ISSN 1881−6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

数学教育における理解に関する研究

−理解の解釈と数学的活動の分類−

尾﨑正和

vol.11, no.7

Mar. 2009

鳥取大学 数学教育学研究室

数学教育における理解に関する研究

―理解の解釈と数学的活動の分類―

尾﨑正和
鳥取大学大学院地域学研究科

1. 本研究の目的

1.1 研究の経緯

算数・数学教育における「理解」に関する研究は，特に教授-学習過程に着目した理論的及び実践的研究の中に多くみられる．学習者の「わかる」という行為にはどのような活動が存在し，また，いかなる活動が必要となるのか．児童・生徒の算数・数学の学習において，その内容と方法に関する理解の側面からの検討は今後も重要であろう．しかし,「理解」という言葉の意味やその用いられ方は多種多様であり，曖昧さを感じないわけではない．

言い換えれば，児童・生徒が算数・数学の内容や方法を理解するにあたって，どのような算数・数学的活動の展開が理解をもたらすのか．また，そのためには，どのような教師の指導が必要であるのかは，理解という言葉に注目する際，算数・数学教育において今後も検討されなければならない課題であると言えよう．

本研究では，これらの課題を検討していくために，まず児童・生徒の算数・数学の学習過程にみられる具体的な様相を取り上げ，理解そのものの解釈について検討するものである．次に，その検討の上に理解の対象を明確にし，理解を導くための算数・数学的活動の分析と開発を行う．さらに，授業構成を試みるために，算数・数学的活動の展開を推し進める教師の指導の在り方についても検討するものである．

1.2 本稿の目的

本稿の目的は第一の目的である「児童・生徒の算数・数学の学習過程にみられる具体的な様相を取り上げ，理解そのものの解釈」について議論を展開するとともに検討するものである．

2. 理解の解釈に関する検討

（1）二氏の主張

清水氏は理解の過程を「knowing that」,「knowing how」の 2 つに分け，さらにこれら両者を協応させる機能として「Knowing why」を位置づけている [1)]．また，その概念に「課題意識」と「既有の知識と方法」が含まれること [2)] を指摘している．具体的には，knowing that は「わかろうとしている対象がどのようなものかを知るという理解」を意味し，knowing how は「それをどのように知ったのかという理解」を意味するものとしている．また, knowing that と knowing how の異なる点として以下の 2 点を指摘している．

その一点目は,「knowing that が事実性の認識であるという点」であり，もう一点は「knowing how が，alternative である」ということ [3)]である．

他方，D.ガニエ氏は知識を二つに分け，「宣言的知識とはそれが何であるかについての知識であり，手続き的知識とはどのように行うかについての知識である」[4)]と述べている．つまり，宣言的知識は，その事柄

そのものの知識であり，手続き的知識は，その知っている事柄をどのように活用できるかの知識であると捉えることができる．言い換えれば，学習において宣言的知識は「何を学んだか」という学習の成果を対象とし，手続き的知識は「それをどのように学んだか」という学習の過程を対象とするものと言えよう．

よって，両者の主張より理解の対象は学習の成果としての結果と学習の過程としての活動の展開として捉えることができる．

（2）その検討

上述したように，knowing that は何を知るかであり，わかろうとする対象と考えられる．一方，knowing how は knowing that をどのように知り得たのかと考えられる．このように捉え，二等辺三角形の作図を具体例とし，考えていくものである．

二等辺三角形の作図方法を作り上げる学習において，「等しい 2 辺に着目した作図」，「等しい底辺に着目した作図」，「円とその中心を利用した作図」などが学習者の具体的な活動によって実際に展開された（図 1）．

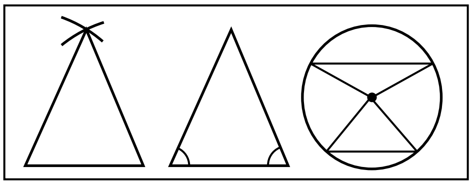


図 1

また，二等辺三角形の定義・性質は「2 辺の長さが等しい」，「2 つの底角が等しい」などが上述した作図方法を導き出す過程で用いられたと推測される．さらに，「円とその中心を利用した作図」では，二等辺三角形の性質のみではなく，円の性質とも関連させている．本学習において作り上げられた多様な作図方法は学習の成果としての結果であり，どのような作図方法が考えられたかという作図方法そのものの知識であると捉えられる．他方，上述した三通りの作図方法は作図の過程で二等辺三角形の性質がそれぞれの作図方法を導いていると考えられる．

