

数学教育における  
創造性育成と問題解決指導に関する研究  
－思考の固執に着目して－

B99k1243U 田中克征  
鳥取大学  
教育地域科学部 学校教育課程  
教科教育コース 理数系選修・数学教育専攻

指導教官:溝口達也

# 目 次

<b>序章 研究の目的と方法</b>	<b>1</b>
0.1 研究動機と目的	
0.2 研究の方法	
<b>第一章 数学的創造性</b>	<b>5</b>
1.1 数学的創造性と Divergent production	
1.2 数学的創造性発揮の段階モデル－事例的分析から捉えて－	
1.2.1 問題解決過程における数学的創造性－問題解決過程の事例的分析－	
1.2.2 数学的創造性発揮の段階モデル	
<b>第二章 思考の固執 (Fixation)</b>	<b>27</b>
2.1 数学的創造性研究における思考の固執 (Fixation) への着目	
2.2 思考の固執 (Fixation) ゲシタルト心理学から捉えて	
2.2.1 思考の固執と過去経験との関係－Maierの方向(direction)－	
2.2.2 問題場面における解決発生・方向(direction)の獲得(目標分析・葛藤分析・材料分析)	
2.2.3 思考の固執(Fixation)の定義	
2.3 思考の固執と数学的創造性－本研究における数学的創造性－	
<b>第三章 数学的創造性の育成と問題解決の指導</b>	<b>54</b>
3.1 数学的創造性育成と問題解決指導－従来の創造性育成の方法－	

3.2 創造性育成の具体的方策としての問題解決指導

3.3 中学校数学科における問題解決指導－アプリアリ分析－

**終章 研究の結論 ……………77**

4.1 研究の結論

4.2 問題点・反省点と今後の課題

**引用・参考文献 ……………83**

**資料 ……………85**

# 序章

## 研究の目的・方法

0.1 研究動機と目的

0.2 研究の方法

本章では、研究の動機と目的,方法について述べる。

## 0.1 研究動機と目的

中央教育審議会第一次答申において、学校教育の在り方として“生きる力の育成”が提言され、平成10年7月教科審答申では、“生きる力の育成”を基本的ねらいとした教育課程の基準が打ち出された。これらは、国際化・情報化・科学技術の発展・環境問題への関心の高まり等によって、今後大きく変化する日本社会において、社会的課題に対し情報・知識・技能を積極的に活用し、主体的に取り組む人材を育成することが期待されている事を受けており、望ましい人材であるに必要な力として「生きる力」といった文言が掲げられたのである。

上述のように、21世紀を迎えた日本社会においては、新しい教育の在り方・目的が問われている。

それは教科教育に対しても例外ではない。筆者自身が、教科教育の目的を教科教授を媒介としての児童・生徒の人間形成への貢献であると捉えようとするとき、数学教育の目的とは「問題解決力の育成」ではないかと捉える。そして、本研究においては、問題解決力を支える一つの要素としての“創造性”の育成へと焦点を当てたいと考える。

これまでも「教育による創造性育成」の必要性は叫ばれてきたが、「創造性」とは何であるかといった議論に対して明確な答えは存在しない。それは「創造性」が独創性・柔軟性・流暢性等の多様な側面を持つ事象であるがゆえに、一側面に重点を置く事で、他の側面を捉え切れなくなりうるからである。では、実際「創造性育成」を掲げた際、どのような状態へ生徒を高める事が目標とされるのであろうか。全ての側面が各々価値を有すると認める時、数学教育において如何なる側面を「育成の対象」として選択し、そこから如何なる指導の在り方を導出する事が必要となるだろうか。以下では、「創造性」を芸術等の他分野に見られるように独創性・新奇さと結び付けようとする考えとは異なる立

場を採る。つまり、学校教育において、すべての児童に期待しうる「数学的創造性」とは何であるか、その育成の具体的方策はどうあるべきかに対する検討を目指したいと考えるのである。

## 0.2 研究の方法

上記(0.1)の目的を達成する為に、本論文においては、次のような研究課題を設定する。

課題1. 数学的問題解決における数学的創造性発揮を、どのような現象として捉える事が出来るか。

課題2. 数学的創造性が発揮されない状態がなぜ起こり得て、また克服をどう達成するか。

課題3. 数学的創造性を育成する問題解決の指導は如何にあるべきか。

課題1は、本研究における数学的創造性を定義するために、数学的問題解決における創造性発揮を如何なる現象として捉えるかに答えるものである。このために、D.W.Haylock「A Framework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren」にあたり、これまでの先行研究において為された数学的創造性の定義・定義を為す際のアプローチの手法について吟味し、本研究における数学的創造性を定義する方法を考察する。そして、考察から得られた問題解決過程に対する分析に基づいて、創造性発揮の状態を捉える。

次に課題2では、課題1で捉えた問題解決における数学的創造性発揮を妨げる要因として、人の主観的要素・思考の固執(Fixation)へと着目し、それが如何なる現象であるかを解明するものである。このためにM.Wertheimer, K.Duncker, Maier等のゲシュタルト学派の考えにあたり、問題場面における解決発生と過去経験との関わりを考察する事によって、思考の固執(Fixation)現象を定義する。また、それが克服される際の契機を捉える。

課題3は、課題1, 2で捉えた「問題解決過程における数学的創造性発揮」と「思考の固執」との関係性を考慮し、本研究における数学的創造性を定義する。そして、創造性の育成を明らかにした“数学的創造性発揮状態の段階”と“思考の固執”との関係性を捉え、数学的創造性の育成を“問題解決における数学的創造性発揮の段階的移行”として捉え、それを達成する為の具体的方策として問題解決の指導を検討するものである。

# 第一章

## 数学的創造性

- 1.1 数学的創造性と Divergent production
- 1.2 数学的創造性発揮の段階モデル－事例的分析から捉えて－

本章においては，第 1 の課題「数学的問題解決における数学的創造性発揮を，どのような現象として捉える事が出来るか」に答えることを目指し，数学的創造性についての考察を進める。

1.1 数学的創造性と Divergent production では，D.W.Haylock の言明を基に先行研究において為されている創造性の定義を整理,吟味する。そして，学校教育における創造性育成の対象として，すべての生徒に期待し得る側面としては如何なる側面を選択するかについて考察する。

1.2 数学的創造性発揮の段階モデル－事例的分析から－では，大学生の問題解決過程に対して行った事例的分析に基づいて，問題解決過程がどのような様相を示すかを考察する。そして，問題解決過程における数学的創造性発揮が如何なる現象であるかを段階的モデルとして捉えていく。

## 1.1 数学的創造性とDivergent production

1950年代以降「創造性研究」は、教育研究のみならず、心理学といった他分野においても盛んに為され、創造性育成の重要性は認知されてきた。しかし、多くの研究者が全ての段階における児童・生徒の創造的能力を発達させる事の重要性を叫びながらも、学校教育においてはむしろ軽視されてきたという事実が存在する。この事実について Tammadge は、数学教授においては長い間合理的考えや、既存の知識を累積して学習する学習形態が強調されてきた事が影響を及ぼしてきたと論じている。そして Haylock は、数学教育における創造性の概念に対する認識が不十分であるという事実が十分に関係していると指摘した。(Haylock.D.W, 1987)

Haylock が指摘するように、創造性の概念への認識が十分でない為に"創造性育成"の観点が軽んじられたと考えるならば、数学教育において育成の対象とする数学的創造性 (Mathematical creativity) とは何であろうか、概念の認識自体を再度問わねばならないであろう。

これまでも、数学的創造性 (Mathematical creativity) を対象とした研究は多数為されてきた。多くの研究者 (Prouse, Evans, Baur, Jensen, Maxwell, Balka, Dunn, Zosa, Foster, Mayer, Brandau, Dossey, etc) は創造性の測定方法として多様な解決 (divergent production) を産出するよう設定された問題 (divergent production test) を用いており、彼等は、多様な解決を産出する際に確認される思考過程の特性・能力に着目し“数学における創造的能力・数学的創造性”に対する定義・描写を様々に為してきたのである。その事は、Aiken によって次のように指摘されている。

Aiken の指摘は、「数学的創造性の定義は、生徒の問題解決過程 (思考過程-Process)・問題解決の所産 (思考結果としての所産-Production) の二物のいずれかに対する考察に基づいて為されているものである。」というものである。

(Haylock.D.W, 1987 から引用)

数学的創造性が問題解決過程において何らかの形で発揮され、解決の産出に作用するであろう事を考慮するならば、Aiken が指摘するように思考過程 (Process)・思考結果 (Production) に対する考察に基づいて定義が試みられる事は、数学的創造性を捉えるアプローチとして妥当であると見なされるであろう。以下では 2 つのアプローチに基づいて為された定義・描写の吟味を行いたいと考える。

まず、生徒が数学を行う思考過程 (Process) の考察に基づく創造性の定義であるが、それらは複雑な認識過程の特性へと焦点を当てたもの、創造的であると描写するに相当とみなされる特定の思考の質を考察したものであり、Kruteskii, Laycock, Romey が以下のように為している。

