ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

問題構造の変容による数学的活動を捉える枠組みの構築

–その背後にある理解の変容と連関–

尾﨑正和

vol.12, no.6

Dec. 2009

鳥取大学 数学教育学研究室

問題構造の変容による数学的活動を捉える枠組みの構築

—その背後にある理解の変容と連関—

尾﨑　正和
鳥取大学大学院地域学研究科

1. はじめに

算数・数学教育における「理解」に関する研究は，特に教授－学習過程に着目した理論的及び実践的研究の中に多くみられる．学習者の「わかる」という行為にはどのような活動が存在し，またいかなる活動が必要となるのか．児童・生徒の算数・数学の学習において，その内容と方法に関する理解の側面からの検討は今後も重要であろう．しかし，「理解」という言葉の意味やその用いられ方は多種多様であり，曖昧さを感じないわけではない．理解という不可視な対象に対して，Pirie と Kieren（1992）の超越的再帰モデルは生徒の内部に生起する理解を，可視化するため学習者の理解の過程を水準化しており，学習者の活動の様子や活動記録などを通して学習者の理解過程を表現している．そのようにすることで，学習者の理解過程が可視化され，教授的示唆を得ている．このことから，理解を可視化するにあたり，数学的活動に着目し，理解を捉えていくことが有効であると言える．理解を数学的活動から捉えられるのであれば，児童・生徒が算数・数学の内容や方法を理解するにあたって，どのような数学的活動の展開が理解をもたらすのか．また，そのためには，どのような教師の指導が必要であるのかは，算数・数学教育において今後も検討されなければならない課題であると言えよう．

本研究では，これらの課題を検討していくために，まず児童・生徒の算数・数学の学習過程にみられる具体的な様相を取り上げ，理解そのものの解釈について検討するものである．次に，その検討の上に理解の対象を明確にし，理解を導くための算数・数学的活動の分析と開発を行う．さらに，授業構成を試みるために，算数・数学的活動の展開を推し進める教師の指導の在り方についても検討するものである．

そこで本稿の目的は，子どもの数学的理解の変容を知るために，子どもの学習において顕在化される数学的活動の変容を捉える枠組みを構築することである．数学的活動の変容を捉える枠組みを構築することで，教師が学習者の数学的活動の学習水準を設けることができ，新たな数学的活動へと推し進めるための支援を与える手助けになると考えられる．また，その枠組みによる数学的活動の違いを見ることによって，理解の変容を明らかにすることができると考えられる．

そのために本研究では，数学的活動の変容を「一般性」と「構造」という 2 つの軸によって記述する．言い換えれば，数学的活動の変容を「一般性」と「構造」によって特徴付けることで，一連の数学的活動の分類を明確化する．このとき，具体例を基に描き出された異なる数学的活動を「knowing that」及び「knowing how」の視点によって解釈することで，活動の背後にある学習者の理解の変容を説明することを試みる．

2. 数学的活動の特徴付けと枠組み

2.1. 数学的活動の特徴付け

能田（1983）は数学的活動を 2 つの軸によって分類している．1 つ目の軸は一般性についてであり，その中で低い，高いの 2 つに分類している．そして，2 つ目の軸は構造についてであり，その中で単純と複雑の 2 つに分けている．2 つの軸とそれぞれの 2 つの分類により，数学的活動を 4 つに分類している．尾﨑（2009）では，その一般性と構造の解釈について，具体例を基に述べている．そして，その中で，構造の差を「きまりや法則，解決に用いる手続き」とし，一般性の差を「特定の具体的な場面ではなく，きまりや法則への着目」としている．

そこで，数学的活動を一般性や構造の変容によって，全体として構成される活動と定義し，数学的活動を特徴付けていく．一般性は特定の具体的なものから同等の構造である他の問題への適応であり，数学的活動の広がりを横軸にとると図 1 になる．なぜならば，特定の具体的な問題の解決は，同じ構造をもった問題への適応によって図られると考えるからである．一方，構造は単純なものから複雑なものへと深まっていくものであり，数学的活動の深まりを縦軸にとると図 2 になる．なぜならば，特定の具体的な問題の解決は，その構造を複雑にした