言い換えれば，二等辺三角形の作図方法とは何であるか．どのような方法があるかは knowing that に対応するものであり，二等辺三角形の作図方法をどのように知り得たかということは knowing how に対応するものである．

また，「knowing how が，alternative である」（清水 1983）との指摘が意味するものは，作図方法の過程において二等辺三角形の性質のどの性質を用いるかによってその作図方法は代替的に多様であると解釈できる．

3．数学的活動の分類から理解への考察

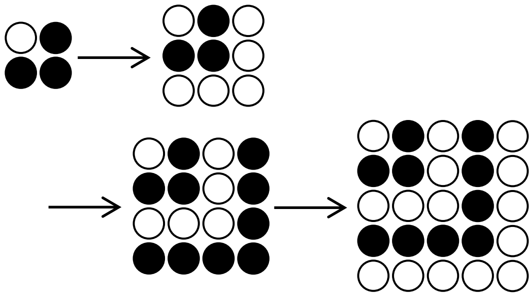
今までに子どもの数学的活動を対象として knowing that と knowing how に分けて考察してきた．ここでは，数学的活動そのものの分類を行い，その分類から理解について考察する．

能田（1983）は数学的活動を表 1 のように分類している．その分類のされ方は，2 つの軸[5] に分けている．1 つ目の軸は一般性についてであり，その中で低い，高いの 2 つに分類している．2 つ目の軸は構造についてであり，その中で単純と複雑の 2 つに分けている．2 つの軸とそれぞれの 2 つの分類により，数学的活動を 4 つに分類している．それら 4 つの分類は，一般性が低く構造が単純なⅠ，一般性が高く構造が単純なⅡ，一般性が低く構造が複雑なⅢ，一般性が高く構造が複雑なⅣである．

表 1　数学的活動の分類

構造＼一般	低い	高い
単　純	Ⅰ	Ⅱ
複　雑	Ⅲ	Ⅳ

また，能田（1983）は以下の問題で数学的活動の分類を行っている．

> 赤と白のおはじきを，下の図のように，正方形の形にならべていきます．
>
> 
>
> 1つの辺のおはじきの数が10になるまでならべると，赤と白のおはじきの数のちがいは何こになるでしょう．
>
> ・1つの辺のおはじきの数が，2こ，3こ，……のときどうなるか，順に調べてみましょう．

＊問題は白と赤であるが，以下では白と黒(赤のかわり)で議論を展開する．

<u>様相 1</u>　特定の場合について具体的に総数を求める

1+3+5+7+9=25　　答　25個

<u>様相 2</u>　1辺の数と総数の変化のきまりを用いての総数を求める

1辺が10個のとき　10×10

答　100個

<u>様相 3</u>　特定の場合について具体的に白と黒の差を求める

白：1+5+9=15　　黒：3+7=10

違い　15-10＝5

答　白が5個多い

<u>様相 4</u>　奇数と偶数に分けながらも，差と1辺の数が等しくなることを用いて白と黒の差を求める

1辺が10個のとき，多いのは黒で違い　10個

答　黒が10個多い

（1）一般性が低い，高いとは

様相1と様相2の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相1は特定の場合について具体的におはじきの数を数えることで総数を求める手続きである．一方，様相2は1辺の数と総数の変化のきまりを用いて総数を求める手続きである．様相1と様相2の間にはきまりや法則への着目という違いがあり，ここに一般性が低い，高いという違いを捉えることができる．

次に，様相3と様相4の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相3は特定の場合について具体的に白と黒の数を数え，その差を求める手続きである．一方，様相4は1辺の数が奇数と偶数に分けながらも，差と1辺の数のきまりを用いて白と黒の差を求める手続きである．ここに一般性が低い，高いという違いを捉えることができる．

