は重心のもつ性質である．

次に，要請から演繹される命題について挙げる．

1. 等しい距離でつり合っている重さは，等しい．
2. 等しい距離にある等しくない重さはつり合わないが，重い方に傾く．
3. 等しくない重さは，等しくない距離でつり合い，その重い方が短い距離になる．
4. 2 つの等しい重さが同じ重心を持っていないとき，1 つにされた両方の重心はそれらの重心を結んだ線分の中央の点にある．
5. 3 つの等しい量が等しい距離で一直線上にそれらの重心があるとき，それらすべての量を合わせた量の重心は，中央の量の重心と一致する点となる．
   系 1 奇数個の量を合わせた量の重心は，中央の重心 G と一致する．
   系 2 偶数個の量を合わせた量の重心は，中央の 2 つの量の重心を結ぶ直線の中点 G と一致する．
6. 共測な 2 量は，それらの重さの比を逆にした距離において，互いにつり合う．
7. 共測でない量は，それらの重さの比を逆にした距離において，つり合う．
8. ある量 AB が重心 C を持っていて，その量の一部の量 AD が重心 F を持っているとき，のこりの量の重心 G は，GC と CF の比が量 AD と量 DE 比と等しくなる位置である．
9. 3 個の質点の重心の位置は，これらの質点が合成される順序に関係しない．
10. 3 個の質点のうち，2 個を別の 1 組にそれらの合成でおきかえたとき，3 個の重心の位置は変わらない．

11. n 個の質点の重心の位置は，これらの質点が合成される順序に関係しない.
12. n 個の質点のうち，k 個を別の 1 組にそれらの合成でおきかえたとき，n 個の重心の位置は変わらない.
13. 一様な線分の重心は，線分の中点に位置する.
14. 一様な線分の重心は，その線分の質量を持つ.
15. 2 個の一様な線分の重心は，各線分の重心を結ぶ線分上にあり，重さの比を逆にした距離において，互いにつり合う.
16. 3 個の線分の重心は，各線分の重心を質点と考えたとき，それらの質点系の重心に位置する.
17. n 個の線分の重心は，各線分の重心を質点と考えたとき，それらの質点系の重心に位置する.
18. 一様な面の平行四辺形の重心は，平行四辺形の対辺の中点を結ぶ線分上にある.
19. 一様な面の重心は，その面の質量を持つ.
20. 一様な面の三角形の重心は，頂点から対辺へ引かれた直線上にある.
21. 一様な面の四角形の重心は，２通りの対角線で分けた 2 つの三角形の重心を結ぶ線分の交点に位置する.
22. 一様な面の n 角形の重心は，２通りの対角線で分けた 2 つの図形の重心を結ぶ線分の交点に位置する.

上記のように 9，10，11，12 が質点の重心に関する命題であり，13，14，15，16，17 が一様な線分の重心に関する命題であり，18, 19, 20, 21, 22 が一様な面の重心に関する命題である.

また，1～8 までは Archimedes の命題から引用したものである.

次に，上記の体系を図に表したものを示しておく．[ ]や矢印は，その命題の根拠にあたるものである．また，証明については資料に載せておく.