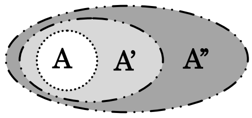


図 1

ものに取り込まれていくことによって図られると考えられるからである．

数学的活動の一般性は，図１が示すように，同じ構造をもった同程度の問題への適応によって広がると考えられる．一方，数学的活動の構造は，図 2 が示すように，単純な構造を統合しながら複雑な構造へと深まると考えられる．また，より複雑な構造の数学的活動は，一般性が高く，かつ単純な構造の数学的活動をも含むものである．これらのことを示したものが図３の「数学的活動の特徴付け（第１次的な階層モデル)」である．

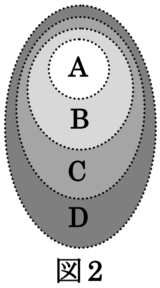


図2

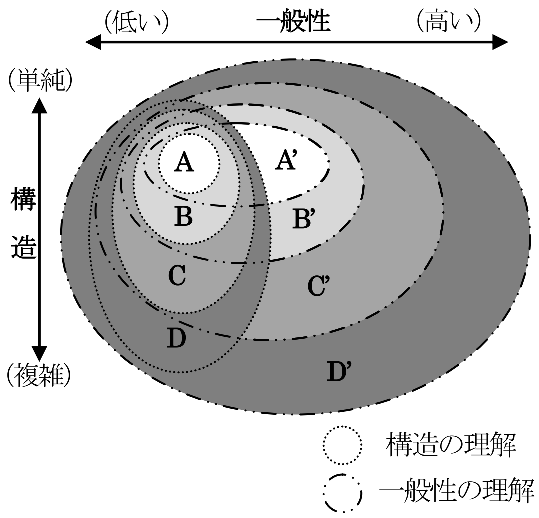


図３　数学的活動の特徴付け
第１次的な階層モデル

図３は，横軸に一般性の低い，高いをとり，縦軸に構造の単純，複雑をとる．例えば，ある構造Ａに対し，その同等の構造であるA'に適応することで数学的活動が広がると考える．また，A（A', A", …）よりも構造の複雑なBの活動をすることはAの活動を含めて深まっていくと考える．言い換えれば，より複雑なBの数学的活動は，Aのみでなく A'をも含むと考えるものである．

2.2. 数学的活動の変容過程の枠組み

第１次的な階層モデルは数学的活動の階層を示したものであり，ここでは，数学的活動の変容過程の枠組みについて述べていく．

Ａの活動から一般性を広げるとき，数学的活動は横軸の変容であり，A から A', A'から A"へと広がると考える．そして，その数学的活動の広がりは，特定の具体的な場面の数学的活動のみではなく，同等の構造の問題へと適応できるような数学的活動になると考える．また, A より複雑な構造である B へと進む数学的活動の変容過程は，A から B のみではなく，A'から B, A"から B への変容が考えられる．そのことを示したものが図４である．A から A' へと数学的活動が広がったように B から B'の間にも数学的活動の広がりが考えられる．あるいは，より複雑な変容においては，A から B，B から B'のみではなく，A'から B，A'から B'への変容も考えられうるものである（図５)．この数学的活動の変容過程を経ることでより一般性が高く，かつ，より構造の複雑な数学的活動につながるものである．

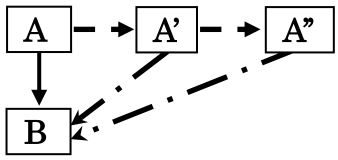


図４

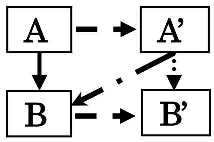


図５

しかし，必ずしもすべての数学的活動の変容が今述べたこの過程を経るわけではない．また，この順序で変容していくものでもない．それは，実際の問題解決において，学習者によって多種多様であると推測される．例えば, A から A', A"と一般性を広げ，B，C へと構造を深めていく．この後に，C'へと一般性を広げる際に困難となり，B'へ変容し，C'へと変容することが考えられる（図 6)．以上の議論を示すと数学的活動の枠組みである図７（次ページ）になる .