（2）構造が高い，低いとは

様相1と様相3の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相1はおはじきが全て白であり，図に表すと図2のようになる．また，様相1のおはじきの数については表2のように表すことができる．一方，様相3のおはじきは白と黒の2色であり，図で表すと図3のようになる．また，様相3の白と黒のおはじきの差については表2のように表すことができる．それぞれの様相の図や表を比べてみると，様相3の方が分析的であり，用いているきまりも多い．ここに構造の差を見ることができる．

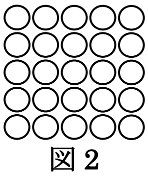


図2

表2

1辺の数	1	2	3	4	5
おはじきの数	1	4	9	16	25

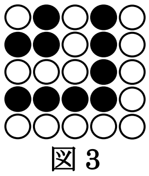


図3

表3

1辺の数	1	2	3	4	5
白の数	1	1	6	6	15
黒の数	0	3	3	10	10
合計の数	1	4	9	16	25
白と黒の差	1	2	3	4	5

様相 2 と様相 4 の間にある解決に用いる手続きの違いについて考える．様相 2 は 1 辺の数と総数の変化のきまりを用いて総数を求める手続きである．一方，様相 4 は 1 辺の数が奇数と偶数に分けながらも，差と 1 辺の数が等しくなることを用いて白と黒の差を求める手続きである．様相 4 は様相 2 よりきまりの数が多く，はじめの問題に対する解法である．ここに構造の差を見ることができ，この問題に関して構造の差はきまりの多少にあると考えられる．

（3）理解の違い

これらの数学的活動の分類から理解を捉えるとそれぞれの様相によって，どのような解釈ができるだろうか．

まず，様相 1 と様相 2 について考える．様相 1 は特定の場合についての具体的な総数の理解であり，様相 2 は 1 辺と総数のきまりに着目しての総数の理解である．一般性について考えると，様相 1 は特定の場合の具体的な理解であるので一般性が低く，様相 2 はきまりに着目した理解であるので一般性の高いので，異なった理解をしていると捉える事ができる．一方，構造について考えると，どちらも問題を単純化した総数の理解であり，同等の理解をしていると捉える事ができる．

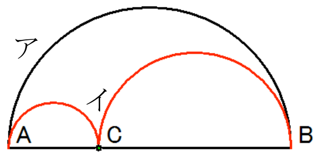
次に，様相 1 と様相 3 について考える．様相 1 は特定の場合についての具体的な総数の理解であり，様相 3 は特定の場合についての具体的な白と黒の差の理解である．一般性について考えると，どちらも特定の場合についての具体的な理解であるので同等の理解と捉える事ができる．一方，構造について考えると，様相 1 は単純化した総数の理解であり，様相 3 は白と黒の差の理解であるので，異なった理解だと捉える事ができる．

そして,様相2と様相4について考える．様相 2 は 1 辺と総数のきまりに着目した総数の理解で，様相 4 は 1 辺の数が奇数と偶数に分けながらも，差は 1 辺の数に着目した白と黒の差の理解である．一般性について考えると，どちらのようそうもきまりに着目した一般性の高い理解であり，同等の理解と捉える事ができる．一方，構造についての考えると，様相 2 は単純化した総数の理解であり，様相 4 は白と黒の差の理解であるので，異なった理解をしていると捉える事ができる．

数学的活動の 4 つの分類から理解を捉える事ができたが，その他の問題でも数学的活動の分類から理解の捉える事ができるだろうか．

3．他の事例への適応

数学的活動の分類から理解の検討を，他の事例に関して試みる．

> 問題
>
> 下の図で，A から B へ行きます．B へ行くには AB（10cm）を直径とする半円の道（ア）と，AC（3cm），CB をそれぞれ直径とする半円をつなげた道（イ）の 2 つの道があります．どちらの道が短いでしょう？
>
> 
>