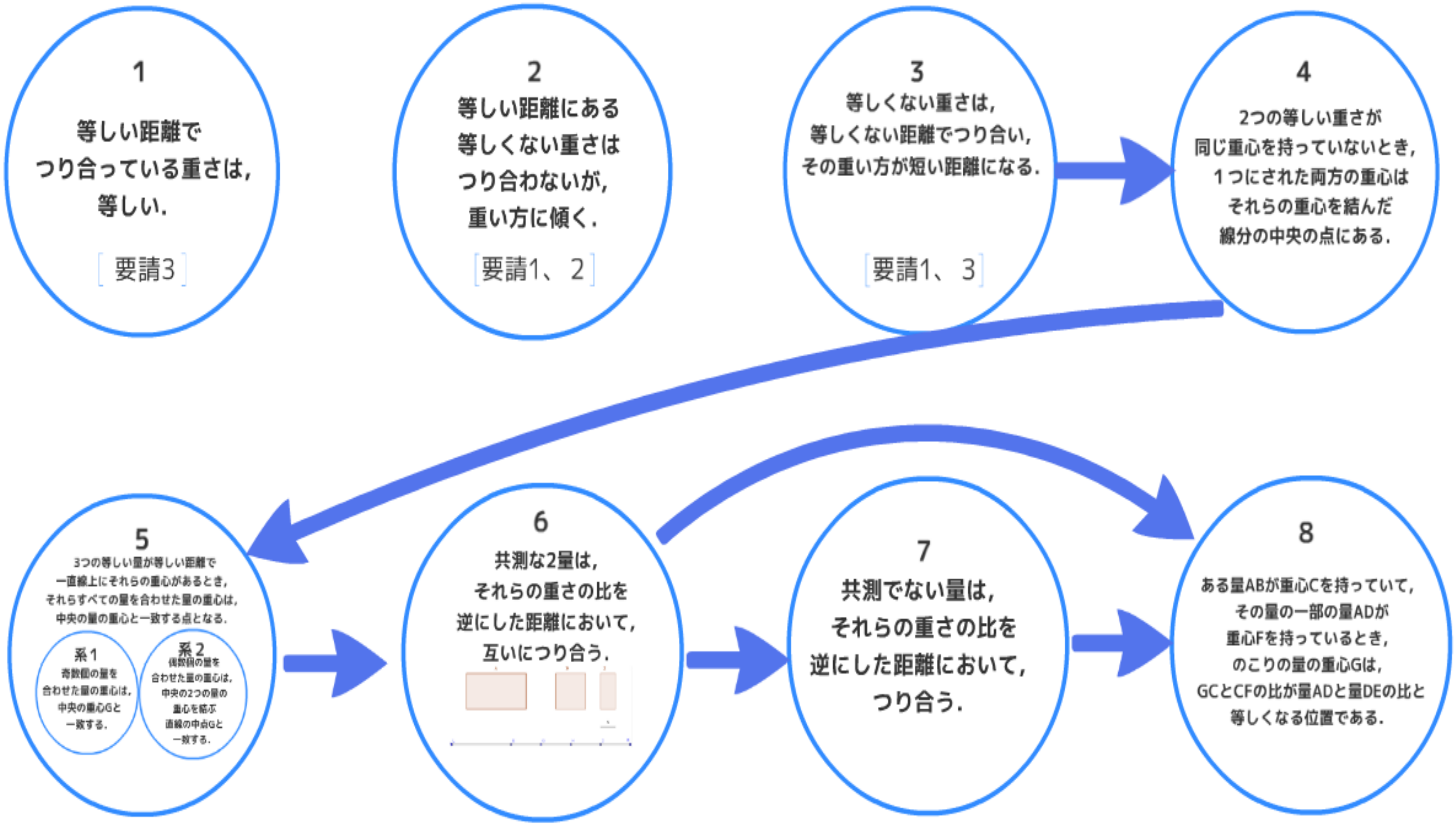


図 12　新たに設定する重心に関する体系（[ ]や矢印は証明の根拠に使われるもの）

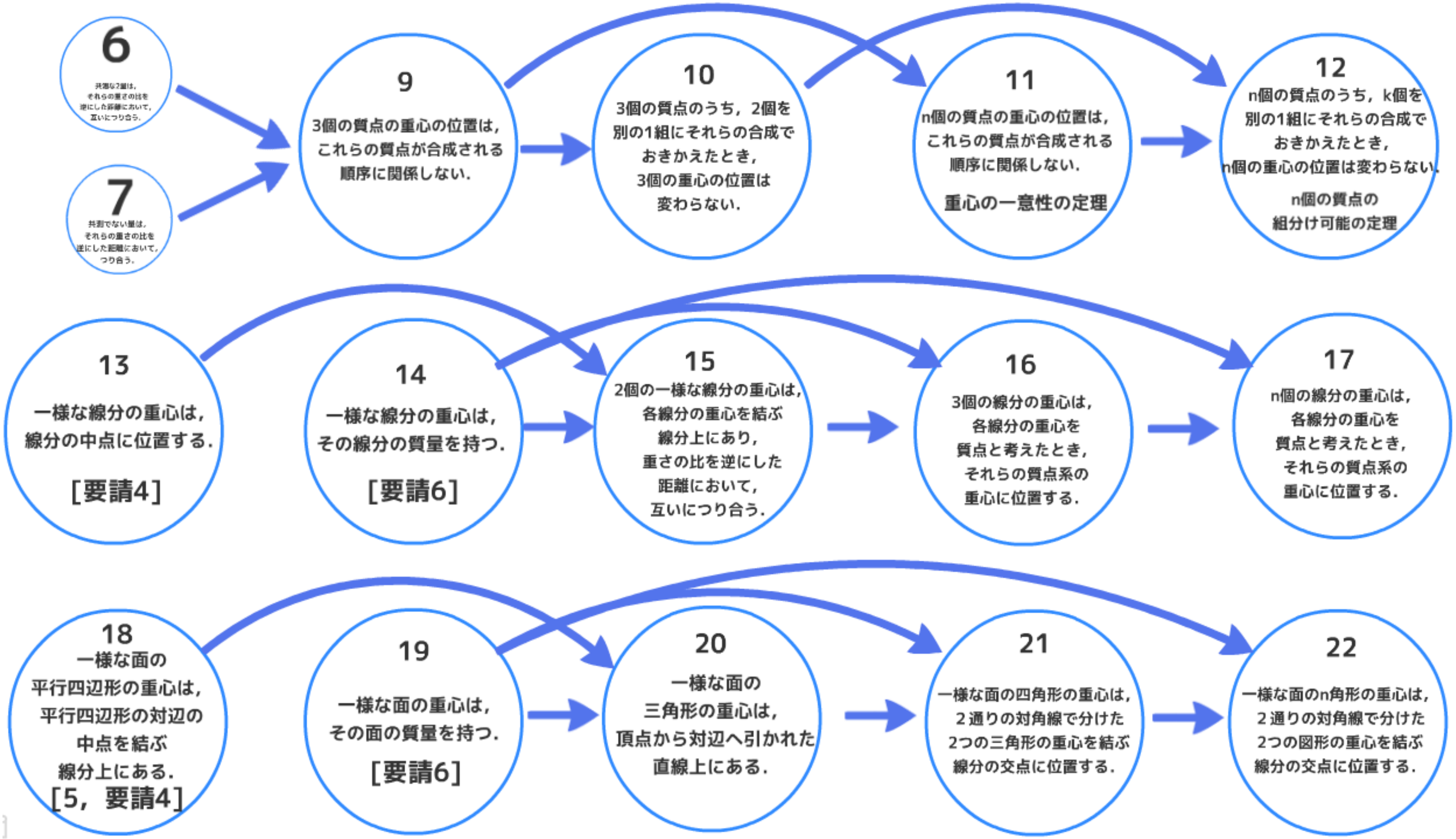


図 13　新たに設定する重心に関する体系（[ ]や矢印は証明の根拠に使われるもの）

【考察】

この体系は，前述したように三角形の重心を 3 通りに解釈することができ，その 3 通りには質点の重心としての幾何学的重心及び，線分の重心と面の重心としての物理学的重心があることから，これらを数学教育において体系的に理解するために作られたものである．したがって，この体系は全ての定理・命題を探す，完全な公理系を目指したものではない．四角形の重心や n 角形の重心を 3 通りに解釈することまでを目的としており，それらを理解するために必要最低限の命題についてのみ扱っている．

第 4 章の要約

杉山の主張から，体系を作る目的は以下の 2 つある．

・ある事柄が真であることを保証するための要素を明らかにするため

・適切に配列することによって，いちいち公理に戻らなくてもすむようになり，思考の経済がはかれるため

また杉山の主張に加えて磯田は以下のことも主張している．

・体系化とは「本質的で必須な数学的活動」であり，幾何領域以外の論証においても同様に重要な活動であるため

以上のことから，Archimedes と M.B.Balk の体系をもとに，新たな体系を設定した．新たな体系は，要請 6 つから演繹される，22 の命題からなる知識の配列となっている．

第 5 章
概念定義・概念イメージによる検討

本章では，4 章で設定された体系について考察する.

5.1 では，体系を分析するための枠組みとして用いる，概念定義と概念イメージについてまとめる.

5.2 では，概念定義と概念イメージをもとに重心指導の順序性について分析する.

5.3 では，分析した結果から，現行の重心指導と比較して，どのような点で改善されたのかについて考察する.

