ISSN 1881−6134

鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

The Rational Number Projectの“マトリックス”に焦点をあてた理論的考察

−理論枠組みの検討及び我が国の教科書とRNPの“Textbook”への適応−

玉木義一　*Yoshikazu Tamaki*

vol.17, no.11
Mar. 2015

鳥取大学 数学教育学研究室

The Rational Number Projectの“マトリックス”に焦点をあてた理論的考察
−理論枠組みの検討及び我が国の教科書とRNPの“Textbook[1)]”への適応−

鳥取大学大学院　院生　玉木 義一

１　はじめに

玉木(2014)は，これまでの我が国の分数の研究では，カリキュラム全体を通しての特徴づけたり，設計するような理論枠組みに関する研究が少ないことを指摘した。また，米国のThe Rational Number Project（以下RNP）の理論枠組みの変遷をたどり，その課題点を明らかにした。この課題点を踏まえ，理論枠組みの項目を検討し直すことにより，我が国の分数指導のカリキュラムをより明確に特徴付けることが期待される。

しかし，後述するマトリックスの数学的変数性の項目が，マトリックスの変遷の過程で様々ある。どのような項目がよりマトリックスを効果的に扱うことが可能なのかを述べる必要がある。また，我が国のカリキュラムを適応可能な事を示す必要もある。

そこで本研究の目的は，我が国のカリキュラムの特徴付けを可能にするために，RNPの理論枠組みの一つであるマトリックスを再検討することにある。また，そのマトリックスに我が国の教科書とRNPが作成するTextbook[1)]を適応する過程とその結果を示すことにより，どのように特徴づけが可能であるのかを示すことも目的である。

そして，そこで明らかにした理論枠組みが，我が国のカリキュラムの特徴見ていくときに用いることが期待できることを，教科に適応させ，特徴として見ることができるものを副次的に幾つか述べる。

２　The Rational Number Project

RNPは米国のいくつかの大学の研究者による共同研究である。1979年から行われており，初期の研究ではRNPの一員であるPostとLeshによる理論枠組み（Postによるマトリックスと，Leshによる翻訳システム）を有理数の学習の記述に適応できるように，理論整備の検討を行なっている。これは，もともと理論枠組み自体は分数（有理数）に特化した形ではなかったためである。そして，後半では，それらの研究を理論的な背景とし，具体的な分数（有理数）の学習場面（トピック）を設計した，指導事例集（Textbook）の作成を行なった。

３　マトリックスの数学的変数性と有理数の下位構成要素

3.1　マトリックス

マトリックスは，RNPのメンバーの１人であるPostがReys & Post(1973)で述べられている。マトリックスの特徴として数学的変数性の軸と知覚的変数性の軸がある(図１)。

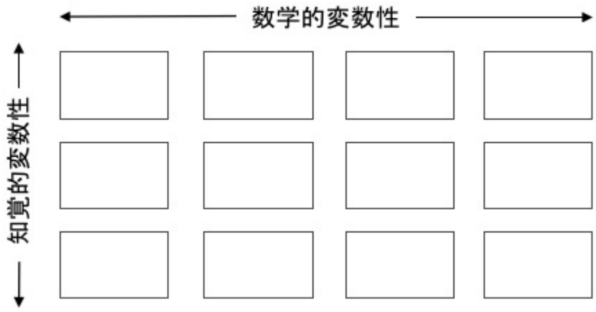

図１　マトリックス［1979］Post&Reys(1979)

この2軸にはそれぞれ，Dienes(1960)が述べる数学的変数性の原理と知覚的変数性の原理が用いられている。数学的変数性は数学に関する内容の一般性の高まり，知覚的変数性はその数学的内容を含む《具体物》[2)]を扱うときの抽象性の高まりを表しているものである。RNPは，これらの軸にどのような項目が入ってくるのかをこれまで検討している。

そして，このマトリックスは項目を変えながらこれまでいくつかの変遷をしている。ここでは特徴的な2つのマトリックスをあげる。Behr et al.(1983)で述べられているマトリックス[1983]では，Kieren(1976)の分数の解釈をもとに，RNPが再定義した有理数の下位構成要素を数学的変数性に用いている（図２）。

数学的変数性

	分数の測定値	比	割合	商	小数	線形座標	演算子
離散							
可算の連続							
連続							

図２　マトリックス[1983]
Behr et al.(1983)

この数学的変数性に用いられる下位構成要素について後述する。また，図２では知覚的変数性を「離散的な題材」，「加算の連続の題材」，「連続の題材」で表している。これは，「離散

的な題材」は離散的な《具体物》について表している。例えばエッグカートンやチップのようなものである。「加算の連続」は面積が加算の対象となるような《具体物》があてはまる。例えば，面積図や10×10グリッド図などである。「連続の題材」は主に一方向の長さを表わすことのできる《具体物》を含む。例えば数直線やテープなど等がある。

マトリックス[1992](図３)では，図２で示したものと少し異なる内容となっている。

	分数円	キズネール棒	数直線	紙	チップ
部分-全体					
測定値					
比					
小数					
演算子					

図３　マトリックス [1992]
Behr et al.(1992)