Kruteskii は、「一つの知的操作から、別の知的操作への自由で容易な切り替え」と定義し、知的操作過程の柔軟性に重きを置いている。また、Laycock は「一つの問題に対して多くの方法による検討・パターンの観察・類似点と相違点を見抜く能力」、Romey は「新しい思考方法の中で、数学的思考・テクニック・アプローチを結合させること」と定義している。(Haylock, 1987 から引用)

次に、本質的には思考の所産 (Production) であるものに対する考察に基づく定義は、Spraker, Jensen 等によって為されており、観察可能である思考の産物を考慮したもの、もしくは所産を創造的であると認める為の判断基準であり、以下に示すものである。Spraker は「数学的問題に対して、独創的な解決法、もしくは興味深く、有効である解決法を産出する能力」と定義し、Jensen による定義は「数学的場面に関して文字や図の形式で与えられた情報をもとに問題を創り出す Problem-Posing 課題において、異なる適切な質問を多数示すための能力」というものである。また、Jackson, Messick は「多くの創出・数学的なアイデアが創造的であるとみなされる為には、それを明白な数学的基準に照ら

した際に、問題場面に対して適用的であるとみなされなければならない。」とし、創造的所産を評価する為の基準として「appropriateness・適切性」を挙げている。

上述のように数学的創造性の定義は、多くの研究者によって多数為されているが、一般的に受け入れられた簡明・明確なものは存在してはいない。その事は、次に示す2つの現実を考慮する事により、当然の結果として見なされるであろう。

第一は、数学的創造性に対する明確な定義の存在を問う以前に、概括的創造性に対する一般的な定義が存在しないという現実である。これは、概括的創造性すら明確に捉えきれない現実の下で「数学的創造性」のみが明確に捉えられることなどは不可能だという結果を指している。

そして第二の現実は、Mackinnonが「創造性とは正確に定義された理論的構造を持つというよりは、むしろ多様な側面を持った事象である。」と論じているように、一般的定義を為す事により捉えきれなくなる側面が出てきうるといふ点である。つまり、「創造性」が多様な側面を持つ事象であるが為に、一般的定義を特定する事は、逆に足枷となり「創造性」という事象を捉える事を不可能とするのである。これら二点の現実を受け止め、改めて数学的創造性に対する明確な定義が存在し得ないと結論づけるならば、各々の研究者が自らの持つ興味・関心によって「数学的創造性」として焦点化する側面が異なるならば、その定義が異なるのは必然である。

このように一般的定義の存在が否定され、概括的創造性・数学的創造性は、何を捉えようとするかによって定義が為される多様な側面を持つ事象であると理解したならば、学校教育の場において如何なる側面を「育成の対象」とするかという選択に答える事が要請される。つまり、数学教育の目標の一つとして「創造性育成」を掲げた際、どのような状態へ生徒を高めていくか明確にする

事が求められるのである。この問いに対する応えとして、本研究において焦点化する数学的創造性の側面とは、およそ全ての児童・生徒が持ちうる期待されるものであり、「知的思考過程の柔軟性・多様な思考の顕在化」であるとして以降の議論を進めていくが、次節においては多様な解決 (divergent production) を産出する問題解決過程への考察を行う事で、問題解決における知的思考過程の柔軟性を明らかにする事にする。

## 1.2 数学的創造性発揮の段階モデル－事例的分析から捉えて－

### 1.2.1 問題解決過程における数学的創造性－問題解決過程の事例的分析－

前節で述べたように、本研究においては「数学的創造性」が持つ一側面である知的操作過程の柔軟性を重視する立場を取る事とした。では、児童・生徒が数学的問題解決の場において示す"数学的創造"とは、如何なるものを指すのか・"数学的創造性:知的思考過程の柔軟性"とは、問題解決過程において如何なる形で示されるのであろうか。

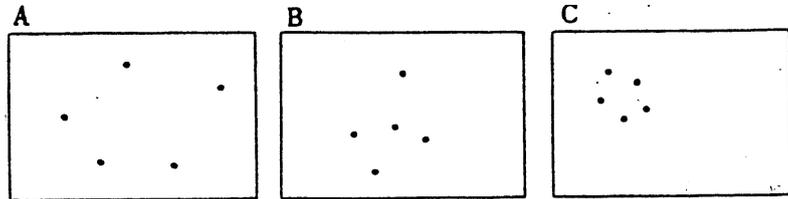
本節では、その事を明確に捉える為に、Kruteskii, Laycock, Romey 等同様、問題解決過程への考察・分析というアプローチをとる。事例問題に対する問題解決過程を分析する事で、児童・生徒が営む問題解決過程の特性を考察し、その中に見られ得る「現象」としての「数学的創造性発揮」が如何なる様相であるかを特定しようと試みるのである。

分析は、問題解決過程において得られた全ての解決を独立して想起・産出する過程であったのか、複数の数学的観点を結合する事で新しい考え・解決を想起・産出する連鎖的な過程であったのかを明らかにする事を目的とし、大学生 K により実際に図られた問題解決過程を対象とする。

実際には、多様な解決 (divergent production) を産出する問題解決過程に対する分析・考察を行っていく。

●事例問題 1—おはじきの散らばりの数量化 (数量化の問題)

事例問題 1) A,B,C の 3 人でおはじき遊びをしたら、下の図のようになりました。この遊びでは、落としたおはじきのちらばりの小さいほうが勝ちとなります。



この例では‘おはじきのちらばりの程度は、A,B,C の順にだんだん小さくなっている’といえそうです。このような場合、ちらばりの程度を数で表すしかたをいくとおりも考えてください。(島田, 1994)

事例問題 1 に対する問題解決によって、大学生 K が得た解決案は以下の 9 つである。

●大学生 K により得られた解決

- ①多角形の面積
- ②多角形の周の長さ
- ③ (1 点) と各点を結んだ線分の長さの総和
- ④ 2 点を結ぶ最大線分の長さ
- ⑤円で覆うときの最小半径
- ⑥多角形の概形とみる長方形の面積
- ⑦多角形の概形とみる長方形の面積の 4 分の 1
- ⑧任意の点から各点への長さの総和
- ⑨固定範囲内 (長方形) に含まれる点の個数と密度

●問題解決の流れ

当初『おはじきの散らばり』を、おはじき各点が構成する多角形の大きさと

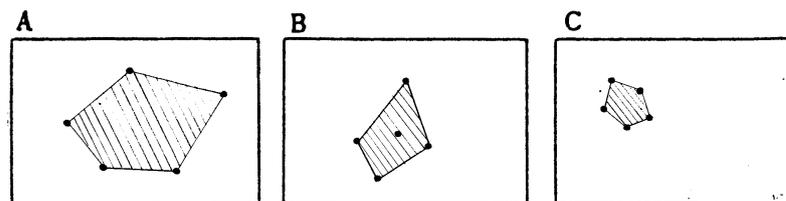
して数量化する事から始まり、①多角形の面積としての数量化が図られた。面積と周の長さの依存関係に着目し、②多角形の周の長さとしての数量化が図られた。

次に、多角形を構成する各辺が着目され「辺の長さ」としての数量化手段として、③(1点)と各点を結んだ線分の長さの総和、④2点を結ぶ最大線分の長さとしての数量化が図られた。そして、おはじきが構成する多角形を内部に含む概形(円,または長方形)を考え、「長さ」として⑤円で覆うときの最小半径として数量化・面積として⑥多角形の概形とみる長方形の面積を図る。また、直行座標を設定する事で、⑦多角形の概形とみる長方形の面積の4分の1を数量化し比較。設定した直交座標の原点を任意点として⑧任意の点から各点への長さの総和を数量化。この段階で「散らばりを如何に数量化するか」という問題から、「数量化の手段として何が存在するか」という問題へと転換が起る。転換後の問題に対する反応として「固定範囲内に存在する個数」が得られた。「固定範囲内に存在する点の個数」を比較することを考えたのを手がかりに、固定範囲内の密度として数量化が目指され⑨固定範囲内(長方形)に含まれる点の個数と密度として数量化が図られた。

## ●解決の詳細

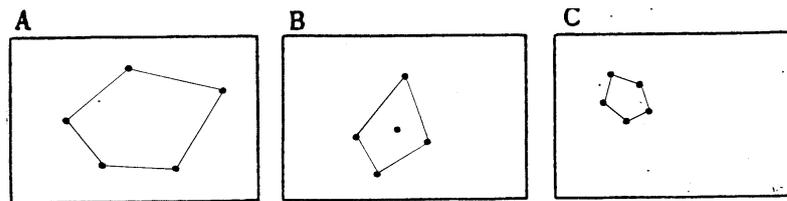
### ①多角形の面積

「おはじきの散らばり」を広さとして数量化する事を想起し、図形に関する知識と結びつけ「面積として数量化を行う」観点を得る。おはじき各点を結んだ線分が構成する多角形の面積として数量化を図る。