5.1　概念定義・概念イメージについて

松尾（1993）は概念定義，概念イメージについて，以下のように述べている．

> 人はある概念に対して，言語による記述を持つ一方で，言語では表せないようなイメージをもつことができる．（中略）概念イメージとは人の心の中で，概念の名称と関係するあらゆるメンタルピクチャーの集合体，それを特徴づける性質と関連するあらゆるメンタルピクチャーの集合のことである．（松尾,1993,p.54）

また，メンタルピクチャーについて，

> ある概念 C に対する，ある人 P にとってのメンタルピクチャーとは P の心の中で，C と関連しているあらゆるピクチャーの集合を意味する．このピクチャーという言葉は広義に考えられており，絵，シンボリック・フォーム，ダイヤグラムやグラフなどのあらゆる視覚的な表現を含むものである．（松尾,1993,p.54）

また，概念イメージは，徐々に変容していき，常に一貫しているものではないとも述べられている．

これに対して概念定義は，「ある概念を特定するために使われた言葉の形式（form），つまり，循環しない方法で正確に概念を説明する言語による定義である」（松尾,1993,p.55）と述べた上で，

> 概念イメージと概念定義は互いに影響し合って，変容していくと言える．このように考えていくと，個人の概念イメージや概念定義は必ずしも数学の世界で受け入れられてい

> る数学的な定義と一致するわけではない．概念イメージや概念定義が普遍的な概念に近づいていくとき，概念が形成されていくと考えられる．（松尾,1993,p.55）

と述べている．この,「概念イメージや概念定義は必ずしも数学の世界で受け入れられている数学的な定義と一致するわけではない」というところが，現在の学習者の重心に対する概念イメージの問題と一致している．

ここで，Vinner ら（1983）は，幾何学における概念形成について述べるなかで，概念イメージは明らかに構造を持つと主張し，ある概念に対する変化を通して概念形成の過程が捉えられるとしている．したがって，適切な概念を形成するためには，その過程において図形に関する適切な学習経験を増やすことが必要である. 概念イメージが変化していく例として, 松尾（1993）は以下の表 2 を挙げている．

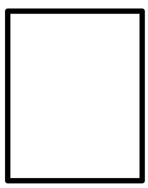
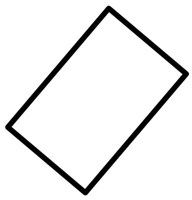
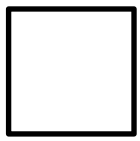
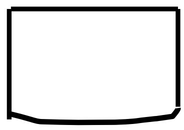
長方形１	長方形２	長方形３	長方形４
			

表 2　概念の形成過程段階における各段階の長方形の概念イメージ

はじめに子どもがもっている長方形の概念イメージは長方形１のみであり，他は含まれていない．その後，辺の長さや角が直角であることに着目し，長方形２も含まれるようになる．さらに，長方形の概念定義が「「4 つの角が等しい四角形」となると，それに対応するように概念イメージに長方形３も含まれるようになり，その後，長方形４のような多少のゆがみを捨象することで概念イメージにふくむことができるとしている．

以上のように概念の形成過程段階と各段階における概念定義及び概念イメージを考察したとき，以下のように述べることができる．

概念形成過程の第１段階では，図形を外観で捉える．このとき，概念イメージや概念定義はその外観に基づいている．

概念形成過程の第２段階では，図形をその部分から捉える．このとき，概念イメージや概念定義は部分の構成要素やその関係に基づいている．したがって概念イメージには，第１段階では考えていなかった，辺の長さや辺の垂直平行の関係などが含まれている．概念定義には図形の部分とその関係についての記述が含まれる．このとき，「平行四辺形の対角線同士は垂直に交わる」というように，図形の正しい性質だけが概念イメージや概念定義に含まれているとは限らない．

概念形成過程の第３段階では，図形を定義によって，集合として捉える．したがって，概念イメージや概念定義は図形の性質や包摂関係に基づいている．このため，概念イメージには包摂関係の考えられるあらゆる図形が含まれる．概念定義には，正しい図形の性質を含み，数学的定義そのものになる．

5.2　概念定義・概念イメージによる重心指導の順序性

重心の指導をする前に，生徒は生活場面から軽ケイン的に重心に関するメンタルピクチャーを持っていると想定される．その例として，紙と爪楊枝でコマを作るときに円形のコマだけではなく，四角形や三角形のコマを作るならば，爪楊枝をどのような位置に刺すべきかを考えることや，公園でシーソーに座るときに，相手の体重を考え，どの位置に座るべきか考えることが挙げられる．しかしながら，それらは体系的に連関を持っていないか，そもそも数学化されずにとどまっている知識に過ぎないことが想定される．したがって，4.1 にも示したように，体系化する目的には，重心に関する学習以前から学習者が持つメンタルピクチャーを体系的に配列していくことを考えなければならない．

以下に示す図 14 が，5.2 で示した体系をもとに重心指導を行った場合における，概念イメージの一例である．学習者は，重心の指導を受ける前に「線分の重心」及び「平行四辺形の面の重心」について，生活場面から経験的に知識を獲得していると推測される．また，てこの規則性をもとにして重心に関する概念イメージをさらに形成させ，3 個の質点の重心，3 個の線分の重心，三角形の面の重心を考えることができる．そして，4 個の質点の重心，4 個の線分の重心，四角形の面の重心へと発展させて概念イメージが形成されることが想定される．

また，経験的に得られた重心に関するメンタルピクチャーは図形上に重心が存在するものが想定されていると考えられる．しかしながら，図形外に重心が存在することは多分に考えられる．つまり重心という具体的に示すことができる点という認識から脱却し，図形上に重心が存在しない場合を新たに概念形成する必要性が考えられる．そのために，2 つの L 字の面の重心について扱う．一方は L 字の面上に重心が存在するが，他方は

L 字の面上に重心が存在しないような例を用いることで，概念が拡張されると想定される．

また，平行四辺形以外の四角形の重心を質点と面の 2 通りに解釈したとき，その位置が異なること，つまり 4 個の質点の重心と四角形の面の重心の位置が特殊な場合を除き，異なることも併せて概念イメージに取り入れたい．なぜなら，前述したこれらの違いは体系的に考えることで発見され，認識される違いであるため，この違いを通して体系的に考えることの有用性に気づくことが期待されるためである．