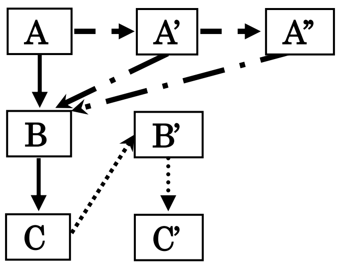


図６

図 7 は図 3 と同様に横軸に一般性の広がりをとり，縦軸に構造の深まりをとる．A の活動は a_1 の問題にとってなされると考えられる．そして，同等の構造であり，類似の問題である a_2，a_3，a_n によって A'へと一般性を広げるものである．

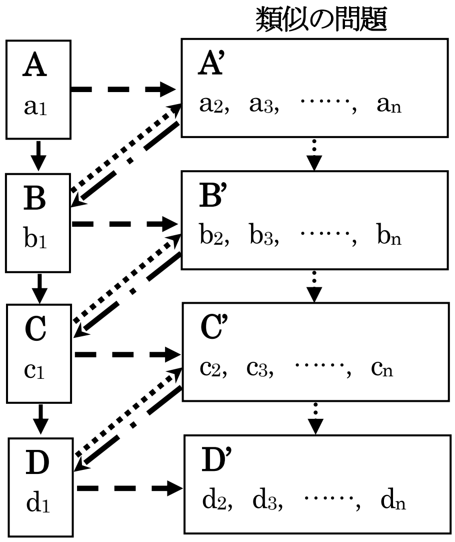


図７　数学的活動の枠組み

同等の構造の中での一般性の低い活動から一般性の高い活動

一般性の低い単純な構造の活動から一般性の低いより複雑な構造の活動

一般性の高い単純な構造の活動から一般性の高いより複雑な構造の活動

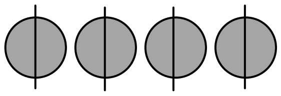
一般性の高い単純な構造の活動から一般性の低いより複雑な構造の活動

一般性の低い複雑な構造の活動から一般性の高いより単純な構造の活動

2.3. 数学的活動の特徴付けと枠組みの検討

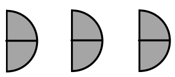
2.3.1. 事例の構成

第１次的な階層モデルについて具体例を基に検討していく．問題はわり算を異分母の単位分数の和で表現していくものである．例えば，$4\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$ で表され，この解決の１つの手続きは以下の通りである．



4 を二等分すれば $\frac{1}{2}$ が 8 つになるので，その $\frac{1}{2}$ を 5 で分けられる．

$4\div8=\frac{1}{2}$ ・・・一人分



残った 3 つの $\frac{1}{2}$ をそれぞれ二等分にすれば $\frac{1}{4}$ 6 つになるので，5 で分けられる．

$\frac{1}{2}\div2=\frac{1}{4}$ ・・・一人分

残りの $\frac{1}{4}$ を五等分にすれば，$\frac{1}{20}$ が 5 つになるので，5 で分けられる．

$\frac{1}{4}\div5=\frac{1}{20}$ ・・・一人分

よって，$4\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$

検討していくためのそれぞれの問題構造は以下のものである．

問題構造１	$3\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$
問題構造２	$5\div9=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$
問題構造３	$3\div8=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$
問題構造４	$4\div5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$
問題構造５	$5\div7=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{168}$

構造と一般性について考えるなら，表現の仕方は 2 つの単位分数の和から，3 つ，4 つ……と続いていく．同じ 2 つ，3 つの単位分数の和であっても最初が $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$ と変化することによって，子どもたちの数学的活動には違いがあると考えられる．そこで，問題構造１から問題構造５によって導かれる数学的活動について，図７で提案した枠組みと対応させながら，これら５つの数学的活動の質的相違を明確にしておきたい．同時に，この分析は，図７の枠組みの有用性を示すことになると考える．