②多角形の周の長さ

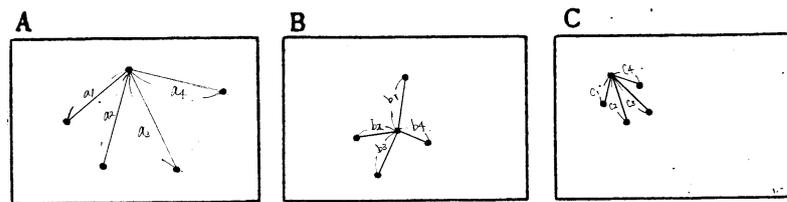
「多角形の面積」と「周の長さ」に依存関係(周の長さが変化すれば面積も変化する)がある事を想起し、「長さとして数量化を行う」観点を得る。解決①面積としての数量化を図った際の対象であったおはじき各点が構成する多角形の周の長さとして数量化を図る。



③ (1点) と各点を結んだ線分の長さの総和

「長さとして数量化を行う」観点を継続的に保持する事で、「多角形の周の長さ」以外にも「長さ」として表す事が出来るものが考えられる。そして、各点の距離としての数量化が想起され、「1点からの各点への距離の総和」として数量化が図られた。

(この時点で、任意点から各点への長さの総和を考えたが、任意点をどう取るのか設定できなかつた。結果、おはじき1点を選択。)

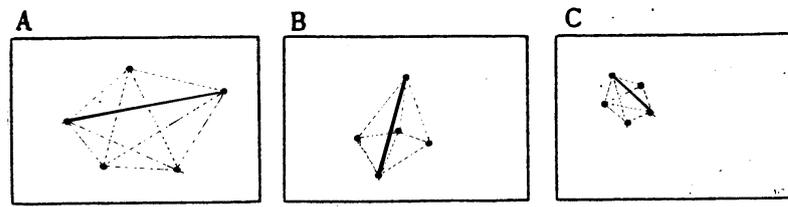


④ 2点を結ぶ最大線分の長さ

③では1点からの各点への線分の長さの総和として数量化が図られたが、継続して「長さ」としての数量化を試みられる。

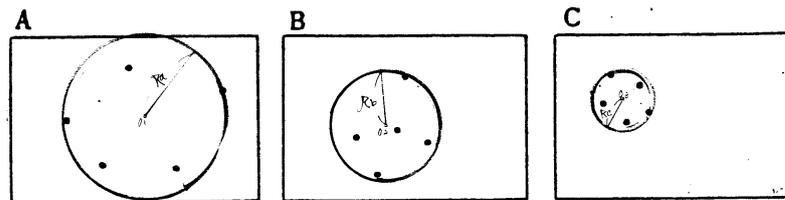
おはじき各点を結ぶ線分の中から一本を取り出し「長さ」として数量化することで比較は行うことが考えられ、最も離れている点を結んだ線分の長さとし

て数量化することが志向される。解決として「2点を結ぶ最大線分の長さ」としての数量化が図られた。



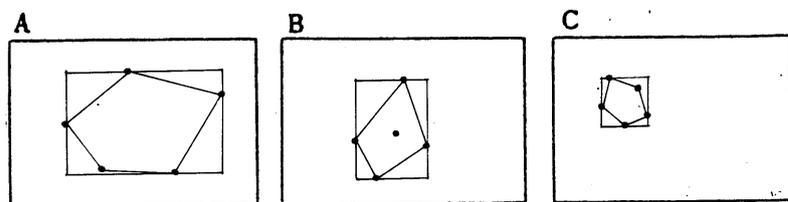
⑤円で覆うときの最小半径

「被含」の考えから、「おはじき各点が構成する多角形」を内部に含む概形として円が想起される。「長さとしての数量化」と「概形・円」とを結び付ける事で、観点「多角形を内部に含むような円の最小半径としての数量化」が得られ、解決が図られる。



⑥多角形の概形とみる長方形の面積

「長さ」への着目により②,③,④,⑤の複数の解決が得られた事で、同様に「面積」へ着目する事によって複数の解決を産出する事が目指される。そして、解決⑤の「被含」の考えと「面積としての数量化」を結びつける事で、「おはじきが構成する多角形の概形を対象に面積の数量化が図られた。



⑦多角形の概形とみる長方形の面積の4分の1

解決⑥を効率良く行う方法は存在しないかを考える過程で、直行座標を設定

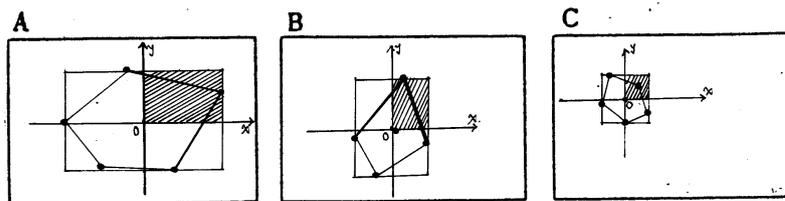
する事で面積の数量化が容易に図られると考える。始めは外枠(長方形)の縦を Y 軸・横を X 軸とし、その交点を原点としての直行座標が設定された。(右図)

しかし、この設定方法では直行座標を持ち込んだ事の有益さが感じられない為、別の設定方法が必要とされた。

その後…直交座標軸として、解決⑥「面積としての数量化」の対象であった概形(長方形)の縦・横の辺を二等分する直線を X 軸, Y 軸として設定する事が適切ではと考えるに至る。(下図)

この直行座標設定によって「概形の面積の 4 分の 1」が容易に求まる事から、概形一部分の面積での比較が可能である。

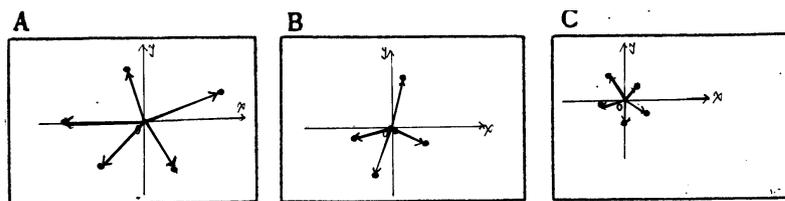
これを受けて解決⑦「多角形の概形とみる長方形の面積の 4 分の 1」の数量化が得られた。



### ⑧任意の点から各点への長さの総和

解決③「1点からの各点への線分の長さの総和の数量化」を図った際には、基準となる1点(任意点)を上手く設定する事が出来ていなかった。

しかし、それ以後の解決(解決⑦)を図る中で、適切な任意点を設定する為の手掛かりとなる「直行座標を設定すること」を得たことから、解決⑦において設定した直行座標の原点を任意点として設定するに至る。これを受けて「任意点からの各点への線分の長さの総和」として数量化が図られた。



⑨固定範囲内(長方形)に含まれる点の個数と密度

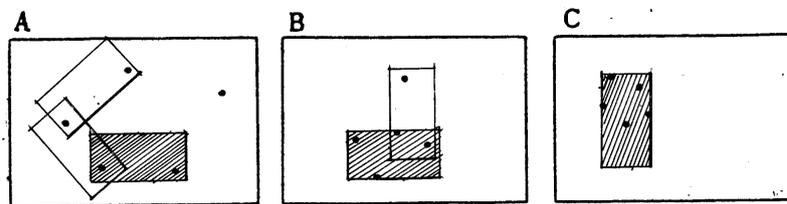
①～⑧の解決は「面積・長さ」として数量化が図られたものであった。

その他に、数量・数値で表される対象・数学的知識は存在しないのかを志向する事から始まる。

そして、数学的知識「個数・密度」が想起され、「おはじき各点の散らばり」を密集の程度で表すことが目指された。

だが問題用紙上で各枠内のおはじきの個数・密度はすべて同じであり、この観点を問題場面へ適用する為には何らかの手法が必要である。その為に、これまでに得られた解決を振り返る事で、解決:「密度としての数量化」を問題場面へと適用する手法の創出が要求された。試行錯誤の結果…解決⑦で「概形の4分の1の長方形」を考えた事を手がかりに、「おはじきを、設定した適切な固定範囲内に置く」被含の考えから、固定範囲(長方形)の設定が行われる。

結果として、密度として数量化を行う手法「適切な固定範囲を設定し、固定範囲内に含まれる点に対し密度を求める。」が得られ解決が図られた。



○問題解決過程に対する分析

分析の手法は、まず問題解決を図った際の主観点である数学的観点(何として数量化を図ったか)によってカテゴリーを設定する。そして、得られた全ての解決を設定したカテゴリーへと分類した後に、時間軸を基準として解決を想起順に図示していく。これに問題解決過程への内省から認められた「解決の産出にあたっての各解決相互の結び付き」を付加して示す事で、思考活動としての問題解決の様相を捉え、その中において現象としての「数学的創造性発揮」

