

ISSN 1881-6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education



<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu>

“指導トピック”作成による分数のカリキュラム開発
–The Rational Number Projectの理論枠組みをもとにして–

玉木義一 *Yoshikazu Tamaki*

vol.17, no.6

Nov. 2014

“指導トピック”作成による分数のカリキュラム開発

-The Rational Number Projectの理論枠組みをもとにして-

鳥取大学大学院 院生 玉木義一

要約

本研究の目的は、分数（有理数）の学習について、理論枠組みをもとに、一貫したカリキュラムを開発するための方向性を示すことがある。この目的は、これまで数多くの分數学習についての先行研究が行われてきたが、理論枠組みを用いてカリキュラム全体を特徴づけたり構成した行研究が少ないという反省から行うものである。

そこで、米国の有理数について研究を行なっているThe Rational Number Project (RNP) の理論枠組みを、我が国のカリキュラムの特徴付けに用いることができるよう検討を行い、RNPの作成する事例案であるTextbookを参考に、“指導トピック”を作成した。それらの手順を示すことにより、カリキュラム開発の可能性を示すことを指摘した。

キーワード：分数、カリキュラム開発、The Rational Number Project、指導トピック

1 はじめに

小学校の分数の学習は、平成20年に学習指導要領が改訂されて以降、第一学年以外の全ての学年で学習されている。また、分数の学習指導に関する研究はこれまで多く行われており、重要なテーマであると言える。これまでの我が国の分数に関する研究は、分数の学習で児童や教師が感じる困難の原因を明らかにするもののが多数行われてきた（能田、1981；石田、1985；他）。

また、分数の学習場面のうち、1つの場面や関連するいくつかの場面を取り上げ、指導法の改善を図るもの（中村、2001；田端、2010；他）、分数の誤った認識の原因を明らかにするものなどもあった（眞鍋、1994；長谷川、2000；長谷川、2003），他。

一方、理論枠組みを持ってカリキュラム全体を特徴付け、学習指導に反映させる研究は少ない（志水、1984¹⁾；吉田、2005²⁾；村上、2009³⁾）。

以上の先行研究から、理論枠組みによってカリキュラムを特徴づけ、なおかつ具体物を用いた学習・カリキュラムを記述し構築する理論枠組みの整備が不十分であるといえる。

この点を踏まえ、理論枠組みを用いて一貫したカリキュラムの検討を行なっている先行研究であるThe Rational Number Project(以下RNP)の理論枠組みに焦点をあてた。これまで玉木(2014a)では先行研究のレビューを行い、課題点を述べた。そして、玉木(2014b)は、RNPの理論枠組みをもととし、我が国のカリキュラムを記述可能にするための理論整理を行なった。本研究では、後述する理論基盤を用いて作成されたTextbook⁴⁾に焦点をあて、それらをもととすることにより、新しい学習カリキュラムの開発の方向性の提案を行う。その方法は、指導事例としての「指導トピック」を作成することを通して、その新しいカリキュラムの作成の方向性を示すことである。これにより、我が国の分数（有理数）学習の指導法や順序性の特徴を明らかにすることや、見直しや改善に寄与することが期待できる。

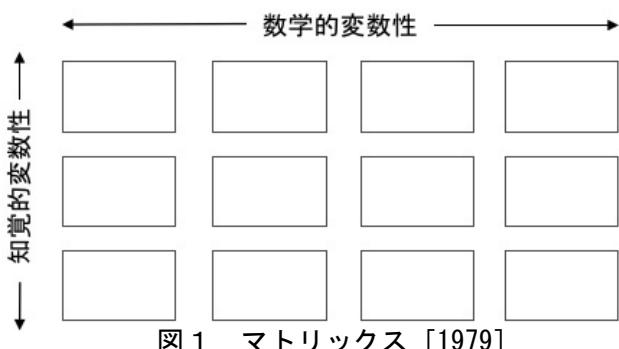
2 The Rational Number Project

RNPはいくつかの研究者による共同研究である。1979年から行われており、初期の研究では、RNPのメンバーの研究による理論枠組み(マトリックス・翻訳システム)を、有理数の学習の記述に適応させるものが行われてきた(Behr et al, 1983; Behr et al, 1992; 他)。この理論枠組みについては後述する。そして近年の研究では、それらの理論枠組みをもとに、指導事例集としてのTextbookの作成を行なった(Cramer et al, 1997; Cramer et al, 2009; Cramer et al, 2013)。