2.3.2. 数学的活動の特徴付けの検討

問題構造１と問題構造２はどちらも２つの単位分数の和であり，最初が $\frac{1}{2}$ で表わされている．このことから，問題構造１と問題構造２は同等の構造である．同等の構造であるので，どちらも同じ手続きを用いることで解決できる．しかし，問題構造１を解決できたとしても，その手続きを問題構造２へ適応させるということは学習者にとって，１つの困難であり，別の数学的活動である．本構造は「割る数」と「割られる数の２倍の数」との差が１となっている．そのような問題を多く解くこと，適応させることで数学的活動の一般性が広がるというものではない．なぜならば，それは特定の具体的な場面にすぎないからである．単に解くだけではなく，解決の共通点を導き出し，同様の問題を作ることで数学的活動の一般性が広がる．このようにすることで，ある問題から一般性が広がると考える．この数学的活動を第１次的な階層モデルに対応させるならば，問題構造１が A であり，問題構造２が A'である．

問題構造３は問題構造１，２と同様に２つの単位分数の和で表わされているが，最初の単位分数は $\frac{1}{3}$ である．ここに今までの活動との構造の差を見ることがで

きる．最初を$\frac{1}{3}$にするためには，「割る数」と「割られる数の３倍の数」との差が１になるわり算でなければならない．最初が$\frac{1}{2}$や$\frac{1}{3}$ になるのは割る数と割られる数の数量関係によって変わっていく．そのことを理解し，解決したならば，最初が$\frac{1}{4}$や$\frac{1}{5}$になったとしても，そこに子どもたちにとっての大きな構造の差はない．その時，今まで別であった問題構造 1，問題構造２は問題構造３の特殊の場合であり，問題構造３の数学的活動の中に統合される．この数学的活動を第 1 次的な階層モデルに対応させるならば，問題構造 3 はＢである．

問題構造４は３つの単位分数の和で表わされている．ここに構造の差を見ることができる．3 つの単位分数の和で表わすためには，割られる数を一度分けるだけでは残りを１つにすることができない．残りを１つにするために繰り返し行わなければならない．この数学的活動において，最初の単位分数がいくつであっても構造の差はない．なぜならば，問題構造３において問題構造 1，2 が統合されているからである．構造が複雑になっているので問題構造４を第１次的な階層モデルに対応させるとＣである．

問題構造５は４つの単位分数の和で表わされている．ここに構造の差を見ることができる．この段階の数学的活動にまで達すれば，この後に５つ，６つと単位分数の数が増えても，子どもにとっての構造の差はない．問題構造５を第１次的な階層モデルに対応させるとＤである．

これまでに問題構造１から問題構造５までを第１次的な階層モデルに対応させた．モデルに適応させると図８である．図８では，上記の５つの問題構造だけでなく，一般性を広げる問題構造であり，同等の構造である類似な問題も加えてある．