を特定しようと考察を進める。

事例問題に対して大学生Kが9個の解決を産出した際の主観点は「面積・長さ・密度」であり、以下の3カテゴリーを設定した。設定カテゴリー: (A:面積としての数量化)・(B:長さとしての数量化)・(C:密度としての数量化)

次に得られている9個の解決を、産出された際に主観点とされた数学的観点によって設定カテゴリーへと分類すると以下のように示される。

(A:面積—①,⑥,⑦)

(B:長さ—②,③,④,⑤,⑧)

(C:密度—⑨)

このように各カテゴリーへと分類された解決例を、便宜上それぞれ想起順にA1・A2…とし、時間軸を基準として横軸に取った図に想起順に示す事で問題解決過程は下図のように進行した事が見て取れる。図における矢印は、問題解決の流れ,解決の詳細で記した大学生Kによる問題解決過程への内省から認められた「各解決相互の結び付き」を表すものである。

(本線は解決産出の際に主とした考え・点線は持ち込んだ考え・見方)

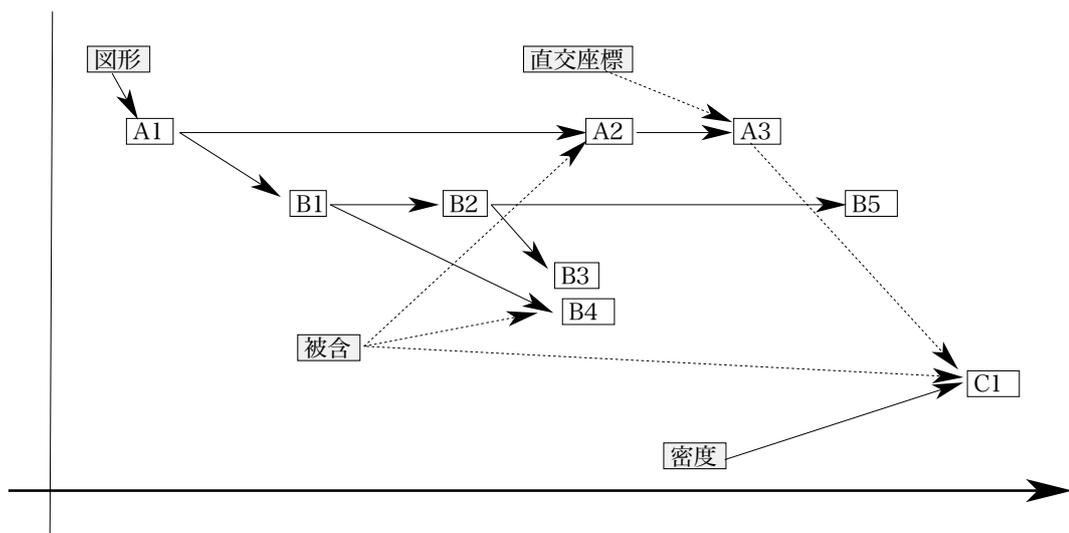


図 1-1 事例問題 1 の問題解決過程

上に示した図によって事例問題に対する問題解決過程は簡略化して表されたが、そこから大学生Kの問題解決過程が、構造化された知識の総体KN(Knowledge Network)内の数学的知識概念を、意識して働きかける事によって解決への数学的観点を得ていき、解決を営むという思考活動の循環である事が示されていると解釈する。

一般に、人は過去における学習の中で何らかの数学的知識・概念を獲得し、各項目を相互に関連付ける事で構造化された知識の総体KNを構築していくと考える。そして、問題解決に際しては、自身の内部に形成した知識の総体KNを機能させる事によって必要な知識が活用されていき、解決への数学的観点が得られていくのである。このように問題解決過程とは「人が、学習経験の中で自身内部へと形成した、構造化された知識の総体KNに働きかける事によって解決を志向していく循環的活動・構造化された知識の総体KNの機能の様相」とであると捉えた上で、次の問題に移りたい。

数学的創造性としての知的思考過程の柔軟性は、どこで発揮され、どのような形で認められるのであろうか。

その問いに対する答えは、数学的創造性は人が行う一連の思考過程(どのように総体KNに働きかけ、構造化された知識を活用したか)において終始発揮されているというものである。つまり、知識,数学的観点,数学的アプローチ,解決の結びつけが行われる際に、数学的創造性発揮は認められると捉えるのである。

しかし、大学生Kの問題解決過程において、ある段階においては解決が独立して想起され、ある段階では複数の数学的知識・観点の組み合わせにより産出されうるといったように、数学的創造性発揮には様相としての何らかの差異が存在する事が考慮されなければならない。これを受けて数学的創造性発揮の様

相としての差異を明らかにする事で、段階的現象として以下のように捉えた。

ここでは、大学生Kの問題解決過程に基づいて“特殊ケースとしての数学的創造性発揮”を捉え、モデルとしての数学的創造性発揮を提案する。

## 1.2.2 数学的創造性発揮の段階モデル

### 数学的創造性発揮の第一段階

#### 第一段階 (結びつけの段階)-First

問題解決においては、まず問題把握が行われた後に総体 (KN) 内の数学的知識・概念と解決予想が結び付けられる。

数学的知識・概念と解決予想の結び付けの媒介として数学的観点 IA が得られる事で、それに基づいた一次解決が図られるのである。此処では、個々の知識間の関係性・結び付きは意識せずに独立なものとして扱い働きかける事で数学的観点が得られていくとし、第一段階 (結び付けの段階) として捉える。

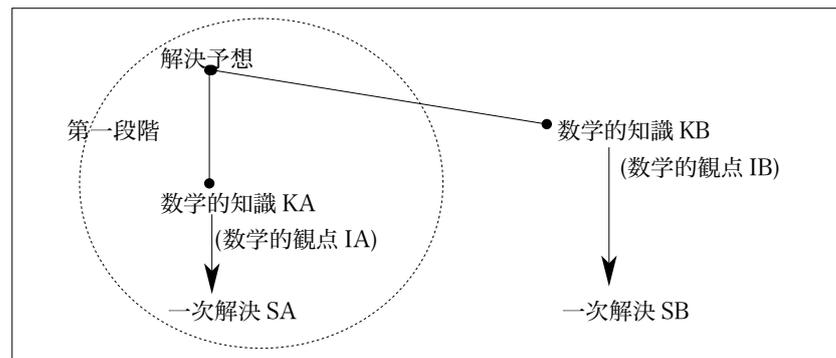


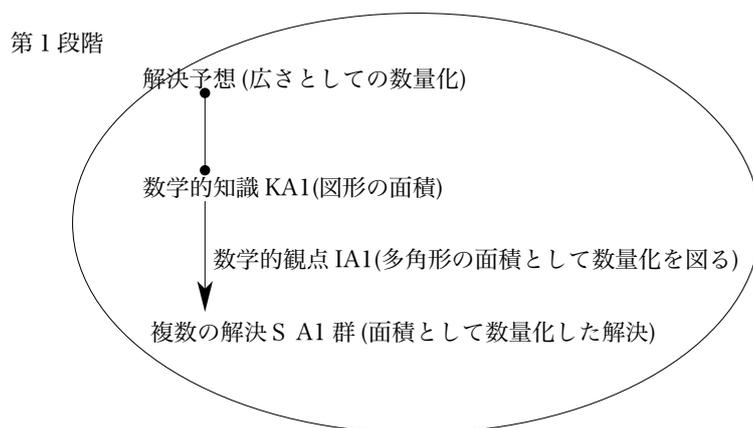
図 1-2 第一段階-結び付けの段階-

上述の段階は、以下の大学生 K の問題解決過程の様相から特定したものである。

当初、事例問題に対して「おはじきの散らばり」を数量化する事を解決であると把握する事から問題解決は始まった。

そして、どういった対象として数量化するかを考える事によって解決予想 (広さとしての数量化) が想定され、知識の総体 KN が機能する事で数学的知識 KA1(図形の面積) が意識され、解決予想と結び付けられたのであるが、その際に結び付けの媒介として得られた数学的観点 IA1(多角形の面積として数量化を図る) に基づいて一次解決 SA1(面積としての数量化) が図られた。

数学的知識・解決らを結びつけた事を捉え、(結びつけの段階)として捉えるが、この段階においては一次解決:「面積としての数量化」に意識が集中し解決を行っており、知識間の関係を意識化出来ていないのが特徴である。



### 数学的創造性発揮の第二段階

第二段階 (数学的観点の変更を求める段階)-Second

一次解決が図られた後、それを手掛かりとした思考活動が行われる。

それは、一次解決と関連する数学的知識を意識し、働きかける事によって別の数学的観点を得ていく別の数学的観点 IB への変更である。此処では、個々の数学的知識・概念間の関連、結び付きが意識される事で数学的観点の変更が為され、それに基づいた二次解決が図られるのである。独立したものとして扱っていた個々の数学的知識・概念間に結び付きを意識し、働きかける過程を第二段階 (数学的観点の変更を求める段階) として捉える。