図３では縦軸に数学的変数性が用いられているが，そこでは，図２とは異なり，「部分−全体」，「測定値」，「比」，「小数」「演算子」があてはめられている。

マトリックス[1992]は，Kieren(1980)で述べられた下位構成要素と演算等の関連を述べた図４をもとにしている。

「部分−全体」は分割した全体と，その部分となるもののいくつ分かを表している。それまで，Kieren (1976) は，「同値」も分数の解釈としていたが，Kieren (1980) は「同値」も「部分−全体」同様の関係にある。しかし，「比」は部分(分子)と全体(分母)との比を表している。そして同値な比 (1:2=3:6など)を表すこともできる。したがって,この「部分−全体」と「比」の中に「同値」の要素が含まれるものとした。

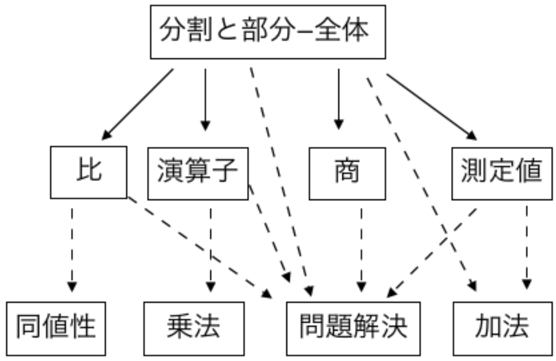

図４　下位構成要素と演算等の関係図
Behr et al.(1980)

「測定値」については,Behr et al.(1983)での解釈を用いると,「分数の測定値」と「線形座標」と区別していた。しかし，図３は，Behr(1980)による関係図で示しているように,演算の加法と関連付けるために用い,具体物によってその違いを区別できることから,数学的変数性を「測定値」としてまとめた形にしたと推察できる。例えば,「測定値」は,テープ(紙)と数直線のなどの具体物により差別化できる。さらに,「分数の測定値」から「量」についての内容を除いた要素を「部分−全体」とした。また,「商」としての解釈や下位構成要素が数学的変数性に含まれていない。これは，「演算子」との関連で述べられているためであると考えられる。

3.2　有理数の下位構成要素

ここまで，RNPのマトリックスの変遷を述べたが，先述のように，マトリックスの１つの軸として，数学的変数性を用いている。これはKieren(1976)で述べられた分数の解釈をもとにしたものである。さらに，Behr et al.(1983)では，有理数の下位構成要素として再定義した（表1）。マトリックスの変遷を見たとき，この表1

- 分数の測定値 (Fractional Measure) は，部分−全体は分数の観念の再概念化を表す。それは具体的な量の単位に関連して量はいくらかという問題に対処する。
- 比 (Ratio) は，2つの互い質の関係を定義している。例えば，同じ部屋の中にいる男女の人数の間の関係といったものを表すときに用いる。
- 割合 (Rate) は，新しい2つ以上の量の間にある関係を表す。例えば,速さは距離と時間 の間の関係。平均測度の計算のような状況などがある。
- 商 (Quotient) は，$\frac{a}{b}$ として表すことができる。計算の分脈 によって，この構成概念は問題場面として示されている。
- 線形座標 (Linear coordinate) は，Kierenの測定の解釈と似ている。それは有理数直線の距離位相と関連する特性を強調する。有理数直線，稠密さ (betweenness)，密度，距離，（不）完全性のような，有理数は数直線上の点，有理数は実数の部分集合という強調点という解釈である。
- 小数 (Decimal) という強調された有理数の 特性として，十進法と関連している。
- 演算子 (Operator) は有理数の関数の観念を付加する。：有理数は変換であるという解釈でという解釈である。

表1 有理数の下位構成要素　Behr et al(1983)

が網羅的に述べられている。この下位構成要素は数学的内容であるため，たとえカリキュラムが異なる場合であっても適応が可能であることが期待される。

3.3　我が国における「分数の意味」

上述の通り，RNPの下位構成要素を用いても我が国の教科書を記述することは可能である。一方，我が国では分数の解釈として，「分数の第一義・第二義」や「分数の意味」としてこれまで多く用いられてきた。これは，問題場面に依存している。この「分数の意味」と下位構成要素の比較を行うことにより，「分数の意味」を考慮したカリキュラムとの適合を期待することができることや，学習順序の根拠付けに用いることが期待できる。そのため，まず，「分数の第一義・第二義」と「分数の意味」の整理を行う。これは，我が国の指導にマトリックスを適応する場合に有用であると期待できるからである。

古藤（1978）によると，「分数の意味」とは，主に「分割分数」，「量分数」，「操作分数」，「割合分数」，「商分数」とされるものである。分数の第一義・第二義は「１をいくつかに等分したものをいくつか集めたものを分数という」というものが第一義であり，第二義とは「商としての分数」である。これらの解釈についてはこれまで様々な文献で述べられており，その内の一つである古藤(1978)では「分数の意味」について以下のようにまとめている（表２）。

同様の解釈は，1961年の『新算数教育講座　数と計算』（以下，古賀(1961)），1969年の『算数教育現代化全書３　数と計算−分数・小数編』（以下，中野(1969)）をはじめとし，多くの文献に述べられている。これらの３つの文献は「分数の意味」を巡って議論を行なっているものではなく，関連性は少ないため，本研究では並列的に扱うものとする。それにより，我が国で述べれられている分数の解釈を整理することが期待されるためである。　古賀（1961）では，「分割分数」と「割合分数」に対して，「例えば，１個のりんごを４等分するとき，そのひときれは四分の一であるといい，$\frac{1}{4}$と書き表す。この$\frac{1}{4}$はりんご１個を分割操作によって得られたものであるから，たしかに「分割分数」とか操作としての分数と言ってもまちがいではなかろうか。しかしこれをつぶさに考察すると，等分したひときれを，もとのりんご１個に対する割合でいいあらわしているのである。そうすると，「割合分数」ともいえる。」（p202）としている。