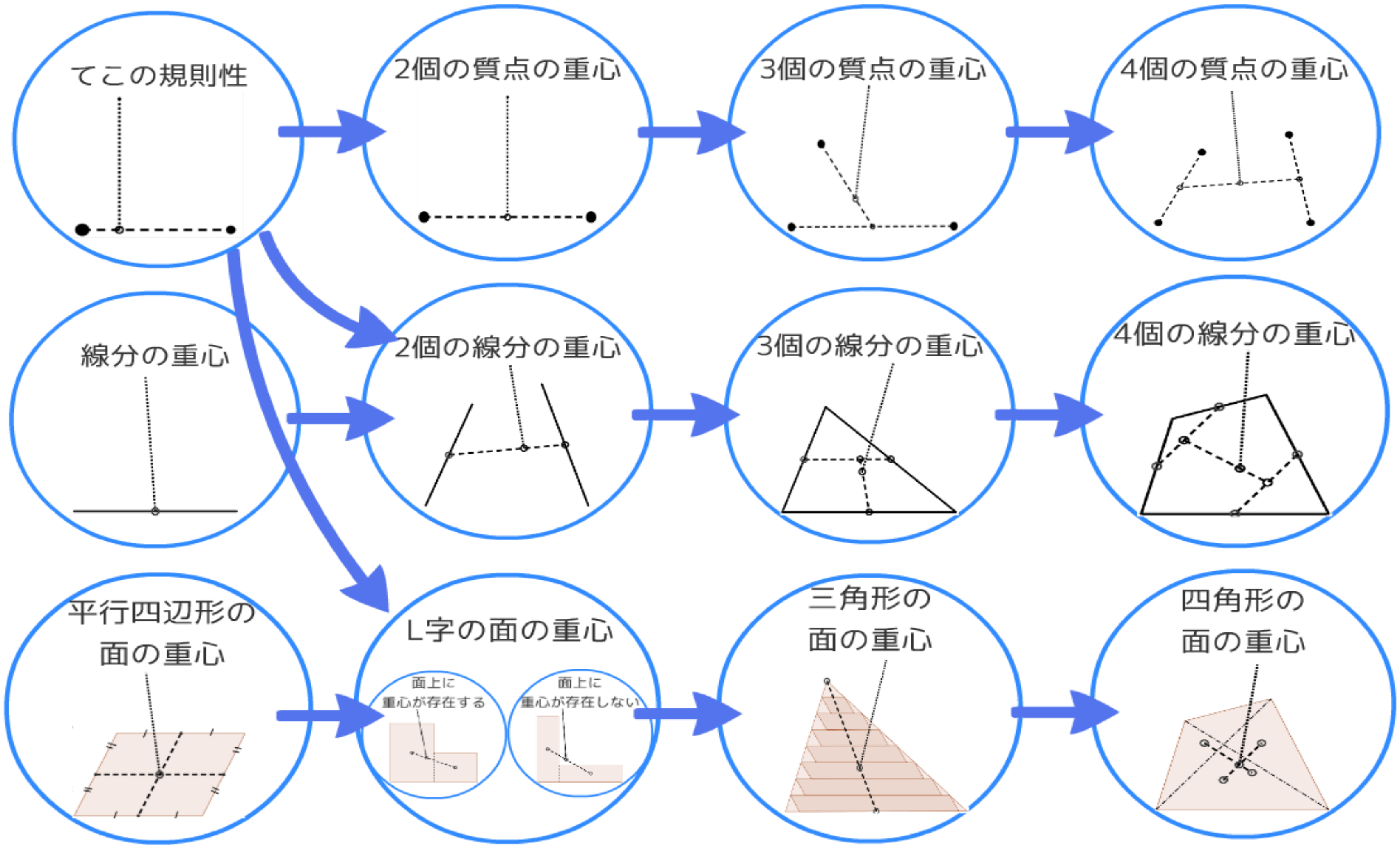


図 14　新たに設定する重心に関する体系によって得られる概念イメージの一例（矢印は根拠に使われるもの）

また，以下に示す表 3 の概念定義についても一例である．特に，5.1 で述べたように，概念定義は必ずしも最初から数学的な用語を用いて表されるわけではない．したがって，概念が形成されていくと同時に，概念定義の言葉も洗練されるようになると推測される．

対象の概念	概念定義
てこの規則性	重い方の近くに重心がある．
線分の重心	棒の真ん中で支えることができる．
平行四辺形の面の重心	面の真ん中でつり合う．
L 字の面の重心	図形を 2 つに分けて，2 つの重心に対して，てこの規則性を考えた点． 図形によっては，重心は図形の外にあることもある．
2 個の線分の重心	長い方がより重いため，てこの規則性から長い方の近くにある．
2 個の質点の重心	等しい重さは，中点に重心をもつ
3 個の質点の重心	2 個の質点の重心に重さを合成して，残りの 1 個の質点との重心を考える．
4 個の質点の重心	質点を 2 組みに分けて，2 個の重心を質点と考えて，その重心を考える．
3 個の線分の重心	線分の重心から質点の重心へと置き換え，3 個の異なる質量である質点の重心．
4 個の線分の重心	線分の重心から質点の重心へと置き換え，4 個の異なる質量である質点の重心
三角形の面の重心	平行四辺形をもとに考え，中線上に存在する．

四角形の面の重心	対角線で 2 個の三角形の重心を考え，その重心を結んだ線分上に存在する．2 通りに図形を分けることで，重心を結ぶ線分が 2 個得られるため，その交点に位置する．

表 3　体系的な重心指導によって形成することが想定される概念定義

上記のより，重心指導の順序性の一例として，図 15 のような順序が想定される．てこの規則性，線分の重心，平行四辺形の面の重心は学習者が既にメンタルピクチャーを獲得していると推測されること，また，第 4 章で示したように，これらは互いに根拠とする関係にないため，循環することなく指導することが可能である．次に，L 字の面の重心を 2 通り考えることで，面上，つまり図形上に重心があるという経験的知識からの脱却を狙う．また，図形を 2 個に分けるという方法や，2 個の重心を質点として考え，その質点に対して，てこの規則性を考えることができ，それによって演繹的な考えを高める働きが想定される．