(一つの観点到固執する事から脱し、観点の変更を求める様相は、思考の柔軟性として評価されうる。) 次図参照

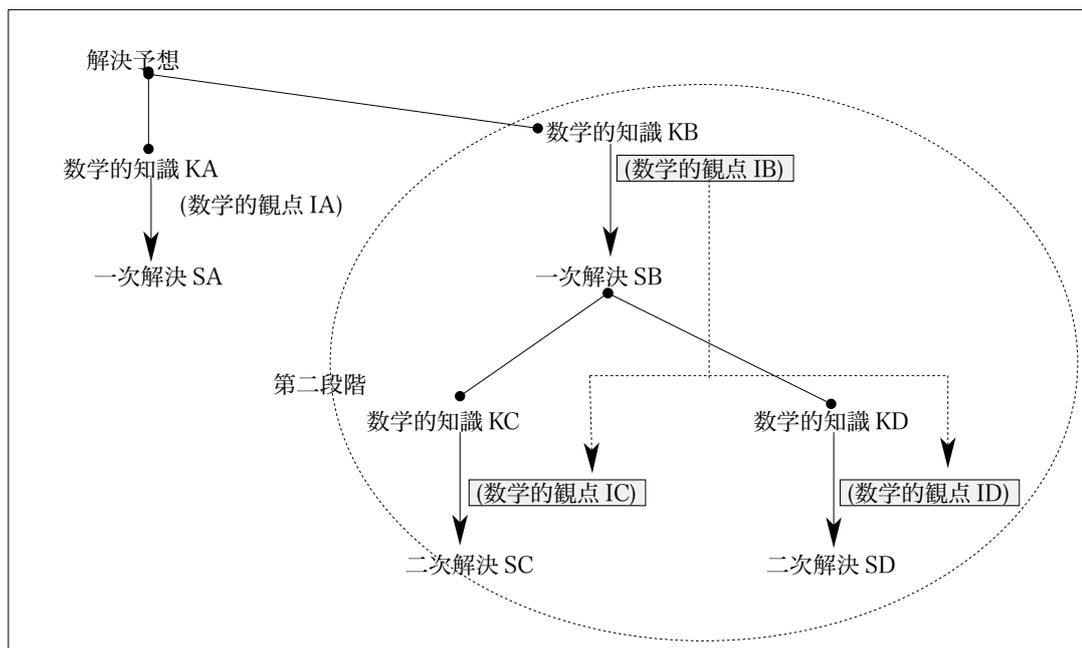
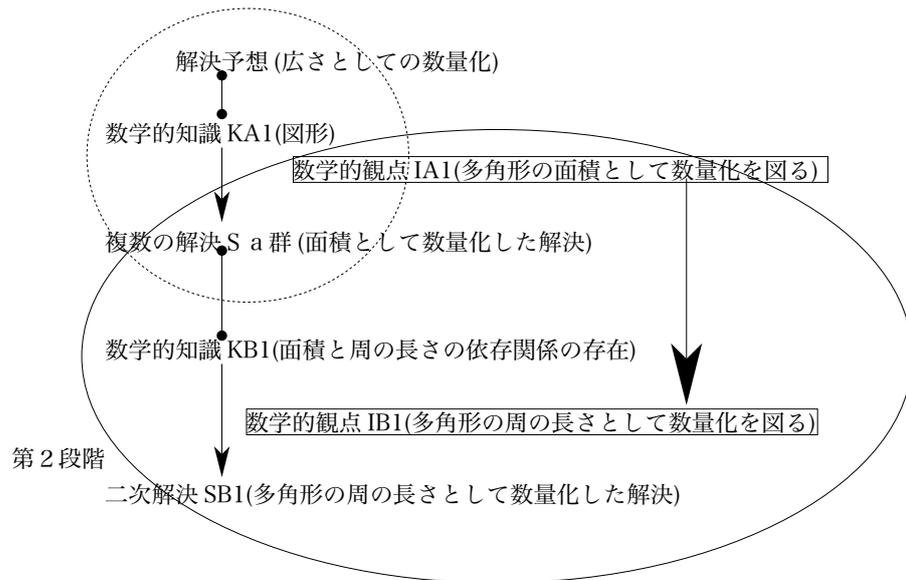


図 1-3 第二段階-数学的観点の変更を求める段階-

上述の段階は、以下に示す大学生 K が見せた問題解決過程の様相から特定している。

一次解決 SA1(多角形の面積として数量化)を図った後、それを手掛かりとした「図形の面積」と関連する数学的知識 KB1(図形の面積と周の長さに依存関係が存在する)が意識され、働きかけられた。「長さ」だけに着目した結果として、数学的観点 IB1(多角形の周の長さとして数量化を図る)が得られ、それに基づいての解決 SB1(多角形の周の長さとしての数量化)が図られた。此处では構造化された総体 KN 内に在りながらも、独立なものとして扱われた知識・概念間に結び付きが意識される事で、IA1(面積としての数量化)から IB1(長さとしての数量化)へと数学的観点の変更が可能とされているのである。(下図参照)



### 数学的創造性発揮の第三段階

第三段階 (知識,概念,手法の結合による創出の段階)-Third

問題解決を図る際に、解決予想との媒介である数学的観点の想起、数学的知識・概念の想定が行われる。

それらが何らかの障害によって問題場面に適応しない場合、数学的アイデア・アプローチを結合・創出する事で問題場面への適応が目指される。此処では、複数の考え・知識を結合する事で数学的観点を問題解決へと適応させる事が志向されるのである。第三段階としては、想定された数学的知識を問題解決へと適応させる為に、数学的アイデア・アプローチの創出を経験すると捉える。(知識,概念手法の結合による創出の段階)

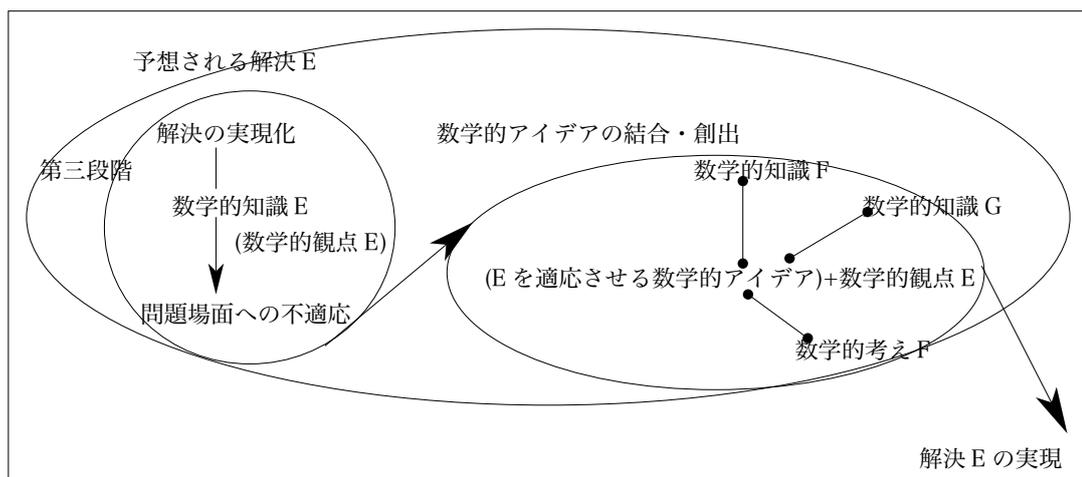
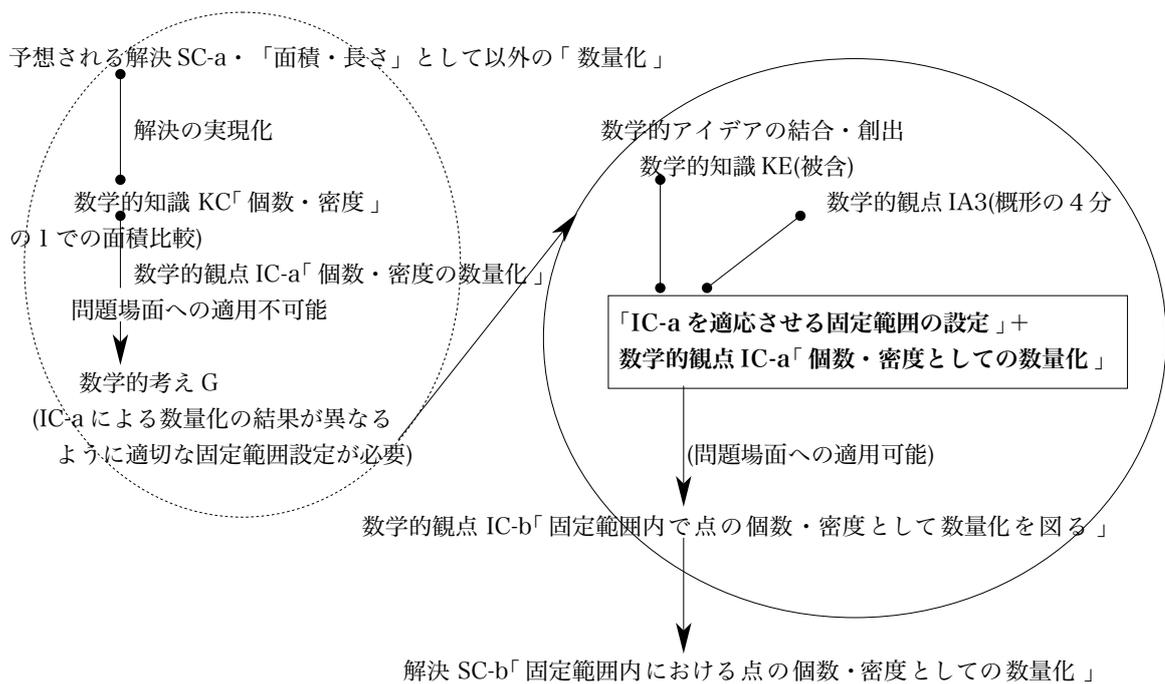