また，中野(1969)では，「量分数」と「分割分数」に対して，以下のように述べている。「１つのものの端数部分の量を大きさを表すのに分数を用いるアイディアの指導である。このような分数を「量の分数」と呼ぶのである。また，１つのものを分割するという立場から，分数の意味を指導するので「分割分数」と呼ぶことが

- 量分数は「一つの量の様態やパターンを表すことばとして分数概念が用いられる場合，特にこれを「量分数」と呼ぶことがある。$\frac{1}{2}$や$\frac{1}{4}$のような単純な量を表すことばとしての量分数の概念が更に一般化され，例えば量の測定において，$\frac{2}{3}m$または，$\frac{3}{5}L$などと呼ぶときの分数は$\frac{2}{3},\frac{3}{5}$のような分数を，量の大きさを表すという意味で量分数とよんでいる。」
- 分割分数とは，「分数とはその語が表すように，「分ける数」または，「分けられる数」である。つまり，一つの量をいくつかに等分割する操作，または，分割された部分を意味する概念といえる。いずれにしても分割という操作に関連した概念である。」
- 操作分数とは「分割分数の概念には，上述の分割するという操作の他に，分割された片を寄せ集めるという操作もふくんでいる。例えば，$\frac{2}{3}$という分数は，1つの量を3等分するという操作と，その2つ分をよせるという操作の両方を含んでいる。このような見地でとらえられた分数は，量についての操作を重視していると考えられるので，特にこれを「操作分数」と呼ぶ。操作分数はときに「の付きの分数」と呼ばれることがある。」
- 商分数とは「整数の除法の結果である商を分数で表すものである。したがってこのような意味で使われる分数を「商としての分数」または簡単に「商分数」と呼んでいる。」
- 割合分数とは，「2量A，Bの大きさの関係を表す他の方法として割合がある。つまり，AはBを基準として何倍であるかをとらえるのである。$A=\frac{m}{n}B$ ここに割合を表す分数$\frac{m}{n}$が登場する。このように使われる分数は「割合分数」と呼んでいる。$A=\frac{m}{n}B$であることは，A:B=m:nであるので，割合の考えは比の考えに密接に関連している。」

表2 「分数の意味」 古藤（1978）

ある。この2種の分数の呼び名は，1つのものを分割した結果の量を重くみるか，分割するという操作を重くみるかの違いによるものであって，両者を格別に区別して取り扱うには及ぶまい。」

この点から，「分割分数」「量分数」「割合分数」は「○○分数」という異なる表現方法をとっているものの，その違いは文脈によるものであり，数学的な特性としての違いを指しているものではないことを示している。

また中野(1969)ではそれぞれの用語について以下のように述べられている。

「「りんご10この$\frac{1}{2}$」，「だんご9この$\frac{2}{3}$」，「えんぴつ12本の$\frac{3}{4}$」」という場面において，「9この$\frac{2}{3}$」「12本の$\frac{3}{4}$」を扱うとき，これらの分数は「のつきの分数」であるとしている。「のつきの分数」は「操作分数」として呼ばれている。」

また，「「9こ」，「12本」をそれぞれの単位の1とみたとき，その$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$の割合に当たる個数や本数を求める問題」としてみると，この場面では，「割合分数」の見方である。」

すなわち，「「3等分した2つぶんをとる」とか，「4等分した3つぶんをとる」という操作を表わすとみて計算するところから，これを「操作分数」と呼ぶことがある。」としている。(pp. 72-73)

そして以下のように続けている。「単なる分割だけの操作のときは「分割分数」と呼んで区別する。演算という見方をでは，操作分数は割合分数の中に包含され，演算上の違いであり，数としては違いがない」としている。(p73)

このため，「のつきの分数」「割合分数」「操作分数」という名前は「数としての分数」が乗法的に用いられ，乗法的にはたらくことを前提としたときの名前であると解釈することができる。

この解釈は，中野(1969)では，分数の第一義・第二義として関連しているとして，以下のように述べられている。

「１をいくつかに等分したものをいくつか集めたものを分数という」というものが第一義である。(p77)これは，「「量の分数」の指導が分数の第一義への導入に有効であることは明らかだろう(p77)。このとき$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{5}$を「数としての分数」という。あえて「数としての分数」というのは「量の分数」「操作分数」「のつきの分数」「割合分数」などのことばに対比してのことであるに過ぎない。ところが実際には，「数としての分数」と呼ぶ理由が，外にもあるようである。それは分数$\frac{3}{4}$は，あくまでも$\frac{3}{4}$という１個の数であって，１を４等分したものの３倍というように，１，３，４というバラバラの整数によって構成されたものではない，ということを強調するためである。この理由は説得力を持っている。このことをおしすすめて考えてみると，分数の第一義というのを全廃して，分数の第二義だけを分数の定義とした方がよい，という結論に到達するように思われる。つまり「整数aを，０でない整数bで割った結果をの形で表したとき，これを分数という」(pp. 77-78)と分数を定義するのである。これが分数の第２義といわれるものであることについては前に述べた。」(p78)

このように，分数の第一義を「１をいくつかに等分したもの」，第二義を「整数aを，０でない整数bで割った結果を$\frac{a}{b}$の形で表したもの」とし，「分数の意味」としての「○○分数」という表現は，あくまで第一義の中での強調する場面によって呼び方を変えているのであるということが述べられている。そして，その「分数の意味」と第一義・第二義の関連が示されている。