<u>様相 1</u>　特定の場合について具体的に長さの違いを求める

ア　10×3.14÷2＝15.7

イ　3×3.14÷2＝4.71

7×3.14÷2＝10.99

4.71＋10.99＝15.7

答　アとイは同じ長さ

<u>様相 2</u>　アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求める

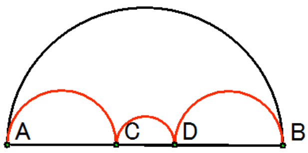
ア　AB×3.14÷2

イ　$(AC \times 3.14 + CB \times 3.14) \div 2$

$= (AC + CB) \times 3.14 \div 2$

$AC + CB = AB$　　$AB \times 3.14 \div 2$

様相３　イを３つの半円にわけながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求める



ア　$AB \times 3.14 \div 2$

イ　$(AC \times 3.14 + CD \times 3.14 + DB \times 3.14) \div 2$

$= (AC + CD + DB) \times 3.14 \div 2$

$AC + CD + DB = AB$

$AB \times 3.14 \div 2$

（1）数学的活動の分類

様相１から様相３を分類の２つの軸である一般性及び，構造について検討していく．

まず，一般性について考える．様相１は特定の場合について具体的にアの半円とイを作る２つの半円の長さの違いを求め，様相２はアの半円とイを作る２つの半円の直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求めている．また，様相３はイを３つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求めている．様相１は特定の場合について具体的な手続きを用いているのに対し，様相２と様相３はアとイの直径のきまりに着目する手続きを用いている．このことから，様相１は一般性が低く，様相２と様相３は一般性が高いと考えられる．

次に，構造について考える．様相１と様相２はアの半円とイを作る２つの半円の長さの違いを求める手続きを用いているのに対し，様相３はイを３つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いを求める手続きを用いている．このことから，様相１と様相２は構造が単純で，様相３は構造が複雑であると考えることができる．

上記のことからそれぞれの様相を数学的活動の分類である表１のⅠからⅣに分類する．まず様相１は一般性が低く，構造が単純な活動であるⅠ，様相２は一般性が高く，構造が単純であるⅡ，様相３は一般性が高く，構造が複雑であるⅣだと考えられる．それぞれの様相を表１にあてはめてみると表４のようになり，上記の様相の中にはⅢの数学的活動が行われていないことが言える．

表４　数学的活動の分類

構造＼一般	低い	高い
単　純	様相１	様相２
複　雑		様相３

（2）それぞれの様相からの理解

様相１から様相３において，理解の違いについて検討していく．

様相１は特定の場合について具体的にアの半円とイを作る２つの半円の長さの違いについての理解で，様相２はアの半円とイを作る２つの半円の直径のきまりに着目してアとイの長さの違いについての理解である．また，様相３はイを３つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いについての理解である．一般性に着目すると，様相１は特定の場合について具体的な理解であるのに対し，様相２と様相３はアとイの直径のきまりに着目した理解である．このことから，様相１は一般性が低い理解であり，様相２と様相３は一般性が高い理解だと捉える事ができる．次に，構造に着目すると，様相１と様相２はアの半円とイを作る２つの半円の長さの違いについての理解であるのに対し，様相３はイを３つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いについての理解である．このこ

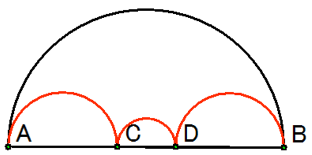
とから，様相 1 と様相 2 は構造が単純な理解であり，様相 3 は構造が複雑な理解だと捉える事ができる．

そのように捉えると，様相 1 は一般性が低く，構造が複雑な理解だと捉える事ができ，様相 2 は一般性が高く，構造が単純な理解だと捉える事ができる．さらに，様相 3 は一般性が高く，構造 が複雑な理解だと捉える事ができる．そうであるならば，一般性が低く，構造が複雑な理解をしていないことがわかった．

(3) 新たな様相

それぞれの様相を分類した際，Ⅲの数学的活動が行われていないことが言えた．それでは，どのような数学的活動が考えられるのであろうか．Ⅲの数学的活動は，一般性が低く，構造が複雑である．一般性が低いので，一般性は様相 1 と同等であるということは，特定の場合について具体的な手続きを行う活動である．また，構造が複雑であるので，構造は様相 3 と同等であるということは，イを 3 つの半円で作り，アとイの違いを求める手続きである．これらのことから，本問題で行われるⅢの数学的活動の様相（以下，様相 4）は「特定の場合について具体的にイを 3 つの半円で作り長さの違いを求める」である．例えると以下のようになる．