図 1-4 第三段階-知識,概念手法の結合による創出の段階-

大学生 K の問題解決過程において、以下の様相から特定している。

解決予想 SC-a(面積・長さ以外での数量化) を実現化する為の数学的知識 KC (個数・密度) の想定が行われる事により数学的観点 IC-a(個数・密度として数量化を図る) が得られ、解決が試みられた。しかし、問題用紙において規定枠内の密度・個数は同じである為に数量比較は出来ず、問題場面への適用は不可能である。そこで、IC-a を問題場面へと適用させる為の数学的アプローチを結合・創出する事が志向された。それまでの自身の解決過程を振り返る事で、数学的観点 IA3(概形の 4 分の 1 での面積比較) と数学的知識 KE を結合し、IC-a を適応させる固定範囲の設定が創出された。その事で二次的に得られた数学的観点 IC-b(固定範囲内での点の個数, 密度として数量化を図る) が得られ、当初の解決予想は実現化された。

(下図参照)



これまで述べた段階を、すべて児童・生徒個人が経験する「個人的創造の段階」として捉えるならば、それとは異なる形による創造が数学学習の場では展開されるであろう。それは、教室という社会的集団が営む学習場面における数学的知識創造の共有であり、生徒対生徒間・生徒対教師間・生徒集団対教師間の社会的相互作用によるものである。この教室という準公的場面における創造が「準公的創造の段階」として存在する事を捉えておきたい。

これまで述べてきた数学的創造性発揮は、多様な解決 (divergent production) を産出する問題解決過程に基づいて捉えたものであるが、多様な解決を産出する事のみが「数学的創造性」あふれる唯一の行動であると言い切ることは出来ない。それとは対照的に、一意な解決 (Convergent production) を産出する過程に対する考察に基づいて捉えられ得る数学的創造性も、確かに存在すると考えるのである。しかし、そのような一意な解決の産出過程に対して、「独創性」という側面からの評価が行われる事は、とりわけ学校教育の場においては憂慮されるべきではないだろうか。独創性の観点から何らかの評価

が行われる事は、解決が平凡であるか、独創的であるかを問う事であり、絶対的価値付けに基づくもの評価である。しかし、児童、生徒に与えられる評価は、学習者が置かれている学習空間・教室集団内における相対的価値付け以外の何ものでもない。ある集団Xの中では独創的であると評価された考えが、集団Yの中では全く違う評価をされる事がありうるのである。この点を考慮し、本研究においてはすべての生徒に創造性を期待するという立場から、個人的創造の段階に限定する形で以降の議論を進めていきたいと考える。

次章では、解決の産出が妨げられる際に、問題解決過程で何が起こりうるかという事に焦点を当て考えていく。

## 第二章

### 思考の固執・Fixation

- 2.1 数学的創造性研究における思考の固執 (Fixation) への着目
- 2.2 思考の固執 (Fixation) –ゲシュタルト心理学から捉えて–
- 2.3 思考の固執と数学的創造性 –本研究における数学的創造性–

本章においては、第2の課題「数学的創造性が発揮されない状態がなぜ起こりうり、また克服をどう達成するか」について議論を進める。

2.1 数学的創造性研究における思考の固執では、Haylock.D.W, Allinger.G.Dの言明を基に、問題解決過程における数学的創造性発揮を妨げるものとして生徒の主観的要因である思考の固執・Fixationが挙げられる事を示す。

そして、Allingerの言明に基づいて考察を進める事で、「固執・Fixation」は全面的に否定されるべき現象であるか、創造的問題解決過程において真に考慮されるべきは何であるかに対して議論を行う。

2.2 思考の固執 (Fixation)-ゲシュタルト心理学から捉えて-においては、Maierの方向・directionの概念を持ち込む事によって問題解決と過去経験の関わりを明らかにしていく。そして、問題解決過程における解決発生を理解する事で、現象としての思考の固執 (fixation) を定義する。

2.3 思考の固執と数学的創造性-本研究における数学的創造性-においては、知的思考過程の柔軟性として捉えた数学的創造性と思考の固執 (fixation) の関係を考慮する事で、本研究における数学的創造性として焦点を当てる"知的思考過程の柔軟性"に対して再度の捉え直しを行う。

## 2.1 数学的創造性研究における思考の固執 (Fixation)への着目

前章においては、問題解決過程を「人が学習経験の中で、自身内部へ形成した構造化された知識の総体 KN に働きかける事によって解決を志向していく循環的活動、構造化された知識の総体 KN の機能の様相」とし、数学的創造性発揮の状態を「問題解決過程における知識・数学的観点、数学的手段・解決の結び付けの様相」として段階的に捉えた。しかし、この捉え方からは、望ましい姿で数学的創造性を発揮させる為には、構造化された知識の総体を形成し、活発に機能させればよいという安易な結論が導かれかねない事が懸念される。そして近年の数学教育研究においては"創造性育成"を主題として、知識や情報が構造的に組織化された機能的なネットワークを如何にして形成するか・構造的思考を活性させるかについての議論が為されてきた。(斎藤,2003)

斎藤は、個々の学習項目の理解に加えて、学習項目相互の関係・学習項目全体の構造的な関係を捉える際に働く思考を構造的思考と呼び、創造性に関連して「構造的思考は、創造的思考活性化の基盤として極めて大切である。」と述べている。(斎藤,1998)そして、創造性発揮の基盤である機能的なネットワークを形成する為にコンセプトマップを用いた指導を提案している。確かに知識・情報の機能的なネットワークが望ましい形で形成されているかが、数学的創造性発揮に少なからず影響を及ぼす事は否めない。しかし、機能的ネットワークの形成が為されさえすれば、数学的創造性はより望ましく発揮されるという結論が導かれるならば、それに対して疑問を持たずにはいられない。それは、次の問いに答える事によって容易に導かれるのではないだろうか。

「現実上には観察不可能ではあるが、全く同様の状態に機能的ネットワークが形成された児童・生徒が二人存在すると仮定したい。そのような仮定のもとに彼等二人が在る時、数学的問題解決において両者は同様に創造性を発揮する事が出来るであろうか。同様のレベルで解決が産出される事は可能であるだろうか。」

人は、この問いにどのように答えるであろうか。

筆者の答えは「否」であり、数学的創造性発揮を左右する要因は、構造的な知識の総体の形成のみではないと考える。

つまり、児童、生徒の問題解決過程においては、彼等が持つ何らかの主観的要因が作用する事によって数学的創造性発揮は促され、時に妨げられているのではないであろうかと考えるのである。

では、問題解決過程において、いったい何が起こる事により数学的創造性発揮が妨げられるのか・主観的要因とは何か。

この問いに対して Haylock は、一つの観点を挙げ、言及している。

Haylock は、問題解決における思考過程への着目・考察から得られる「数学的創造性」に対する一つの重要な観点として、「知的思考過程における柔軟性の相対物・思考の固執・Fixation」を指摘し、これについて言及している数人の研究者 (Kruteskii, Balka, Cunningham, Scheerer, Allinger 等) を挙げている。(Haylock.D.W,1987)

それぞれの主張は以下に示すものである。

Kruteskii は、固定観念から解き放たれる事によって、知的操作過程 (mental operation process) において柔軟性を示す能力を強調し、Balka は、数学における創造的能力を測定する為の6つの評価観点・判断基準のリスト中に、解決を得る為に、自己を確立された思考の構え (mind set) から解き放つ能力を含めて考察を行い、Cunningham は「固執と見なされる行動は、パーソナリティと状況的要因の相互作用の潜在的結果である」と論じている。(Haylock.D.W, 1987 から引用) そして、Allinger(1982) は、数学において知的作用要素・構え (mind set) は、有益な技能・技術の自己内部への組み込みによって、実際には時折好ましい結果をもたらす場合もあり得るが、問題に対する的確、有効な解法へと到達する事を阻害する精神作用的障害物 (mental obstruction) を形成する