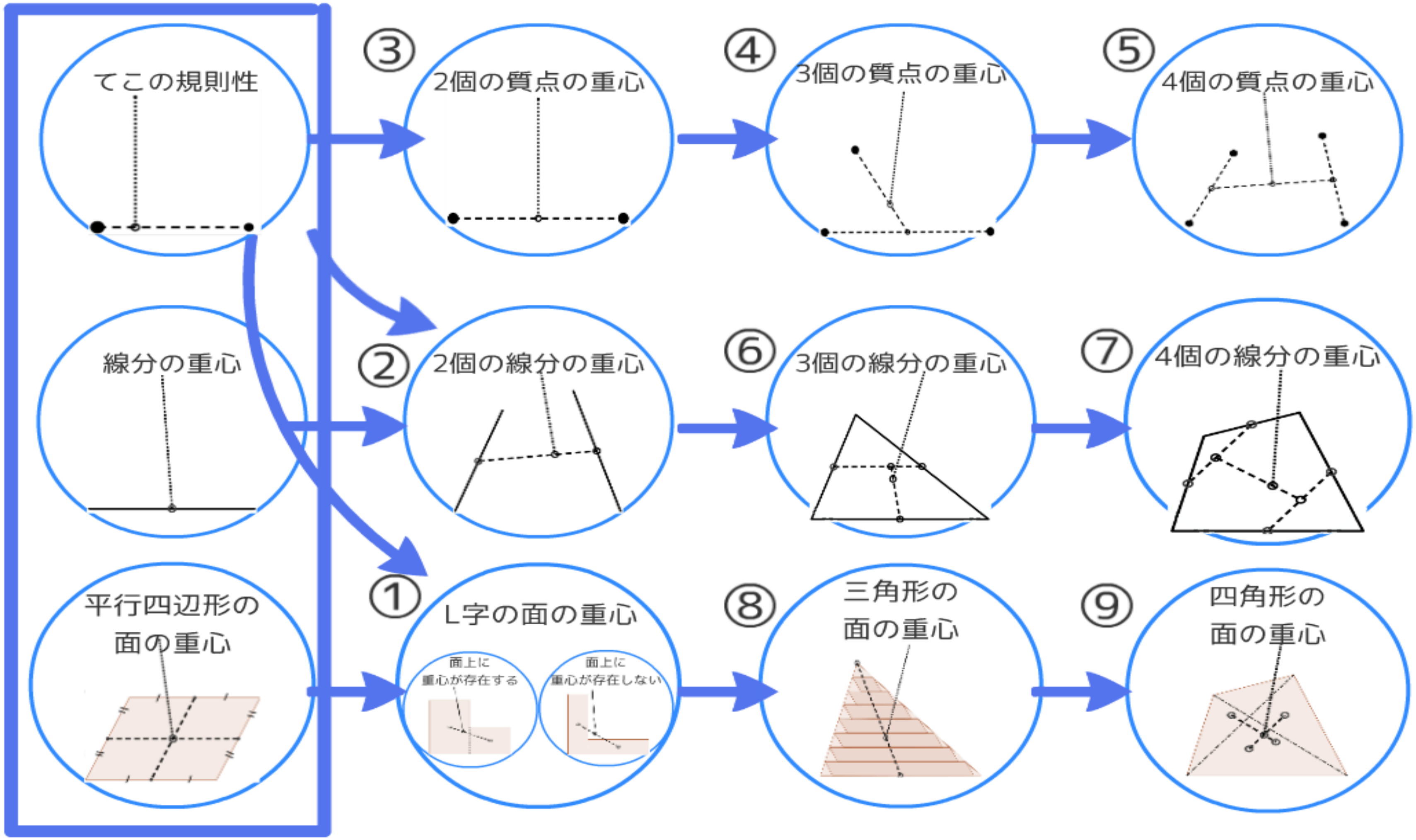


図 15　体系的な重心指導の順序性の一例（四角で囲まれているところは既に獲得していると想定される）

5.3　教育的価値に関する考察

5.2 では，体系的な重心指導の順序性についての考察を行った．第 3 章で分析したように，数学教育における現在の重心指導は三角形についてのみ行われており，そのモデルとして載せられているのは三角形の面の重心のモデルであった．そこで，数学教育において 5.2 で示したような体系的な指導が行われたとき，そこにはどのような価値が想定されるのかについて考察する．

まず，第 2 章と関連して，数学という学問において重心を考える価値は，任意の図形に対する重心を考える根拠を自らの責任をもって求めることができるようになることが考えられる．現在の重心の扱い方では，三角形の重心，その中でも M.B.Balk による解釈を行うと，三角形の面の重心についてのみしか考えておらず，そこから一般化を行うようなことはなされない．しかしながら，体系的に理解がなされることで，一度，どのように三角形の重心を作図すればよいかわからなくなったとしても，それ以前の重心を考えること，つまり 2 個の質点の重心や線分の重心などの学習前から獲得していることが期待される概念をもとに，自ら演繹することが可能となる．また，任意の平面図形について，根拠を持って重心の位置を示そうとすること可能になることが期待される．さらに，図形の構成要素によって重心の位置を求めることができるという高次の理解が得られたならば，立体図形についても，自ら考えるもとになる重心を要請から導くことが期待される．

次に，第 3 章と関連して，数学教育において重心を考える価値は，重心にかかわらず，図形を構成要素によって捉える思考の高まりが期待される．同じ形をした，構成要素を異なるものから重心を考えることによって異なった結果が得られたため，この重心を学んだ後も同様に図形の構成要素に着目するような思考が働くことが期待される．それは，証明指導のときに必要となる力であると考えられる．

次に，第4章で示したように，体系的な指導が行われることで，根拠を考えながら活動を行うことができ，なぜそれが正しいといえるのか，ということについて考えることが期待される．それは，全ての学習が終わったときに，振り返りとして行われることも想定される．

また，杉山（1986）が述べる「思考の経済」が働くことによって，簡潔な証明を行うことが期待される．

上記のような体系化を行う目的は，他の体系化を行うとき，例えば四角形について考えるときにも達成されることが期待される．しかしながら，学習者である生徒が既に日常生活から知識を得ている重心を教材として扱うことで，積極的に問題に取り組むことも想定されるだろう．特に，模型を作ったり，実際に重心を作図したり，求めたりすることができるため，体系化という本質的な数学的活動を親しみやすく行うことが期待される．

最後に，ベクトルを用いた幾何や，解析幾何などの現在のカリキュラムにおける高次の学習と関連させることで，質点の重心として扱っていた幾何学的重心と線分の重心や面の重心として扱っていた物理学的重心についてもより深くの理解が期待される．

第 5 章の要約

重心指導の順序性について考察するための方法として概念イメージと概念定義を用いて考察を行った．

概念イメージとは，人の心の中で，概念の名称と関係するあらゆるメンタルピクチャーの集合体，それを特徴づける性質と関連するあらゆるメンタルピクチャーの集合のことである．

概念定義とは，ある概念を特定するために使われた言葉の形式（form），つまり，循環しない方法で正確に概念を説明する言語による定義である．

上記の概念イメージと概念定義，さらに第 4 章の新たな重心の体系をもとに，演繹的な知識の配列になっていることに注意しながら，重心指導の順序性についての考察を行った．

さらに，その体系をもとにして行われる指導が行われたときと現在の重心指導との差から，体系的に重心指導が行われることの教育的価値について考察した．その結果，以下のようなことが期待されることとしてあげられる．

・第 2 章と関連して，重心を作図するとき，根拠を持って作図することが可能となること
・第 3 章と関連して，図形を構成要素によって捉える思考が働くこと
・第 4 章と関連して，体系的に捉えることで，証明の根拠を探ることや，一度証明されたことを再び証明することなく扱えることが可能となること

第 6 章
本研究の結論と残された課題

本章では，本研究の結論と残された課題を述べる．
6.1 では，課題に対する結論について述べる．
6.2 では，本研究において残された課題について述べる．

6.1　本研究の結論

本研究の目的は，数学教育では重心はどのように学ばれるべきであるか、を考えることで、現在の重心指導にはない教育的価値について考察することであった．

この目的を達成するために，まず重心について調べたところ，重心を発見したとされる Archimedes の重心に関する体系と，「重心の概念の幾何への応用」における M.B.Balk の重心に関する体系があることがわかった．それらは，ともに物理学的な考えを含んではいるものの，演繹的に考えられており，三角形の重心に対して異なる方法による求め方を示していた．また，現在までの重心指導を分析するために，学習指導要領の変遷を分析したところ，当初は数学教育において M.B.Balk が主張する重心の内容が扱われていたが，すぐに理科教育へと移行された．さらに，現在の重心指導を分析するために教科書分析を行ったところ，重心であることの説明がされている教科書は少なかった．また，先行研究と照らし合わせてみたところ，重心であることが説明されている教科書では，幾何学的重心について扱われているのではなく，物理学的重心について扱われていた．このような様々な重心を体系的に理解するために，本研究の課題として，以下の 3 つを挙げた．結果と同時に述べる．