3 理論枠組み

(1) マトリックス

マトリックスはRNPのメンバーの1人であるPostがReys & Post(1973)で述べたものである。マトリックスの特徴として数学的変数性の軸と知覚的変数性の軸がある(図1)。



この2つの軸はそれぞれ、Dienes(1960)の考えをもとに用いられている。数学的変数性は数学に関する内容的一般性の高まりを表すものであり、知覚的変数性は、その数学的内容を含む《具体物》を扱うときの抽象性の高まりを表すものとしている。Reys & Post(1973)では、これらの軸をもとにマトリックスを作成した。これまでマトリックスは、軸に入る項目が検討され、いくつかの変遷を経ている。その中で特徴的な2つのマトリックスをあげる。Behr et al.(1983)で述べられているマトリックス[1983]では、Kieren(1976)の分数の解釈をもとに分数の下位構

成要素を再構成し、数学的変数性に用いている(図2)。

数学的変数性						
	分数円 測定値	比	割合	商	小数	線形直線 演算子
離散						
可算の連続						
連続						

図2 マトリックス [1983]

ここでは知覚的変数性が「離散な題材」、「加算の連続の題材」、「連続の題材」で表されている。これは、「離散な題材」には、離散的な《具体物》が含まれるということを表している。例えばエッグカートンやチップのようなものである。「加算の連続」は面積が加算の対象となるような《具体物》である。例えば、面積図や 10×10 グリッド図などである。「連続の題材」は主に一方向の長さを表わすことのできる《具体物》を含む。例えば数直線やテープなどがある。

マトリックス[1992](図3)の数学的変数性では、図1とは異なり、「部分-全体」、「測定値」、「比」、「小数」、「演算子」を用いている。

	分数円	キズネール棒	数直線	紙	チップ
部分-全体					
測定値					
比					
小数					
演算子					

図3 マトリックス [1992]

マトリックス[1992]は、Kieren(1980)述べられた下位構成要素と演算等の関連についての解釈をもととしている。「部分-全体」は分割した全体と、その部分となるもののいくつ分かを表している。それは、「同値」も同様の関係にある。しかし、「比」は部分(分子)と全体(分母)との比を表している。そして同値な比($1:2=3:6$ など)を表すこともできる。したがって、この「部分-全体」と「比」の中に「同値」の要素が含まれるものとした。

「測定値」については、Behr et al.(1983)での解釈を用いると、「分数の測定値」と「線形座標」と区別していた。しかし図3は、Behr(1980)による関係図で示しているように、演算の加法と関連付けるために用い、具体物によってその違いを区別できることから、数学的変数性を「測定値」としてまとめた形にしたと推察できる。例えば、「測定値」は、テープ(紙)と数直線などの具体物により差別化できる。さらに、「分数の測定値」から量についてのものを除いた要素を「部分-全体」とした。また、「商」としての解釈や下位構成要素が数学的変数性に含まれていない。これは、演算子との関連で述べられているためであると考えられる。

(2) 翻訳システム

翻訳システム (Translation system) は、RNPのメンバーの1人であるLeshが提案したものである。(図4参照:Lesh(1979))。

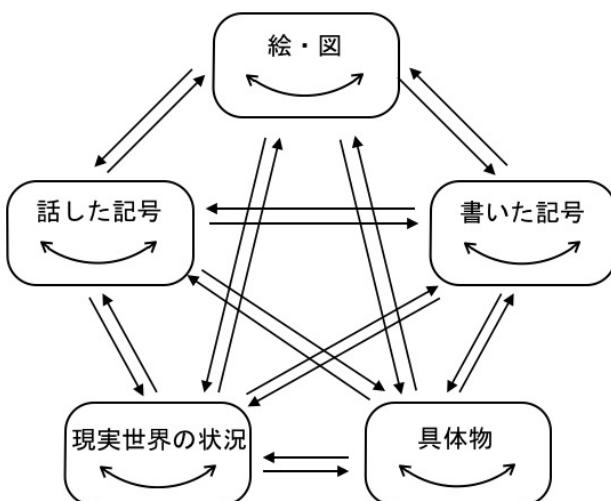


図4 翻訳システム

この翻訳システムはBruner(1966)の活動的(enactive)、映像的(iconic)、記号的(symbolic)の様式からなる考えを基盤としている。これは、第一の様式である活動的な様式から記号的な様式へと表象の理解が移行するというものである。ただし、これらは熟達することにより順序性は無視されるとしている。Lesh (1979) はそこからさらに、数学的な世界と現実世界を結びつけるものとして、絵・図や具体物が架け橋となり、その数学的な世界も話された記号と書かれた記