事によって好ましくない有害な物となり得る事実を強調し、小・中学校段階の児童が示す固執, 固着として「Einstellung effect・Functional fixedness・Visual perception」の3タイプを挙げている。「Einstellung effect」は、ゲシュタルト学派のLuchinsが研究の対象として明らかにしたものであり、過去経験の中で確立されたアルゴリズムを継続的に使用することによって偏った解決過程を踏み、特定の場合に問題解決が妨げられる現象を指す。この現象にみられるように、人間の行動として示される固執とは過去経験において成功的解決が図られた事により確立されていくものであり、特定の行動が過去同様, 直面する問題場面においても成功的結果をもたらすであろうという主観的保証に基づくのである。

このAllingerの主張から、Mind setの作用によって起こり得る「思考の固執」が問題解決過程に如何なる作用を与えるかを考慮するならば、その作用が成功的結果・不成功的结果のいずれをもたらすかによって(Positive case/Negative case)の二つが存在すると捉える事が出来る。(図2-1,2-2参照)

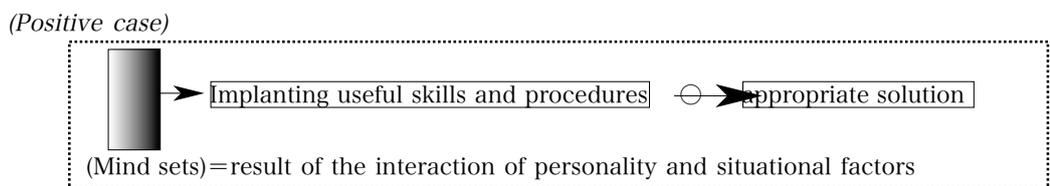


図2-1 Positive caseの固執

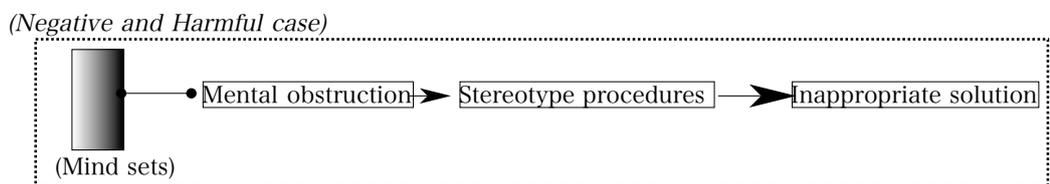


図2-2 Negative caseの固執

上述のように、(Mind sets)によって起こる思考の固執を捉えるならば、その現象を全面的に否定する立場には立つ事は出来ない。それは、人が営む思考活

動としての問題解決が解決予想を実現化する為の志向的活動である点を考慮するならば、特定のアルゴリズム・アプローチ・知識・概念・固定観念を用いるといった固執的行動は、的確な解決を求めるがゆえに示される事が理解される為である。そして、解決実現の主観的保証に基づく固執的行動が成功的結果をもたらす事は幾度も経験され・強化されていく為に、志向的問題解決においては、ある程度のレベルで「固執」が必然的に生じる事が予想されるのである。

問題解決過程において考慮されるべき対象・否定されるべきは、不的確な結果へと至り、その状態を保持する Negative case の固執なのであり、創造的問題解決においては、その固執から自己を解き放ち、的確な解決へと至るよう克服する事が必要となるであろう。この事は、Kruteskii が主張する「固定観念から解き放たれ、知的操作過程における柔軟性を示す能力の強調」と同値であると捉えている。

次節以降では、ゲシュタルト学派の考えに基づいて「思考の固執の克服」に言及し、その克服を考察していく。

## 2.2 思考の固執 (Fixation)ーゲシュタルト心理学から捉えてー

### 2.2.1 思考の固執と過去経験との関係ーMaierの方向(direction)ー

現象としての"固執・fixation"を、ゲシュタルト学派の考えに基づいて捉えていくが、その前にゲシュタルト学派の考えについて触れておきたい。

ゲシュタルト学派のアプローチにみられる基本的概念の一つは、人間の思考には二種類が存在するというものである。一方は、新しい解決の創造に基づくもので生産的思考 (Productive thinking) と呼ばれるものであり、他方は、問題に対する過去の解決の応用に基づくものであり、古い習慣あるいは行動が単に再生される再生的思考 (Reproductive thinking) と呼ばれるものである。(Mayer.R.E,1979) 再生的思考は、過去において学習した手続き・アルゴリズムの盲目的再生という特徴を持ち、思考の単位として刺激 (stimulus) と反応 (response) 間の連合を用いる事で説明され、連合主義によって研究対象とされた。連合主義の見解によれば、問題解決とは過去経験による解決習慣の応用・または試行錯誤的なものであり、概して再生的であると捉えられている。

これに反してゲシュタルト学派は、より複雑な種類の思考・心的プロセスである生産的思考を説明する事に自らの問題を限定した。彼等が対象とした生産的思考の特性は、「観点変更によって新しい思考体制が成立する事によって、新しい結論が導出される過程である」というものであり、思考材料の再体制化を伴う点である。そして、本研究において議論の対象としている数学的創造性発揮が認められた問題解決過程において働き得る思考は、この生産的思考と共通項を持つものであると理解する。

本章では、数学的創造性発揮を妨げる要因として思考の固執を捉えていくが、その事と密接な関係を持つ事実が、ゲシュタルト学派によって提案されている。それは、「人は問題解決の構え (problem solving set) を変えられない為に問題解決に行き詰まる」というものであるが、ゲシュタルト学派は、先行経験が問題

解決の構え (problem solving set) を形成していくとしているのである。

そして、問題解決の構え (problem solving set) が、一定の新しい問題解決事態において過去習慣の再生的応用を導き、生産的問題解決を抑制するという「先行経験の負の効果」が唱えられた。先行経験によって形成された“問題解決の構え”の硬さが、生産的問題解決を抑制する固執・fixationを生じさせると主張されているのである。この主張の基盤を為すのは、Luchins, Duncker, Birch & Rabinowitz 等が行った研究である。

Luchins(1942)は、特定のアルゴリズムの継続的使用といった機械的な思考の有害さを「Einstellung effect」研究の中で明らかにし、Duncker(1945)は機能的固着 (functional fixedness) に関する研究の中で、過去経験の盲目的再生が問題解決の生産性をいかに限定するかを明らかにする事に取り組んだ。このように、ゲシュタルト学派の多くの研究者によって「先行経験の負の効果」は立証されながらも、本質的には「問題解決過程において“過去経験が働くかどうか”という事は重要な問題としては議論されていない。ゲシュタルト学派が重要視するのは、「いかなる種類の過去経験が働き、過去経験から得られたものが如何にして介入してくるか」という問題である。

その事は、Wertheimer, M.の著書から引用する以下の記述からも明らかであろう。

「大切な問題は過去経験が働くかどうかということではなくして、いかなる種類の過去経験が働くかという事である—盲目的な結合かそれとも結果として出てきた有意味な移調を伴う構造的把握かということである。また、過去経験によって実質的に得られたものがいかにして介入してくるのか。それは外的な再生によるのか或いは構造的な要求、実質的な機能的適合性に基づいてであるかどうかが大いなる問題である。」(Wertheimer, M, 1952)

非創造的問題解決過程においては、先行経験において形成された問題解決過

程の構えの硬さによって、手続き・アルゴリズムの盲目的再生とその保持が続いてしまうが、この現象のみを考慮して「過去経験が働くことが有害である」と結論付ける事は価値を有しないのである。なぜならば、過去経験の作用が成功的解決をもたらす場合(過去に経験した一定の機能が、新しい事態で必要な機能と類似な場合、一般的な経験が有意味な形で獲得され、新しい問題事態を再構造化するために利用可能な必須の行動レパートリーとして働く場合)も存在し得る事が考慮される為である。真に重要なのは、問題解決と過去経験が、どのように関係しているかを理解する事なのである。この問題(過去経験と生産的問題解決との関係)に対する一つの答えを導く為に、Maierの「方向・direction」という概念を持ち込む。

Maierは、実験的研究に基づいて、生産的思考に関して次のような結論に到達したゲシュタルト学派の研究者である。

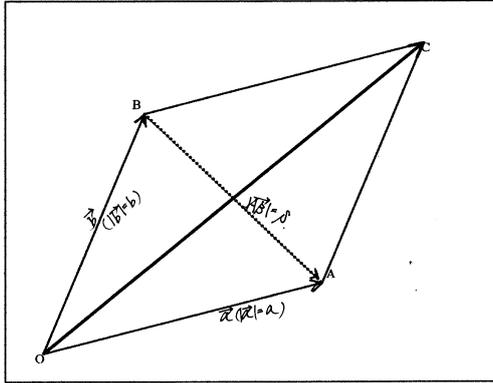
彼の結論は、「思考は、既往の経験の諸部分を新たに結び付ける新結合であり、そのような新結合は常に一定の方向(direction)に向かって起る」(K.Duncker, 1952)というものである。