3.4　数学的変数性と我が国の「分数の意味」

前節では，RNPの下位構成要素と我が国の「分数の意味」と第一義・第二義を述べた。
また，それぞれの主張から，我が国に分数についての見方は，数学的な特性の違いではなく，問題場面に依存したものであった。

そのことを踏まえ，次にRNPの下位構成要素と「分数の意味」，第一義・第二義を比較する(図５)。

まず，第一義を「１をいくつかに等分したもの」としているが，これに該当する「分数の意味」は，１を分割すると見ると「分割分数」，等分したものの操作に着目すると「操作分数」，量を表わすものとして用いられると見ると「量分数」，分割するものの全体を１と見ると「割合分数」などである。

これは以下の理由から，第一義と同義であると見ることができる。第一義は「１をいくつかに等分する」とし，基本は単位分数をもととしている。そこには等分する要素と，その単位分数のいくつ分を集めるという加法的な要素が関連する。そのため，等分する「分割分数」，等分したものを操作する「操作分数」，量で表されるものを等分したものを「量分数」は，この点で関連していると言える。ただし「割合分数」は，分割したものを１とみなすという乗除の要

下位構成要素				分数の意味	第一義・第二義
Kieren (1976)	Kieren (1980)	Behr et al (1983)	Behr et al (1992)		
分数	部分−全体		部分−全体	分割分数	第一義
同値分数					
測定値	測定値	分数の測定値	測定値	操作分数 量分数	
		線形座標			
比	比	比	比	割合分数	
		割合			
演算子	演算子	演算子	演算子		
商	商	商		商分数	第二義
小数		小数	小数		

図５　下位構成要素と「分数の意味」，分数の第一義・第二義

素も加わる。このことから，「分割分数」「操作分数」「量分数」「割合分数」は第一義の部分的な見方であると解釈できる。

さらに，これらの「分数の意味」と下位構成要素を比較する。下位構成要素のうち，「部分−全体」は分数で表わすものの全体と，分数で表す部分との関係を意味している。これを連続的な題材で表すとき，全体と等分したもののうちのいくつ分かで表すものであり，離散的な題材であれば，個数全体と表したいものの個数との間の関係を表している。これは，「分割分数」，「割合分数」の見方と共通する点が多いとみることができる。一方で，「操作分数」の単位分数を足し合わせるという操作や，「量分数」は長さや面積の量を対象とする点では「測定値」との関連が強い。これらのことから，下位構成要素の「部分−全体」，「測定値」は第一義と関連するといえる。

しかし，「分数の意味」は場面による分数の見方や操作を対象としているが，下位構成要素は数学的な見方を中心としている点で明らかな違いがある。

まず，下位構成要素の「比」，「割合」，「演算子」と比較する。

「割合分数」は先述のように，「１を幾つかに分割した」もののうち，１を量ではなく「１とみたとき」と割合で表わす。表１では，「割合」について「割合(Rate)は，新しい2つ以上の量の間にある関係を表す。例えば，速さは距離と時間の間の関係。平均測度の計算のような状況などがある。」としている。下位構成要素の「割合」は，割合を表わす分数（有理数）として述べているので，「割合分数」とは完全に一致するわけではない。

また，「演算子」について表１では，「有理数の関数の観念を付加する。」としている。この例として，Kieren(1980)では，演算子はある位置や範囲と，他の位置や範囲とを倍数関係で表わすものと解釈している。例えば１２という長さや面積を，８という長さや面積にするときにかける値を$\frac{2}{3}$として表わすとしている。

「比」の解釈は，表１では「比(Ratio)は，2つの互いの質の関係」を定義している。ここでは具体的に明記されていないが，「：」で表される比の関係についてのことを述べていると言える。

そのため，「割合」「演算子」「比」は下位構成要素として「分数の意味」としての分類が完全にできない。これは，下位構成要素は分数の見方ではなく，表現している数学的な要素を対象として分類しているためである。

次に，第二義は「商として表わす。」というものであり，これは「分数の意味」では「商分数」があたる。これは，下位構成要素としても「商」としており，同じ意味合いであると考えられる。

以上の点から，我が国の教科書の記述をマトリックスを用いて記述するとき，その数学的変数性の項目は，RNPの下位構成要素を用いて記述することにより，我が国で用いられている「分数の意味」を含んでいる。そして，このことから，数学的変数性を「部分−全体」，「測定値」，「比」，「割合」，「商」，「演算子」，「小

数」を用いることが妥当であると考える。これは図２を参考としているが，「部分−全体」を数学的変数性に加える点は，図３の解釈を参考としている。

４　知覚的変数性と教科書の《具体物》

　知覚的変数性も同様に日本の教科書とRNPのTextbookのトピックとの違いが表れるとき，《具体物》に何を用いるかが大きく異なってくる。

　知覚的変数性を表しているものは，マトリックス［1983］での「離散の題材」，「可算の連続の題材」，「連続の題材の解釈」である。Behr et al.(1983)では，「離散の題材」は《具体物》が離散的なもの，例えばチップ（カウンターズ）やエッグカートンである。「連続の題材」は長さや面積のあるものとしているが，主に長さを中心として考えており数直線やキズネール棒，テープ図などがそれに当たる。「可算の連続の題材」では単位で大きさを表したりするので，同じ形でなくても演算で面積の値を求めることにより扱うことができるものをいう。面積図であったり，異なる形のタイルや演算で求めることができるという点ではグラフなども当てはまる。