号とに分けて考えることができると考えた。その考え方をモデルに表したもののが図4である。図の中のそれぞれの表象は、相互の矢印によって結ばれているが、それらはBrunerの熟達すれば自由に移動可能であるという考え方を表していると推察される。また、同じ項目でも矢印で表されている。例えば、「具体物」の中でもテープ図から数直線に移行するような様相を表わすようなときに用いられる。

4 理論枠組みの検討

これまででRNPの数学的変数性として用いている有理数の下位構成要素と、我が国で言われている「分数の意味」と分数の第一義・第二義の関連を示した。(図5:玉木2014b)。

下位構成要素				分数の意味	第一義・第二義
Kieren(1976)	Kieren(1980)	RNP (1983)	RNP (1992)		
分数	部分-全体		部分-全体	分割分数 操作分数 量分数	第一義
同値分数					
測定値	測定値	分数の測定値 線形座標	測定値	割合分数	
比	比	比	比		
		割合			
演算子	演算子	演算子	演算子		
商	商	商		商分数	第二義
小数		小数	小数		

図5 下位構成要素と「分数の意味」、分数の第一義・第二義の対応表

この図5をもとに数学的変数性を部分全体、測定値、比、割合、演算子、商、小数の7つに設定した。また玉木(2014b)では、知覚的変数性として我が国に教科書に用いられている《具体物》⁵⁾の検討も行なった(図6)。

数学的変数性								
		部分-全体	測定値	比	割合	演算子	商	小数
離散	チップ							
可算の連続	面積図							
知覚的変数性	長方形の紙 長方形の紙							
	テープ図							
	1Lマス							
	直線							
	数直線							
	二重数直線							

図6 マトリックス [2014]

これは、我が国の教科書をもとに、カリキュラムの特徴を明らかすることを目的としているためである。そのため、より我が国のカリキュラム記述に応じた形のマトリックスの作成が必要であり、図6のように設定した。ここでは、マトリックスについての検討を行なっているが、翻訳システムについては、我が国においても米国においても表象自体には大きな差が無く、同一のもので記述することは可能であるためである。

5 指導トピックの作成

以上のことと踏まえ、これまでの理論枠組みをもとに事例案の作成をおこなう。指導トピックの作成にあたり、どのような項目の設定が必要であるのかを述べる。Textbookに書かれている内容は以下の表1の通りである。

表1 Textbookの項目

- ・トピックの概要
- ・扱う《具体物》
- ・大きいグループでの導入(発問と生徒に求める活動)
- ・コメント(発問の意図と注意点)
- ・小グループやパートナーとの活動
- ・練習問題
- ・まとめ
- ・翻訳(翻訳システムに従うもの)

RNPのTextbookでは、表のような事が項目として述べられている。レッスンの内容と《具体物》は、マトリックスの数学的変数性と知覚的変数性にそれぞれ対応している。トピックの発問や活動は翻訳システムの項目を用いている。

玉木(2014b)では、RNPのTextbook(図8、図9；次頁)と我が国の教科書(図7)をマトリックスを用いて⁶⁾特徴を明らかにし、それらを比較した。その中でいくつかの違いを述べた。

図7と図8は、Cramer et al(2013)とCramer et al(2009)のそれぞれのTextbookのトピックごとにマトリックスへと適応させ、並べたものである⁷⁾⁸⁾。