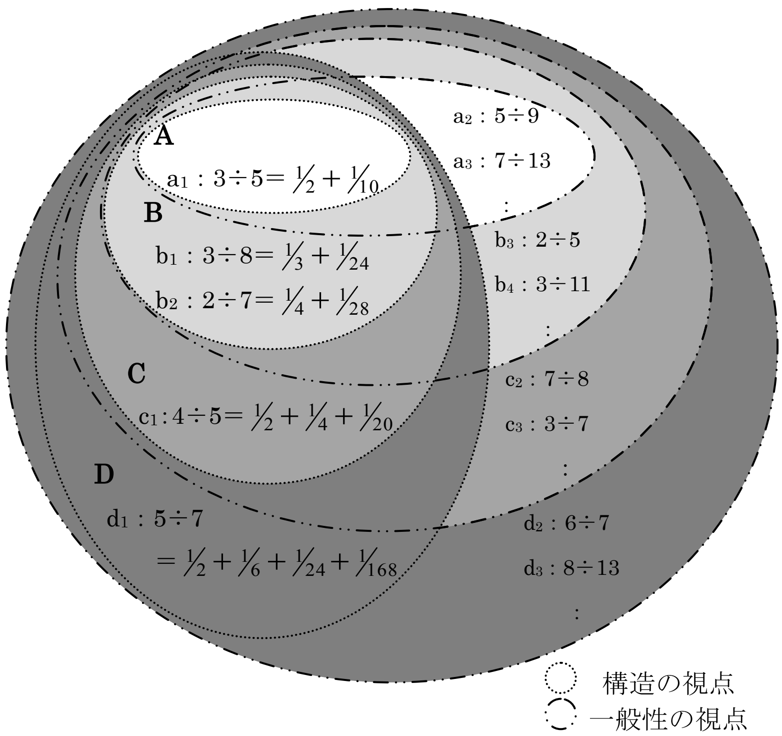


図８　具体例を適応させた第１次的な階層モデル

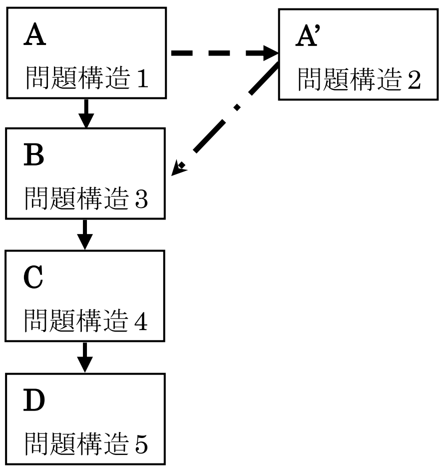


図 9　事例に基づく数学的活動の変容過程

2.3.3. 数学的活動の枠組みの検討

上記の事例を基に数学的活動の枠組みを検討していく．

問題構造 1, 問題構造２はそれぞれＡ, A’であった．一般性を広げるＡからA’の変容は横軸である．問題構造３はＢであり，構造を複雑にしている．ここでは縦軸への理解の深まりである．さらに，問題構造 4，問題構造５はそれぞれＣ，Ｄであり，Ｂ以降は一般性を広げることなく，構造を深める数学的活動の変容をしている．

数学的活動の変容を図７に対応させたものが図９である．構造Ａの段階で一般性を広げることにより，それぞれの違いと共通点から，Ｂ，Ｃ，Ｄ では一般性を広げなくとも，構造を深めるのみでの数学的活動である．

3. 数学的活動の枠組みと knowing that，knowing how

3.1. knowing that と knowing how

清水（1987）は理解の過程を「knowing that」，「knowing how」の２つに分けている．具体的には，knowing that は「わかろうとしている対象がどのようなものかを知るという理解」を意味し，knowing how は「それをどのように知ったのかという理解」を意味するものとしている．また，knowing that と knowing how の異なる点として以下の２点を指摘している（清水 1983）．その一点目は，「knowing that が事実性の認識であるという点」であり，もう一点は「knowing how が，alternative である」ということである．

言い換えれば，学習において knowing that は学習の成果・結果であり，knowing how は学習の過程であり，手続きであるとも言えよう．

3.2. 数学的活動の枠組みと２つの理解

問題構造の変容による数学的活動を捉える枠組みを検討してきた．ここでは，問題構造から導かれる数学的活動の枠組みを理解という視点から検討している．

knowing that は学習の成果・結果であり，解であるので，図８に書いてある式と解である．knowing that の理解は，それぞれの数学的活動がどの階層に対応しているか判断することができるものである．なぜならば，解によって，数学的活動の違いを見ることができるからである．数学的活動を区別することにより，理解の深まり，広がりを見ることができ，次への学びを見出すことができる．また，knowing that から，解決に用いた手続きを読み取ることができると推測される．なぜならば，解は手続きによって導き出されるものであり，その手続きが違えば，解も変わってくるからである．

knowing how は解決に用いる手続きである．問題構造１と問題構造２は同じ構造であった．問題構造１の解決は行えるが，問題構造２の解決が行えない時，問題構造１の手続きを理解させることにより，問題構造２の解決が可能になる．ここでの手続きとは割られる数を２つに分け，「割る数」と「わられる数の２倍の数」の差を１にすることである．そのような手続きで解決できることを理解することで，活動２の解決を導出することができる．問題構造３は割られる数を３つに分けている．この活動を作出するためには問題構造 1, 2 でなぜ割られる数を２つに分けたのかを理解しなければならない．今までに行った手続きの理解から作出できる．問題構造４は割られる数を一度分けるだけでは残りを１つにすることができない．残った数を今までと同様に割る数より大きくすることで解決できる手続きを作出することができる．問題構造５も同様に今までの knowing how から新たな knowing how を作出することができる．