①重心に関する体系を Archimedes と M.B.Balk をもとに，すべてが演繹的に証明されているような体系を設定する．
結果 : 6 つの要請をもとに，22 の命題を示した．しかしながら，体系を作る目的として，多角形の重心を 3 通りに解釈したときに生じる重心の位置に関する理解を設定したため，作られた体系は最低限の命題を並べることしかできず，完全な公理系ではなかった．

②新たに作られた重心に関する体系が学習者に指導されたとき，どのように概念が形成されていくのか.
結果：概念イメージと概念定義をもとに，想定される概念形成の一例を示した．既に学習者は重心に関するいくつかのメンタルピクチャーを経験的に獲得していることが想定されるが，それらが学問的に関係性を持ったり，自然と一般化が行われたりするわけではない．そこで数学という学問のなかで，演繹的に重心を捉えることで，概念イメージや概念定義を拡張し，連関を持つことが推測された.

③新たに作られた重心に関する体系をもとに指導するときと以前までの指導と比べてどのような差が考えられるのか.
結果：重心を作図するとき，根拠を持って作図することが可能となること，図形を構成要素によって捉える思考が働くこと
体系的に捉えることで，証明の根拠を探ることや，一度証明されたことを再び証明することなく扱えることが可能となること，そして，体系化を含む数学的活動となったため，根拠を意識した活動になったり，証明を簡潔に示したりすることができることが期待されるようになった．また，四角形の重心について，質点の重心（幾何学的重心）と面の重心（物理学的重心）について体系的に理解されることが期待されるようになった.

6.2　残された課題

本研究では，体系をまとめることに重きを置き，それをもとにして重心の教育的価値について考えたため，実際の教育現場で扱える内容に達していない．また，体系化を考える上で重要な命題や要請についての吟味が足りないため，学習者からはなぜ証明される対象とされなくてもよい対象があるのかという差異が理解できないことが挙げられる.

また，体系的について扱うことの教育的価値を考察したかったが，概念イメージと概念定義を捉えるだけでは一例を挙げることしかできず，それがなぜ価値があるといえるのかということをあきらかにする根拠としてうまく機能しなかったため，教育的価値に関する考察が，期待されることでとどまっていることも挙げられる．

引用・参考文献

飯島康男（1988）「算数・数学の指導に取り入れる実験の意義」日本数学教育学会誌『臨時増刊，数学教育学論究』，49・50 巻，pp.3-27

礒田正美（1987）．「体系化の立場から見た中 2 の図形指導」．日本数学教育学会誌『数学教育』，第 69 巻，pp323-332

彌永昌吉，伊藤俊太郎，佐藤徹（1979）．『数学の歴史Ⅰ ギリシャの数学』共立出版

栗田稔（1960）「問題遍歴Ⅱ 重心をめぐって」，日本数学教育学会誌『数学教育』42 巻，9 号,pp.153-155

杉山吉茂（1986）.『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』.東洋館出版

林栄治，斎藤憲（2009）『天秤の魔術師 アルキメデスの数学』.共立出版

松尾七重（1993）．「図形の概念形成の状態を特定するための視覚的モデル」．筑波数学教育研究，第 12 号 A,pp.53-62

村上一三（1989）『数学教育における重心指導の問題点とそのあり方について』，日本数学教育学会誌『数学教育』，71 巻，9 号,pp.352-362 aedibus B. G. Teubneri（1881）*Archimedis Opera Omnia : cum commentariis Eutocii. e codice florentino recensuit* . latine uertit notisque illustravit J. L. Heiberg

M.B.Balk（著），鳥居一雄・宮本敏雄（訳）（1960）.『重心の概念の幾何への応用』. 東京図書

ボイヤー（著），加賀美鐵雄・浦野由有（訳）（1984）.『数学の歴史 2』. 朝倉書店

参考資料

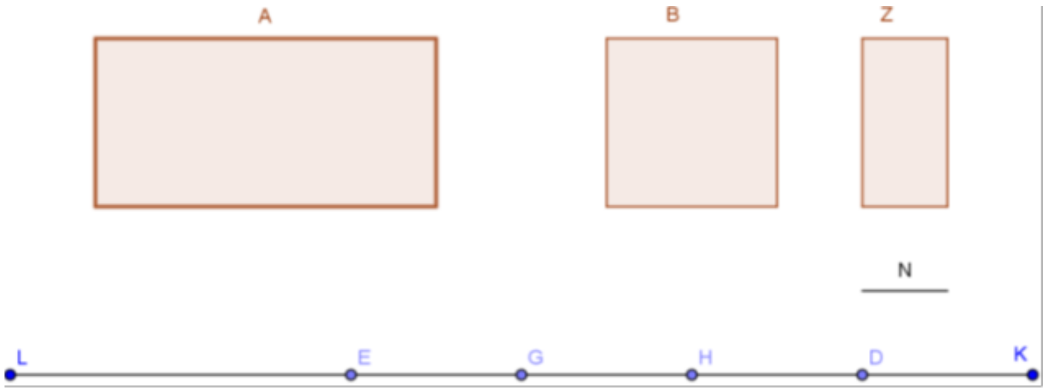
「平面のつり合いについて」第Ⅰ巻

命題 1 等しい距離でつり合っている重さは等しい.
証明）等しい距離でつり合っている重さが等しくないとすると，その重さの差だけ取り除き，重さを等しくすると，要請 3 よりつり合わないこれは要請 1 に矛盾するため，等しい距離でつり合っている重さは等しい．[証明終了]

命題 2 等しい距離にある等しくない重さはつり合わないが，重い方に傾く.
証明）等しい距離にある重さについて考えたとき，命題の重さの分だけ重さをつけ加えると，要請 2 よりつり合わず，重い方へ傾く．よって，等しい距離にある等しくない重さはつり合わないが，重い方へ傾く．[証明終了]

命題 3 等しくない重さは，等しくない距離でつり合い，その重い方が短い距離になる.
証明）等しくない重さ A，B（A＞B）があったとき，それらが C でつり合うとすると，
（ⅰ）AC＝CB ではない．なぜなら，命題 1 に矛盾している．
（ⅱ）AC＞CB ではない．なぜなら，A－B の重さを A から取り除いたとき，AC＞CB であるため A の方に傾く．これにさらに A－B の重さを A に加えてもつりあうことはない．したがって（ⅰ）（ⅱ）より AC＜CB である．逆に，その重さがつり合っていて，AC＜CB のとき，A>B である．[証明終了]