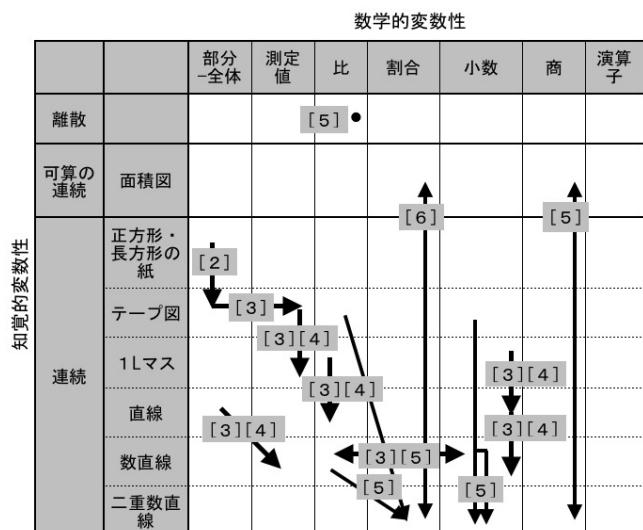


図7 学習過程の傾向の図示

本稿では、以上の比較によって明らかにされた、マトリックス内の「離散の題材」を扱っている学習が、我が国では行われていないという指摘をもとに、指導トピックとして作成している(資料1参照)。ただし、図7で示したものでは、我が国で行われている第5学年での比の単元が含まれている。ここでは「離散の題材」を扱っているが、分数の単元内では行われていない。Cramer et al(2013)のTextbook(図8)では、この「離散の題材」の学習を、テープを用いた「測定値」の学習の後に行なっている。これを我が国の教科書の学習(図7)に対応させると、3年生でテープ図で分数の学習の導入を行なった後に「離散の題材」を用いた学習を行うと仮定することができる。第4学年で行う学習内容では、仮分数や帶分数であるため、第4学年で行うには「離散の題材」は適しておらず、よって、第3学年で用いることが望ましい。また、そこでの数学的変数性の項目は「部分-全体」にあたる。新しく《具体物》(チップなど)を扱い、それまでの学習で用いた《具体物》

(テープ、正方形や長方形の紙など)や表現(分数の表現形式)と関連を持たせた学習が想定される。また、この流れを翻訳システムに当てはめると「具体物」から「具体物」へと表象が変化する。例えば、テープからチップである。また、「具体物」を、「書かれた記号」へと表象が変化する。例えば、チップから分数としての表

数学的変数性

		部分-全体	測定値	比	割合	小数	商	演算子
離散	チップ	(12)(13)						
可算の連続	面積図							
知覚的変数性 連續	分数円	(1)(2)(2.5)(3)	(5)(6)(6.5)(8)(9)(11)(14)					
	テープ図	(4)	(7)(10)(15)					
	1Lマス		(15)					
	直線		(15)(16)(17)					
	数直線							
	二重数直線							

図8 Textbook2013の特徴

数学的変数性

		部分-全体	測定値	比	割合	小数	商	演算子
離散	チップ							
可算の連続	面積図 ・ 10×10 格子図		(21)(22)(25)(26)(27)(28)			(9)(10)(11)(14)		
知覚的変数性 連續	分数円	(1)(3)(4)(5)(6)(7)(17)(18)(25)(26)(27)(28)						
	テープ図	(2)						
	1Lマス		(3)(25)(26)(27)(28)					
	直線							
	数直線							
	二重数直線							

図9 Textbook2009の特徴

現形式である $\frac{b}{a}$ といったものである。また、

「具体物」から「話された記号」に表象が変化する。例えば、テープやチップをもとに、口頭で説明するような活動を含む学習が想定される。ただし、我が国の学習では、第3学年のテープを用いた「測定値」の学習では「1 m」を基準としているが、RNPの用いているテープには具体的な長さの記述がない点での違いはある。

また、この指導トピックでは、どのような場面において、どの《具体物》が適しているのかということを生徒自身が選択できるような学習も取り入れることを想定している。

これは、「離散の題材」を扱っているトピックであるTextbook (Cramer et al, 2013) のLesson12では、文章問題で場面により選択するようになっていたり、その次のトピックのLesson13では、分数の大小比較をおこなうことにより、チップで用いるよりもテープ図などの長さの含まれる《具体物》を用いた方がよい学習場面を想定し、生徒が、場面に適した《具体物》を選択できるような活動を設定している。

また、この「離散の題材」は、加法・減法の演算を行う上で混乱を生じる問題がある。しかし、それも問題の場面による《具体物》の選択を考えることにより、解消することができる。

「離散の題材」を扱うよさとして、わり算との関連や比の学習へと移行しやすいというよさを含んできると考える。

以上の点を踏まえ指導トピックの作成を行なった。

6 おわりに（残された課題）

本研究では、RNPの理論枠組みに焦点をあて、我が国のカリキュラムを用いることができるよう検討し、カリキュラムの開発の方向性を示すために指導トピック（資料1）を作成する手順を示した。この作成に用いられたRNPの理論枠組みは、有效地働くことが期待される。

しかし、この理論枠組みで作成した指導トピックが学習において有效地機能するかどうかの吟味については、実践等を行なって検討する必要があり、残された課題である。また、本研究では1つの指導トピックによるものであり、理論枠