また，図３では，すでに《具体物》を項目として記入している。

我が国の教科書（啓林館2013年度　発行）で用いられる《具体物》は，正方形の紙，長方形の紙，テープ図，1Lマス，直線，数直線，二重数直線，面積図などがある。また，分数自体を表すものでないということや，一部の演算に特化したものであるという点において，ここで述べる《具体物》には当てはまらないが，「関係図」として表しているものがある。

数学的変数性

知覚的変数性		部分−全体	測定値	比	割合	演算子	商	小数
離散	チップ							
可算の連続	面積図							
連続	長方形の紙 長方形の紙							
	テープ図							
	1Lマス							
	直線							
	数直線							
	二重数直線							

図６　マトリックス（著者作成）

５　マトリックスを用いて記述された教科書の特徴

　以上のことを踏まえ，我が国の教科書の特徴が記述可能なようにトリックスを作成した（図６）。

ただしこれらの軸の順序性は図２の順序をもととしている。

そして，カリキュラムをなす指導例として啓林館の教科書の内容を用いて行なった。その結果をもととし，学習過程を図示したものが図７である。図７の中の数字は扱われている学年を表し，点で書かれている所は分数の単元以外で扱われているものである。

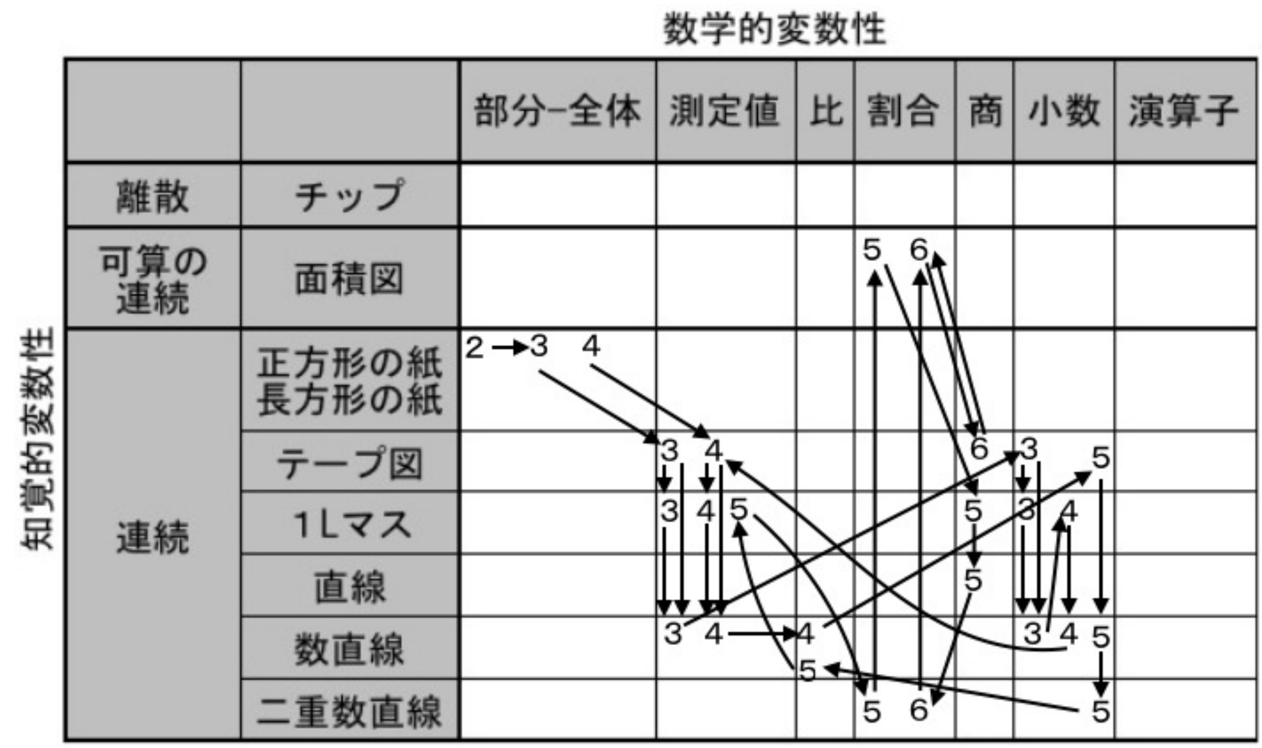

図７　学習過程の傾向の図示

５．１　教科書で見られる特徴

特徴として，以下の点を述べることができる。

〘１〙分数の学習は，2年生の正方形や長方形，円形の紙を折るという活動から入ってる。この学習は，分数の学習の分子と分母の関係を学ぶ。そのためこの学習は「部分−全体」に入る。また，「測定値」では長さとして１ｍのテープや直線，数直線をもとにして考えている。3年生の学習で分数を学習し，その後，同分母分数のたし算・ひき算から異分母分数のたし算・ひき算の学習場面に至るまで用いられている。これは，具体物を加えたり減らしたりする操作によってたし算ひき算の理解の助けにになるからである。

〘２〙用いられている《具体物》は，テープ図や１Lマス図，直線，数直線である。等しい分数を学習する場面では数直線が用いられているが，約分と通分の学習場面では「関係図」[3)]が用いられている。

〘３〙分数×整数，分数÷整数の学習場面ではテープ図と数直線を用いている。これは，のちの二重数直線の見方につながる。分数×分数，分数÷分数では二重数直線と面積図が用いられている。