命題 6 共測な 2 量は，それらの重さの比を逆にした距離において，互いにつり合う．



上の図において，共測な 2 量を A，B とする．距離 ED の E に量 A が，D に量 B がかかっているとすると，

A：B＝ DG：GE

が成り立つとき，G においてつり合うことを示す．E と D を延長して距離 GD を E から 2 点 L と H がとれ，HD＝EG となる．同じ長さを D の延長上にとり，K とすると

A：B＝DG：GE＝LH：HK

DG，GE の共通な尺度 N をとり，

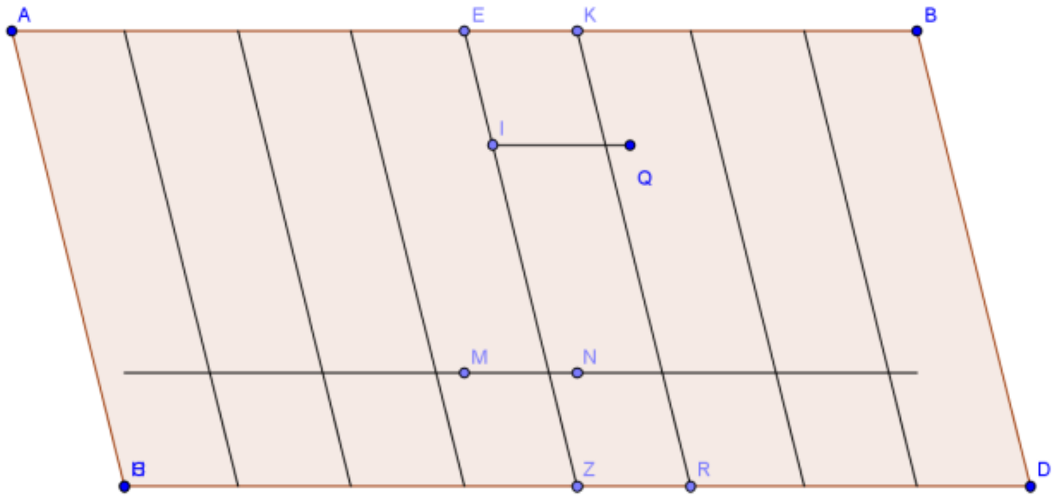
DG＝mN，GE＝nN

とする．LH に含まれる N の個数（2m 個）だけ A が量 Z を含むとすると（A＝2mZ となる Z をとると），HK に含まれる N の個数（2n 個）だけ B は Z を含む（B＝2nZ）．

ここで，LH を N に等しく 2m 個に分け，A を Z に等しい 2m 個に分けて LH 上に並べると，その重心は E である（命題 5 系 2），同様に HK を N に等しく 2n 個に分け，B を Z に等しい 2n 個に分けて HK 上に並べると，その重心は D にある．しかし，これらの全体 2（m＋n）個の量の重心は点 G にあり，ここでつり合う（命題 5 系 2）．

したがって，共測な 2 量は，それらの重さの比を逆にした距離において，互いにつり合う．

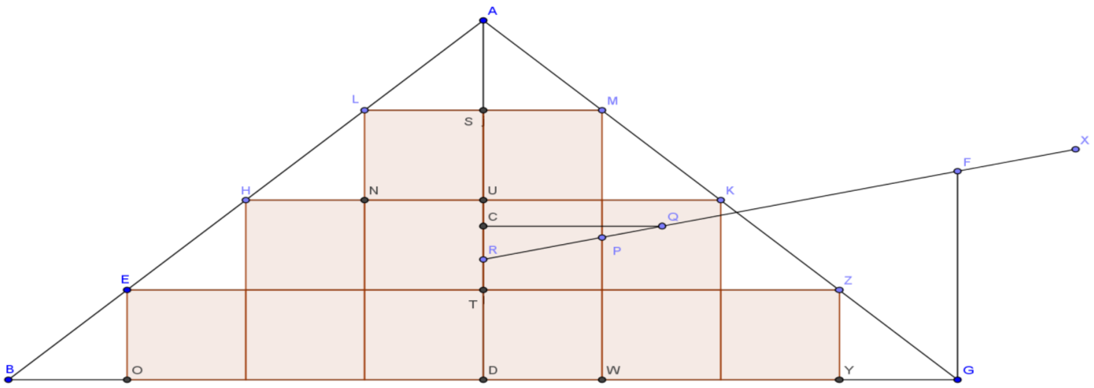
命題 9 すべての平行四辺形の重心は，平行四辺形の対辺の中点を結ぶ直線上にある．



上の図のように平行四辺形 ACDB について考えるとき, AB, CD の中点 E，Z を結んだ線分 EZ 上にあることを示す.

EZ 上に重心がないと仮定すると，Q を重心とする．Q を通り AB に平行な直線と EZ の交点を I とする．EB を繰り返し 2 等分し，IQ より小さくなるような EK を IB 上にとり，K を通り EZ に平行な直線を引いて平行四辺形 EZRK をつくる．そして平行四辺形全体を平行四辺形 EZRK と等しく相似な平行四辺形に分ける．すると全体の重心は，中央の 2 つの平行四辺形の重心を結んだ線分の中点だが，Q はこの平行四辺形の外部にあるので不可能である. したがって, すべての平行四辺形の重心は, 平行四辺形の対辺の中点を結ぶ直線上にある.

命題 13 すべての三角形の重心は，頂点から対辺の中点へ引かれた直線上にある．



上の図のように三角形 ABG があり，BG の中点 D と A を結んだ AD 上に重心があることを示す．

AD 上に重心がないと仮定すると，重心 Q を図のように考える．BG に平行で Q を通る直線と AD の交点を I とする．IQ よりも小さくなるように DG を繰り返し 2 等分し，分点から AD に平行になるように直線を引き，それぞれの直線と三角形の辺の交点 E，H，L，M，K，Z を EZ，HK，LM となるように結ぶと全て BG に平行となる．このようにして，三角形 ABC を平行四辺形とそれ以外の小三角形に分ける．平行四辺形の重心は全て AD 上にある（命題 9）ため，これを R とおく．ここで，G から AD に平行な線と直線 RQ の交点を F，MW と RF の交点を P とおく．