組みによって全ての指導トピックを完成させ、一貫したカリキュラムを作成することも残された課題である。

（註）

- 1) 志水(1984)では、児童に対して調査問題を行い、児童の理解度により分數学習の順序性の検討を行なっている。理解度をもとに教材の結びつきを検討し構造化しているが、本稿では、教材自身の理論構造を元とした理論基盤を構築した面があるので、本稿とは異なる立場である。
- 2) 吉田(2005)では、ヴィゴツキーの理論に基づき、分數概念の素地となる子どもの生活的概念の検討を行なっている。理論の枠組みを用いて特徴付けを行なっているが、対象が分數概念の素地であり、カリキュラムそのものを対象とはしていない。
- 3) 村上(2009)では、Kierenの分數(有理数)の意味に着目し、分數から有理数への過程を「量空間から、単位量への働きかけ」としている。この点に関しては本稿の理論基盤に示唆を得るものであると考える。しかし、カリキュラムの考察として用いる場合、RNPの研究では具体的な教具を用いた学習の順序性を考察の対象としており、より考察の対象として適切であると考える。
- 4) Textbookは我が国の教科書とは異なり、学習の展開（ウォームアップ問題、大人数での導入、小さなグループでの学習、ワープアップ問題、概要、）と、指導者への留意点や学習トピックのめあてなどのコメントが記されており、指導書としての側面が強く、従来の我が国の教科書と区別するために本稿ではTextbookとする。
- 5) 本論文で述べる《具体物》とは、テープや紙、チップなどの実際につれることのできるものの他に、テープ図や数直線などのモデル図も含めたものである。
- 6) K社による教科書を用いている。図注の矢印は学習の順番を示すものであり、番号は扱う学年を示している。

- 7) Cramer et al(2013) (図7) とCramer et al(2009) (図8) では、それぞれ初期の有理数の学習と、その後の有理数の学習についてのトピックについて書かれている。これは我が国の教科書と学習の範囲と適応年齢がほとんど同じであるので比較可能である。また、このマトリックスは我が国と比較しやすいように数学変数性は同じで、知覚的変数性に当たる《具体物》は記述されているものを、特徴に適応させて分類している。
- 8) 図7、図8では番号のないトピックもあるが、そこでは具体物を用いていないためである。また、複数ある場合は、1つのトピック内で複数の具体物や下位構成要素が存在するためである。

引用・参考文献

- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.
- Bruner, J. S. On cognitive growth. In J. S. Bruner, R. R. Oliver, & P. M. Greenfield (Eds.). Studies in cognitive growth. New York: Wiley, 1966.
- Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (2009) Rational Number Project: Initial Fraction Ideas
- Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (2013) RationalNumber Project: Initial Fraction Ideas Abridged edition authors: Kathleen Cramer, Terry Wyberg, Susan Ahrendt, Debbie Monson, Christina Miller
- Dienes, Z.P. (1960),Building Up Mathematics (Fourth Edition),(1971),London: Hutchinson Educational
- Kieren, T. E. (1976),On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers.
- In R. Lesh (Ed.), Number and measurement: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/ SMEAC, 1
- Kieren, T. E.(1980),Five faces of mathematical knowledge building. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta
- Lesh, R (1979). Mathematical learning disabilities: Consideration for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowski (Eds.), Applied Mathematical Problem Solving. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Post, T., & Reys, R. E. (1979). Abstraction Generalization and Design of Mathematical Experiences for Children. In K. Fuson & W. Geeslin (Eds.), Models for mathematics learning. (pp. 117-139). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Reys, R.E. & Post, T. R.(1973). The mathematics laboratory theory to practice.Boston,Prindle, Weber, and Schmidt, Inc.
- 石田忠男. (1985). 分数小数の意味理解はなぜむずかしいか. 『教育科学 算数教育』, 327, 21-27. 明治図書.
- 志水廣. (1984). 「児童の理解度から見た分数教材の構造化:-4年生の分析を中心に-」 日本数学教育学会誌 66(2), 3-7
- 玉木義一(2014a) 「The Rational Number Projectの変遷と課題-その理論枠組みに焦点を あてて-」, 全国数学教育学会誌 「数学 教育学研究」 20(2) pp. 183-196
- 玉木義一(投稿中) 「The Rational Number projectの “マトリックス” に焦点をあてた理論的考察 -理論枠組みの検討及び我が国の教科書とRNP の “Textbook” への適応」
- 田端輝彦. (2010). 「分数の乗除法の意味指導に関する一考察:比例関係を顕在化させた指導を通して」 数学教育論文発表会論文集 43(1), 121- 126
- ディーンズ. (1977). 「算数数学の創造的活動」 片桐重男 訳, 吉田耕作, 赤攝也監修(ディーンズ選集 / Z.P. ディーンズ著, 1)新数社