〘４〙二重数直線は基準となる量を１に合わせており，割合の見方を用いているため，「割合」に含まれると言える。しかし，単元として割合を学習する前に扱われていることと，割合の単元では小数が中心的に用いられており，そこでは「関係図」が用いられている。

〘５〙面積図は１㎡の図を加えたり，分割している。そのため，加法・減法と見ることができる。よって，「測定値」の考えを用いている。

〘６〙小数では，「部分−全体」にあたるものはなく，「測定値」の考えから始まっている。しかし，「小数」と「測定値」が個々の有理数の下位構成要素であるので，これらを記述することができない。教科書では，小数と分数の関連をする場合は0.1と$\frac{1}{10}$を扱う場面で数直線で表されている。

〘７〙離散的な題材として扱っているものがない。比の学習場面では10mLのさじを一つの離散物として表している。RNPのTextbookでは離散的な題材で「部分−全体」関係を学習する場面で用いられている。例えば６個のチップのうち４個が色が違うときに$\frac{2}{3}$で表されることや，テープ図で表された$\frac{2}{3}$と比較する。

〘８〙「演算子」は小数倍の学習に関わっていると考えられるが，小数倍の学習場面ではテープ図と数直線によって二重数直線で表される《具体物》を用いている。また，ここでの学習には［演算子」と「小数」が重なるために記述できない。また，今回取り扱った啓林館の教科書では「分数倍」の学習は扱われてい。

５．２　RNPのTextbookの特徴と我が国の教科書の特徴の比較

先に述べたRNPのTextbookを，我が国の教科書に用いたのと同様に，学習内容及び，扱われている《具体物》を元にマトリックスに適応させた（図８及び図９）。ただし，図６の《具体物》とは異なるものを用いているためにマトリックスに入る項目も異なっている。Textbook2013に関しては図８，Textbook2009に関しては図９で示している。Textbookは学習内容であるトピックごとに分けられており，図中に記入した番号はトピックに付けられた番号であり，この順番で学習される。トピックとは，1時間毎の授業の内容であり，学習の中での活動や，用いる具体物，教師のコメントなどが書かれている。この学習内容及び《具体物》によってマトリックスに該当する。例として，Textbook2013のトピック３（図８中の③に該当）とTextbook2009のトピック20（図９中の⑳に該当）をあげる。Textbook2013のトピック３では，分母が４以上の分数について，分数円（Fraction Circle：図１０で用いているもの）を用いて「全体の半分にあたるものが$\frac{1}{2}$」や「全体を６つに分けている１つのものを$\frac{1}{6}$」を，《具体物》と分数の名称を結びつける学習を設定している。

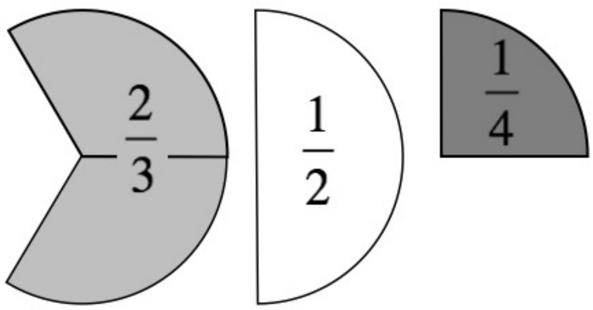

図１０ Fraction Circleを用いた大小比較

このことから，図８の③は数学的変数性の「部分−全体」と知覚的変数性の「分数円」に該当すると言える。

また，Textbookのトピック20では，二重数直線を用いて，分数と整数のかけ算の問題を行なっている。「１時間働くと＄１８得ることができる。$\frac{5}{6}$時間働くといくら得ることができる