<u>様相 4</u>



AC＝5cm　CD＝1cm　DB＝4cm

ア　10×3.14÷2＝15.7

イ　5×3.14÷2＝7.85

　　1×3.14÷2＝1.57

　　4×3.14÷2＝6.28

　　7.85＋1.57＋6.28＝15.7

(4) 様相 4 の理解

数学的活動の分類から様相 4 が考えられたが，その様相はどのような理解と捉える事ができるだろうか．

様相 1 と様相 4 について考えると，様相 1 は特定の場合について具体的に長さの違いについての理解であり，様相 4 は特定の場合について具体的にイを 3 つの半円で作り長さの違いについての理解である．一般性について考えると，どちらの様相も特定の場合について具体的な理解であるので一般性が低く，同等の理解だと捉える事ができる．一方，構造について考えると，様相 1 はイを作る半円は 2 つであるのに対し，様相 4 はイを作る半円を 3 つにしているので，様相 4 の構造は複雑であると捉える事ができる．

また,様相3と様相4について考えると，様相 3 はイを 3 つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いについての理解であるのに対し，様相 4 は特定の場合について具体的にイを 3 つの半円で作り長さの違いについての理解である．一般性について考えると，様相 3 はイを 3 つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いについての理解であるのに対し，様相 4 は特定の場合についての具体的な理解であるので，様相 4 は一般性の低い理解だと捉える事ができる．一方，構造について考えると，どちらの様相もイを 3 つの半円で作っていることから構造が複雑であり，同等の理解だと捉える事ができる．

様相 4 を行うことにより，(2) でみる事のできなかった一般性が低く，構造が複雑な理解を行うことができると捉える事ができた．

4. 本稿のまとめ

2. (2) で取り上げた具体的な事例である

二等辺三角形の作図で見てきたように，knowing that は作図の方法はどのような方法があるのかということであった．一方，knowing how は作図の方法をどのように知り得たのかということであった．そのように捉えるならば，knowing how は作図方法を作り出す過程が検討され，　knowing that は knowing how によって作り出された成果・結果が検討されなければならない．これらのことから，knowing how は数学的活動の過程（プロセス）が理解の対象となり，プロセスが多様であればあるほど，理解は深くなろう．他方，knowing that は学習の成果・結果が理解の対象となり，その知識は，他の正三角形や一般の三角形の作図と関連するとき，理解がより深まるものと考えられる．

言い換えれば，knowing that は活動の成果・結果が理解の対象となり，knowing how は活動の過程が理解の対象となる．また，理解の対象とプロセスが多様にあり，それらを関連させることにより理解が深まると考えられる．

また，数学的活動の分類から理解を円の問題で見てきたように，特定の場合について具体的な長さの違いについての理解のような，一般性が低く，構造が単純な理解．アの半円の直径とイを作る 2 つの半円の直径のきまりに着目した長さの違いについての理解のような，一般性が高く，構造が単純な理解．特定の場合について具体的にイを 3 つの半円で作り長さの違いについての理解のような，一般性が低く，構造が複雑な理解．イを 3 つの半円で作りながらも，アとイの直径のきまりに着目してアとイの長さの違いについての理解のような，一般性が高く，構造が複雑な理解を捉える事ができた．　また，理解を上記のように捉えることにより，新たな様相が考えられた．

5. 今後の課題

本稿では数学的活動の様相を理解として考えてきたが，それぞれの様相にある理解を考えなければならない．

分類した I からⅡ，ⅡからⅢ，ⅢからⅣへと移行していく過程についての検討が必要である．また，その過程から，どのような理解をしているのか検討が必要である．

また，数学的活動の分類から理解を見てきたが，それらから knowing that と knowing how の水準を検討する必要がある．

6. 引用・参考文献

1）清水克彦（1987）.「数学教育における Process-Oriented Learning の研究」．筑波大学教育学博士学位論文．pp.180－190
2）同　上
3）清水克彦（1983）.「問題解決と児童の理解についての一考察－問題解決教授における方略指導に関して（Ⅱ）－」．筑波数学教育研究第 2 号．pp.30－31
4）エレン・D・ガニエ（1989）．赤堀侃司・岸学訳．「学習指導と認知心理学」．壮光舎出版．pp.66－69
5）能田伸彦（1983）.「算数・数学科　オープンアプローチによる指導の研究―授業の構造と評価―」．東洋館出版．pp.59－69

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881! 6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/