中村享史. (2001). 「分数の除法における数学的記述の分析」 数学教育論文発表会論文集 34, 181- 186

能田伸彦. (1981). 「子どもの分數学習に関する研究:指導前と指導後における分數理解の調査を中心」 日本数学教育学会誌. 臨時増刊, 数学教育学論究 37, -29

長谷川順一. (2003). 「量分数の概念理解に関する調査研究:『分数』の学習を終えた4年生を対象として」 日本数学教育学会誌 85(10), 2-10

長谷川順一. (2000). 「量分数概念の理解に関する継時的研究:小学校3~4年生を対象として」 日本数学教育学会誌 82(12), 2-14

ブルーナー. (1977). 田浦武雄・水越敏行訳 .「教授理論の建設」, 黎明書房

真鍋達貴. (1994). 「量分数に関するあるミスコンセプションのモデル化とその獲得過程の理論的分析結果について」 数学教育論文発表会論文集 27, 89-94

村上一三. (2009). 「分数の意味論的/数学的考察: 量から有理数への一般化・抽象化のプロセスに基づいて」 数学教育論文発表会論文集 42, 289-294

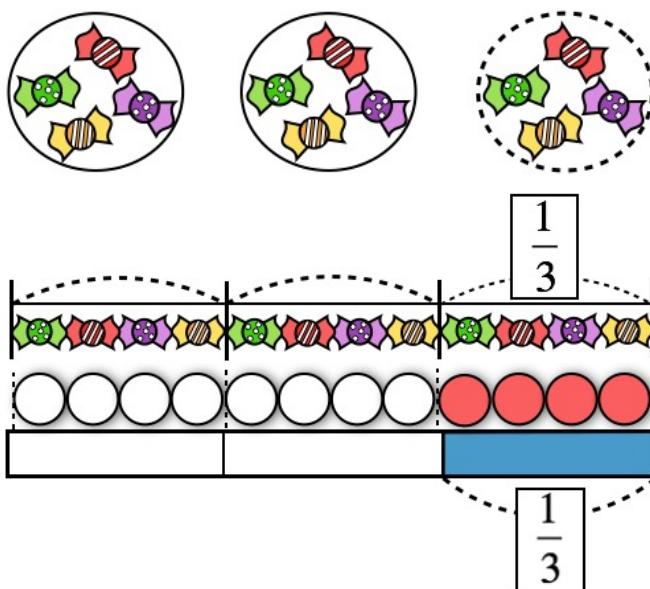
吉田香織. (2005). 「ヴィゴツキー理論に基づく『分数概念の素地となる子どもの生活的概念』に関する日米比較調査: 分数概念の構造と原理の同定」 :全国数学教育学会誌 「数学教育学研究」 11, 115-129

付記: 本研究は日本数学教育学会第49回秋期研究大会ポスター発表「分数のカリキュラム開発に関する研究-The Rational Number Projectをもとにして-」の発表内容と当日資料に加筆修正したものである。

【学習の概要】

チップを用いることによって、分数の多様な表し方を学習する。

【問題】12このアメを3人で分けると、1人分は4こである。1人分は全体のどれだけになるか。



☆おなじように分数で表わすことができる。

【練習】 $\frac{1}{5}$ を表しているものを選べ。

- (1)みかん10こを5人で分けたときの1人分。
- (2)1mのテープを5つに分けた1つ分。
- (3)卵15個のうち、3こを使ったときの、使った卵。
- (4)10cmのひもを2cmずつに分けたときの1つ分

【コメント】

2種類の《具体物》（チップとテープ）を用いて考えさせる。
これまでの学習ではテープを用いて分数を表わしているが、ここではチップ（離散的な題材）によって表わす学習を行う。

チップで表したもののが、これまで学習したテープで表した分数や、分数の表現形式で表わすことができるようになります。

【練習】では《具体物》を用いて考えさせる。そのときに、チップを用いるときは全体でいくつ必要なのか、表わす部分はいくつなのかということを確認させる。

【翻訳】《具体物》から《具体物》，《具体物》から記号。

編集委員

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 tsyabe@rstu.jp

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 mizoguci@rstu.jp

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

投稿規定

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
 - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
 - 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
 - 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
 - その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/>