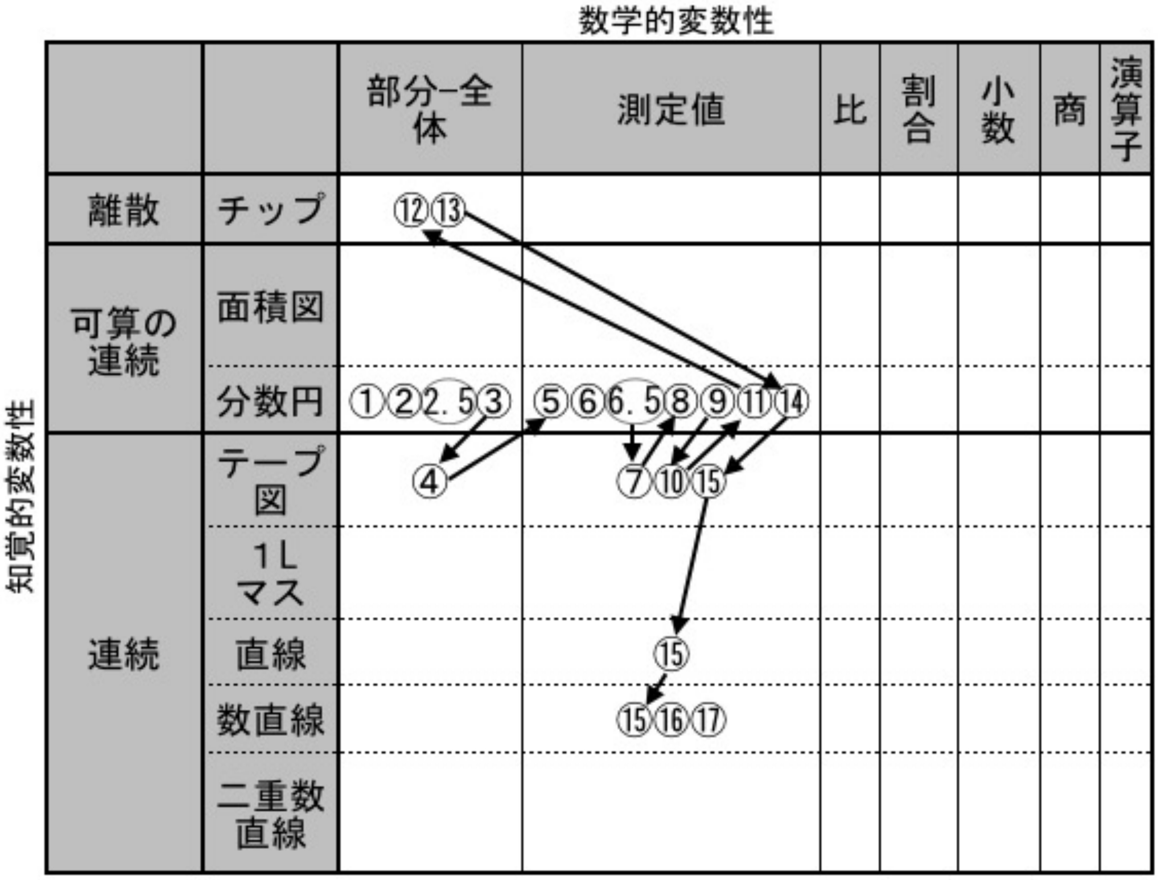

図８　Textbook2013の学習過程の傾向の図示

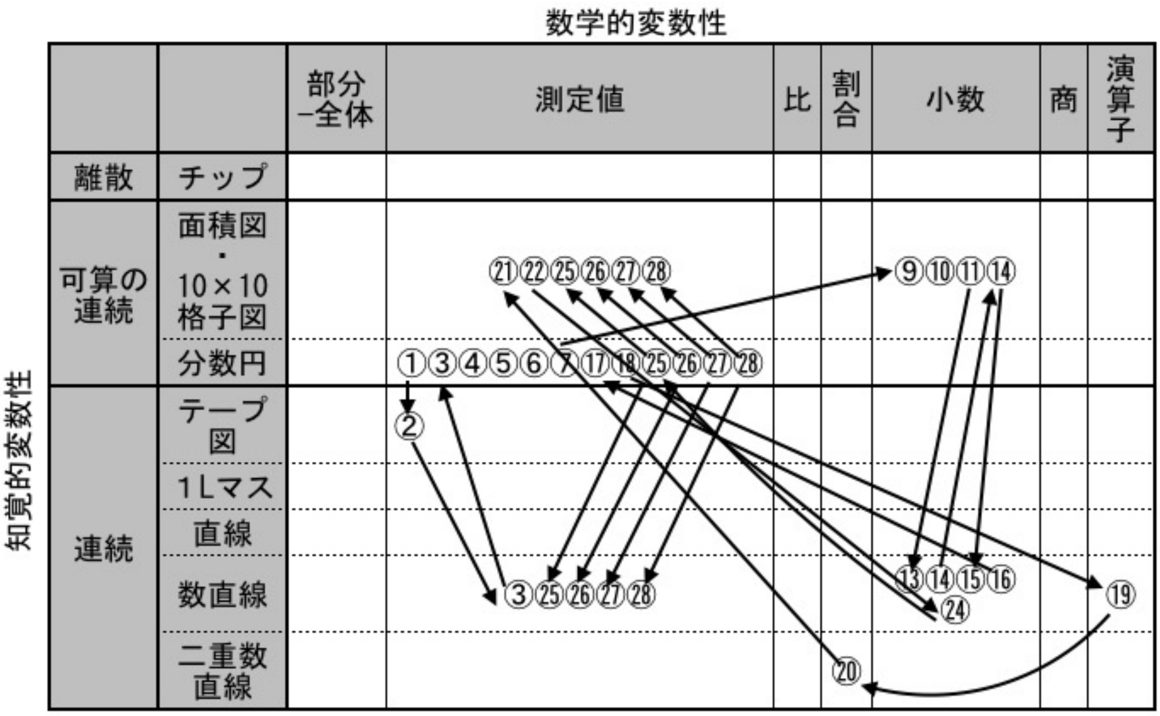

図９　Textbook2009の学習過程の傾向の図示

か。」という問題を＄１８に当たる部分を１とし，二重数直線で表している。この問題では，「１とみなす」という割合として見ているという点で，図９の⑳は「二重数直線」と「割合」に該当するといえる。このTextbookの対象は，2013年は初期の学年で扱われる内容であり，2009年のものは，その続きの学年を対象として扱われている。本稿ではこの2つのTextbookと我が国

の教科書での範囲が一致するので，この２つを用いて記述する。ただし，Textbookではどの学年で扱うということを明確に記述していないため，学年ごとの表記は行えず，図中の番号はトピックの番号である。図９の中で，番号のない⑧，⑫，⑲などは《具体物》を扱わず，記号処理を目的としている。ただし，記号処理を行う過程でそれまで学習で用いて《具体物》が基となっている。また，同じ番号が複数ある場合は，１つのトピックで複数の《具体物》を用いている場合である。