これらのことから，knowing that は数学的活動の枠組みである第１次的な階層モデルの区別をおこなうことができるものであり，どの階層の数学的活動を行っているのかを判断することを可能にする．そして，knowing how は手続きのふり返りであり，そのことによって新たな階層への解決の手続きを導き出すことができるものである．

4. 本稿のまとめと今後の課題

数学的活動を２つの軸で捉え，その軸である一般性と構造を基に数学的活動を特徴付けてきた．構造は単純なものから複雑なものへと深まっていくものであり，数学的活動の深まりを縦軸にとり，一方，一般性は特定の具体的なものから同等の問題への適応であり，数学的活動の広がりを横軸にとることで，第１次的な階層モデルを構成した．ある構造Ａに対し，その同等の構造である A’に適応することで数学的活動が広がり，A（A’，A”，…）よりも構造の複雑な B の数学的活動を行うことはＡの数学的活動を含めて深まっていくと考えられた．また，事例の分析を通して，上述の数学的活動の特徴づけ，およびそれによって構築される数学的活動の変容の様相を捉える枠組みは有効であることが示された．

さらに，事例を基に数学的活動の枠組みについて，理解，特に knowing that と knowing how で検討した．そこでは，knowing that は第１次的な階層モデルの区分を行うものであり，knowing how は解決の手続きをふり返るものであり，新たな数学的活動を導き出すものであると考えられた．

本稿では，問題構造の変容による数学的活動の枠組みを構成したものであり，数学的活動の変容を knowing that と knowing how という２つの理解で明らかにしたが，理論的検討のみであり，実践的考察は行われていない．今後，実践的考察が必要である．また，数学的活動と理解の関係を基に理解におけるモデルの構成が残された課題である．

引用・参考文献

能田伸彦.『算数・数学科　オープンアプローチによる指導の研究─授業の構造と評価─』(1983)．東洋館出版.

尾崎正和.「数学教育における理解に関する研究─

knowing that と knowing how を焦点として―」.『第 41 回数学教育論文発表会論文集』(2008). pp.951－952
尾﨑正和.「数学教育における理解に関する研究―理解の解釈と数学的活動の分類―」.『鳥取大学数学教育研究』(2009). 11. (7). pp.1－7
Pirie, S. and Kieren, T. " Watching Sandy's Understanding Grow". *Journal of Mathematical Behaviour* (1992). 11. pp.243－257
清水克彦.「数学教育における Process-Oriented Learning の研究」.『筑波大学教育学博士学位論文』(1987). pp.180－190
清水克彦.「問題解決と児童の理解についての一考察－問題解決教授における方略指導に関して（II）－」.『筑波数学教育研究第 2 号』(1983). pp.30－31

Composition of framework that grasp mathematical activities by transformation of Problem structure: Association with transformation of mathematical understanding that is the behind

Masakazu OZAKI
Graduate School of Regional Sciences, Tottori University

Abstract

A purpose of this study is to construct a framework for grasping a progress of tangible mathematical activities in student's learning to see the development of his/her mathematical understanding. In this paper, I describe the progress of mathematical activity by two axes: "generality" and "structure". In other words I clarify a classification of a series of mathematical activity by characterizing the progress in terms of two axes.

Then, I try to explain the development of the learner's understanding -behind activity- through interpreting different mathematical activities, which are drawn, by two viewpoints: "knowing that" and "knowing how". As a concrete instance, I set a problem that is to express the division with addition of unit fraction(s) of different denominator.

In conclusion, the effectiveness of the theoretical framework developed in this research is shown. Furthermore, the analysis on the development of student's mathematical activity and their understanding behind it suggests the following two findings. The first is that "knowing that" can discriminate the first hierarchical model. The second is that "Knowing how" can reflect procedure of solution and can derive new mathematical activities.

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。

- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/