ここで，

（全体の三角形）：（小三角形全体）

＝BG：LM

＝GD：DW

＝FR：RP　＞　FR：RQ

分離比（A：B＝C：D⇔A-B：B＝C-D：D）をとると，

（平行四辺形全体）：（小三角形全体）

＞FQ：RQ

　ここで，直線 RF 上に X を，
（平行四辺形全体）:（小三角形全体）
＝XQ : QR
となるようにとると，XQ＞FQ より X は F からみて Q と反対側にある点となる．
　また，Q は三角形全体の重心，R は平行四辺形全体の重心のため，命題 8 より X は小三角形全体の重心となるが，これは不可能である．したがって，仮定が異なるため，すべての三角形の重心は，頂点から対辺の中点へ引かれた直線上にある．

重心に関する体系の証明

9　3 個の質点の重心の位置は，これらの質点が合成される順序に関係しない．
証明）3 個の質点を（A_1，m_1），（A_2，m_2），（A_3，m_3）とし，質点（A_1，m_1），（A_2，m_2）の重心を B，質点（A_2，m_2），（A_3，m_3）の重心を C，質点（A_3，m_3），（A_1，m_1）の重心を D とする．このとき，質点（B，m_1+m_2），（A_1，m_1）の重心を S，質点（C，m_2+m_3）の重心を T として，$S \not\equiv T$ と仮定する．このとき，直線 ST に注目する．ST に垂直な平面の中から，1 つの平面 α をとって，点 A_1，A_2，A_3，S，T がこの平面の同じ側にあるようにしよう．これらの 5 つのてんから平面 α までの距離をそれぞれ y_1，y_2，y_3，s，t と表わす．p.16 の方法によって，

$$s=\frac{m1y1+m2y2+m3y3}{m1+m2+m3}\quad ,\qquad t=\frac{m2y2+m3y3+m1y1}{m2+m3+m1}$$

つまり s＝t となるが，この場合にこの事が可能なのは，S≡T のときだけである．すなわち，$S \not\equiv T$ は正しくない．お暗示用にして，質点（D，m_3+m_1），（A_2，m_2）の重心も S に一致する．[証明終了]

11　n 個の質点の重心の位置は，これらの質点が合成される順序に関係しない.

証明）n 個の質点（A_1，m_1），（A_2，m_2），……，（A_n，m_n）があるとする．これらをその番号順に合成して，重心として点 S が得られたとし，他方，それらを別の順序に合成して点 T を得たとする．このとき，$S \not\equiv T$ と仮定する．直線 ST に垂直な平面の中から，1 つの平面 α をとって，点 A_1，A_2，……，A_n，S，T がみなこの平面の同じ側にあるようにすることができる。これらの点から平面 α までの距離を y_1，y_2，……，y_n，s，t と表わす．距離 s は p．16 の方法によって，

$$s=\frac{m1y1+m2y2+\cdots+mnyn}{m1+m2+\cdots+mn}$$

であるが, t はこの分子と分母で項の順序にある変更を行えば得られる．それによって分数の値が変わることはないので,

$s=t$

したがって，$S \equiv T$ であり，仮定は矛盾している．したがって, n 個の質点の重心の位置は，これらの質点が合成される十女に関係しない．[証明終了]

10　3 個の質点のうち, 2 個を別の 1 組にそれらの合成でおきかえたとき，3 個の重心の位置は変わらない.

証明）3 個の質点を（A_1，m_1），（A_2，m_2），（A_3，m_3）とし，質点（A_1，m_1），（A_2，m_2）の重心を B，質点（A_2，m_2），（A_3，m_3）の重心を C，質点（A_3，m_3），（A_1，m_1）の重心を D とする．また，（B，m_1+m_2）と（A_3，m_3）の重心を T，与えられた 3 個の質点を順に合成して得られる重心を S とする．$S \not\equiv T$ と仮定すると，直線 ST に垂直で，点 A_1，A_2，A_3，B，T，S がみな，同じ側にあるような平面 α をとる．これらの点から平面 α まで

の距離をそれぞれ，y_1，y_2，y_3，b，t，s と表わす．b，t，s はそれぞれ p.16 の方法によって，

$$s=\frac{m1y1+m2y2+m3y3}{m1+m2+m3},\quad b=\frac{m1y1+m2y2}{m1+m2}$$ よって

$$t=\frac{(m1+m2)b+m3y3}{m1+m2+m3}=\frac{m1y1+m2y2+m3y3}{m1+m2+m3}$$ となる

ところが，このとき s＝t であり，S と T は平面 α に垂直な 1 つの直線上にあって，α の同じ側にあるから，S≡T である．したがって仮定は矛盾している．他の組み合わせも同様に考えられる．よって，3 個の質点のうち，2 個を別の 1 組にそれらの合成でおきかえたとき，3 個の重心の位置は変わらない．[証明終了]

13　一様な線分の重心は，線分の中点に位置する．
証明）一様な線分 AB とそれを逆にした BA について考える．線分 AB と線分 BA は，一様な線分であるため，等しくて相似な図形といえる．要請 4 より，線分 AB と線分 BA の重心が一致するのは，線分の中点に位置するときのみである．したがって，一様な線分の重心は，線分の中点に位置する．[証明終了]

謝辞

本研究を進めるにあたり，ご指導いただいた多くの方々に，心より感謝申し上げます．

指導教官である溝口先生には，様々なことに興味・関心が向いてしまい，ひとつのことを深く研究することが苦手であった私に対して，丁寧で熱心なご指導をしていただきましたこと，深く感謝申し上げます．1年生の頃から，どのように数学の授業を取れば教えてくださり，余裕を持って授業を受けることができたこと，教育実習での研究授業に対するご指導では私が考えたくても考えられなかった授業の問題点を明確にしてくださったことなど，研究以外でも様々な機会で私をよりよい方向へと導いてくださったこと，様々な挑戦を与えてくださったことなど，本当に心から感謝いたします．

研究室の先輩である，玉木義一さん，吾郷将樹さん，岡友章さん，岸川友飛さん，和田匠馬さんは様々な場所，様々な時にご指導をしていただきました．私がどうしたらよいかわからないときには，自身の体験談を踏まえながら，丁寧になすべきことを示して下さり，そのおかげで本研究が無事に終えることができたと思います．若林直広さんも夏合宿のときには初参加で何をすればよいかわからない私に対して，どう動けば良いかを指示してくださったことなど，あらゆる面でお世話になりました．

さらに，夏合宿では，大阪教育大学の真野先生，埼玉大学の松嵜先生をはじめ，広島大学のみなさま，大阪教育大学のみなさま，埼玉大学のみなさま，溝口研究室の OB のみなさまから，多くのご助言，ご指導をいただきました．心より感謝申し上げます．

このように多くの方に支えられ，本論文を完成させることができましたことに，深く感謝申し上げます．来年度以降も感謝の気持ちを持って，よりよい研究を行うことできるよう，精進していきたいと思います．本当にありがとうございました．

平成 28 年 1 月

荻原友裕

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/