マトリックスを作成する際に，我が国とRNPでは《具体物》が一致しない（［部分−全体］と連続の題材では，我が国の教科書では正方形・長方形の紙であるが，RNPのものは，分数円であるため，図６ではなく，《具体物》を入れ替えたもの用いている。

既に上の〘７〙でも挙げたものと同様，我が国の教科書の指導傾向（図７）と比較すると以下の特徴が明らかになった。

〘７〙で述べた我が国には離散的な具体物を用いた分数の学習がされていない点を指摘した。

また，RNPのTextbookでは，１つの数直線上の点としての数や長さに分数倍し，数直線上の点の数や長さを求めるという「演算子」の要素を含む学習も行なっている。

RNPは導入に分数円を用いている。そして，同値分数や，大小比較などが我が国の指導順と比較して早い段階で行われているという点で違いが見られる。

我が国では分数の乗除に二重数直線や面積図を用いているが，Textbookでは分数円も用いている。これは，RNPが分数円により，加法性，同値性などの学習に有効な具体物としているからである。

さらに，RNPは見積りとして$\frac{1}{2}$をベンチマークに用いて，大小比較を行う学習もトピックに加えている。例えば，$\frac{3}{2}$と$\frac{1}{4}$の大小関係を比べるときに，$\frac{3}{2}$と$\frac{1}{2}$では，$\frac{3}{2}$の方が大きく，$\frac{1}{4}$と$\frac{1}{2}$では，$\frac{1}{4}$の方が小さい，よって$\frac{3}{2}$と$\frac{1}{4}$では$\frac{3}{2}$の方が大きいとするような場面などを想定している。（図１０）。この学習場面でも分数円を用いている。

これらの学習において，分数円を中心に活用している点では長方形や正方形の紙などからテープ図，数直線と移行する傾向の我が国との違いが認められる。

６　おわりに（残された課題）

本研究では，カリキュラムの特徴を明らかにする数学的変数性について，RNPのマトリックスの変遷，下位構成要素の解釈，演算との関係を考慮し，数学的変数性にあてはまる項目について整理した。また，日本の「分数の意味」とRNPの数学的変数性を比較した。

同時に，我が国の教科書において用いられている具体物を知覚的変数性として用いてマトリックスに適応した。これにより，新しいマトリックスを得ることができた（図６）。これにより，我が国の教科書とRNPの作成したTextbookをマトリックスに適応させることが可能であることと，特徴を明らかにすることが可能であることを示した。

これらの特徴を明らかにすることにより，副次的にRNPと我が国の学習過程の傾向の違いもいくつか明らかにすることができた。この違いを明らかにすることにより，その違いをもとに，今後の指導の内容や順序性を設計することや評価することに用いることが期待される。

しかし，マトリックスで明らかになった傾向を評価し，学習指導に反映させるまでは至っていないという点は今後の課題となる。

注

1) Textbookを「教科書」と訳していないのは，RNPの開発したTextbookには，トピックでの活動や，指導の留意点が書かれているため，指導書としての側面が強く，従来の我が国の教科書とは区別するためである。

2)本論文で述べる《具体物》とは，テープや紙，チップなどのような実際に触れることのできるものの他に，テープ図や数直線などのモデル図も含めたものである。

3) 関係図は，RNPの知覚的変数性の条件に当てはまらない点と，《具体物》の性質上，演算の決定するためのものであるとすると，既に関係が明らかになったうえで用いられる関係図については，本稿では《具体物》と扱わないこととする。

参考引用文献

赤羽千鶴・古賀昇一・前田隆一・森規矩男（1961）「新算数教育講座　第一巻数と計算」吉野書房

川口延・中島健三・中野昇・原弘道(1969)「算数教育現代化全書　３数と計算−分数・小数編−」金子書房

古藤怜(1978)「分数の意味」，新しい算数研究，東洋館出版社，pp.2-6

清水静海・船越俊介，ほか(2013)「わくわく算数」株式会社新興出版社啓林館

玉木義一(2014)「The Rational Number Projectの変遷と課題−その理論枠組みに焦点をあてて

−」，全国数学教育学会誌 「数学教育学研究」ず20(2)

Behr, M., Post, T., Silver, E., & Mierkiewicz, D. (1980, August). Theoretical Foundations for Instructional Research on Rational Numbers. In R. Karplus (Ed.) Proceedings of Fourth Annual Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education (pp. 60-67). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (2009) Rational Number Project: Initial Fraction Ideas

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (2013) RationalNumber Project: Initial Fraction Ideas Abridged edition authors: Kathleen Cramer, Terry Wyberg, Susan Ahrendt, Debbie Monson, Christina Miller

Dienes, Z.P. (1960),Building Up Mathematics (Fourth Edition),(1971),London: Hutchinson Educational,

Kieren, T. E. (1976),On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and measurement: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/ SMEAC, 1

Kieren, T. E.(1980),Five faces of mathematical knowledge building. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta

Post, T., & Reys, R. E. (1979). Abstraction Generalization and Design of Mathematical Experiences for Children. In K. Fuson & W. Geeslin (Eds.), Models for mathematics learning. (pp. 117-139). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Reys, R.E. & Post, T. R.(1973). The mathematics laboratory theory to practice.Boston,Prindle, Weber, and Schmidt, Inc.,

付記：本研究は全国数学教育学会第40回研究発表大会の口頭発表「分数の学習指導に関する一考察−The Rational Number Projectの理論枠組みにをもとに−」の資料に加筆修正を加えたものである。

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881–6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/