この事を、次の数学的問題解決を例に見ていく事にする。

事例問題 2) 平行四辺形の二辺と対角線が与えられているとき、他の対角線を求めよ。(G.Polya, 1964)

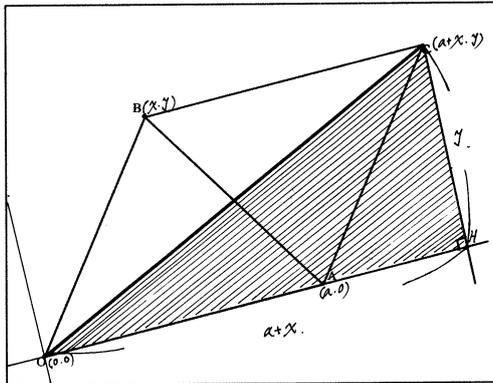
事例問題 2 に対する解決として以下の 2 つが図られたが、それぞれには方向・direction が存在する。

解決 1 は、(direction-1)…対角線 OC の長さを OC ベクトルの絶対値とする。



$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{OB} \cdot \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \\ |\vec{OA}| &= a, |\vec{OB}| = b, |\vec{OC}| = L, |\vec{AB}| = S \\ L^2 &= a^2 + b^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ S^2 &= a^2 + b^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ \therefore L^2 + S^2 &= 2(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

解決 2 は、(direction-2)・・・対角線 OC の長さは直角三角形 OHC の斜辺とする。



$$\begin{aligned}O(0,0), A(a,0), B(x,y), C(a+x,y), OC = L, AB = S \\ OB &= \sqrt{x^2 + y^2} = b. \\ S^2 &= (a-x)^2 + y^2 \rightarrow 2ax = a^2 + b^2 - S^2 \\ L^2 &= OH^2 + CH^2 = (a+x)^2 + y^2 \\ \rightarrow L^2 &= a^2 + b^2 + 2ax \\ L^2 &= 2(a^2 + b^2) - S^2 \\ \therefore L^2 + S^2 &= 2(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

(解決 1) と (解決 2) では、問題解決過程の中で構造に差異が生じている。

解決 1 において「対角線 OC の長さ L」は、OC ベクトルの大きさとして扱われ、解決 2 においては x-y 直交座標系において構成されている直角三角形 OHC の斜辺の長さとして扱われる事で各々の解決が図られたのである。解決 1・2 の問題解決において、用いられた問題要素は同様でありながら、解決へ向けて取られた思考・手法が異なるのは、2つの解決が異なる方向 (direction) に基づいて図られた為である。このように問題解決においては、方向 (direction) に沿って思考が起るのであり、方向が異なるならば起る思考にも差異が生じてくるのである。

Maier が「方向 (direction)」と名付けたものをよくみると、方向とは初期の解決段階もしくは解決過程中的問題変革に他ならないのであるが、この初期の解決段階における問題変革・方向を決定し得る要素として、過去経験が挙げられる。つまり「過去経験と問題解決との関わり」とは、「過去経験が問題解決に、ある種の方向 (direction) を与える」ことであると理解するのである。

そして、問題解決を「方向 (direction) に従って行われる問題要素の再体制化」であると理解するとき、過去経験が対象の機能のある方向に固着させるようであれば、それは創造的問題解決に有害なものとなるのである。

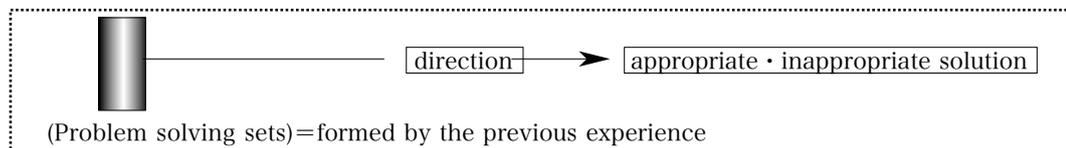


図 2-3 過去経験と問題解決の関わり

問題解決と過去経験の関係は“過去経験が問題解決に方向 (direction) を与える”ことであると理解した上で、「問題解決の方向 (direction) が、如何にして与えられるか」を明らかにする為に、問題場面における解決発生を再度捉え直す。

## 2.2.2 問題場面における解決発生・方向(direction)の獲得—目標分析・葛藤分析・材料分析—

問題場面において図られた試行が"解決"として理解される為には、その解決が問題場面が要求する機能的価値を実現している事が必要であり、解決は機能的価値の実現に向けて図られる。Dunckerによると、このような機能的価値が先行しない解決は"上からの喚起"に基づいた解決と呼ばれる。そして、"上からの喚起"による解決に反して、機能的価値が解決実現に先行した"下からの喚起"による解決がある。後者の種の解決は少なからず存在する。解決は、上からの喚起・下からの喚起という2つの向きに従って発生するとされるのである。

では…どのような過程を経て、解決は機能的価値を実現していくのであろうか。K.Dunckerは、解決と問題とが実際にどういう関係にあるかという問いに対する答えを「解決は、常に何らかの危機的場面契機の変更にあるといえる」とした。彼によると、場面に対する適切な分析、とくに目標に従って適切に場面契機を変更する努力こそが、思考による解決発生の本質なのである。(K.Duncker,1952)

そして、問題解決が著しく停滞する時、解決者が変更すべき場面契機としては、3つの契機(葛藤契機・材料契機・目標契機)のいずれかが認識される事になる。

葛藤契機とは、「どこで解決に失敗するのか,何を変化させなければならないか」の問いに答えるものであり、それに対して「何を解決に向けて使用することができるのか」の問いに答えるものが材料契機であるが、それぞれの契機に対する反応として場面分析が行われる事で違う方向性を持つ解決が図られる。葛藤契機への反応である葛藤分析によって「上からの喚起」、材料契機への反応である材料分析によって「下からの喚起」に基づいた解決が図られるのである。

その事を説明する為に、次の例題3に対する数学的問題解決を例に、上述の

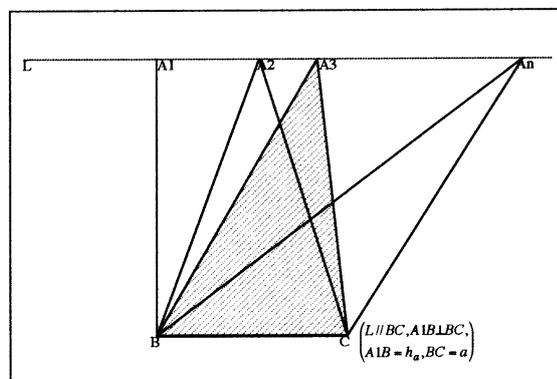
考えに基づいて解決発生を捉える。

事例問題 3) 与えられた条件  $(a, h_a, \alpha)$  から三角形 ABC の構成方法を考えよ。  
(G.Polya, 1964)  
(頂点 A の対辺 BC の長さ  $\cdots a$ , 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線の長さ  $\cdots h_a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ )

事例問題 3 に対する問題解決の目標は、与えられた条件を満たす三角形の構成であるが、言い換えれば三角形 ABC の諸要素 (底辺・高さ・角) を与えられた条件に如何にして一致させるかである。

そこで、まず底辺 BC を長さ  $a$  の線分として取った後、頂点 A から底辺 BC への垂線の長さ・高さを  $h_a$  と一致させる事が志向された。そして底辺 BC からの距離が  $h_a$  である直線上に、頂点 A が置かれた。

(direction-1)  $\cdots$  頂点 A の軌跡は、底辺からの距離  $h_a$  の直線である。



この状態においては、与えられた条件のうち 2 つが満たされたが、残る条件 ( $\angle BAC = \alpha$ ) を満たす解決は偶発的にしか生じない事が認識される。ここでは、葛藤契機として「何を変化させなければ、 $\angle BAC = \alpha$  は満たされるか」が意識される。

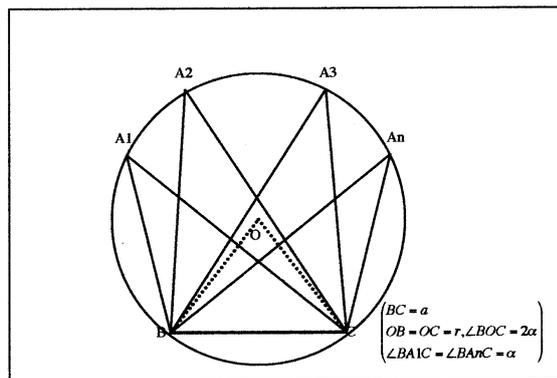
この契機に対する反応として  $\angle BAC$  を  $\alpha$  と一致させる事が志向された。

これに基づき、 $\angle BAC = \alpha$  と一定値が取られるときの頂点 A の軌跡が要求されていく。

材料契機「 $\angle BAC = \alpha$  を満たす為には、如何なる知識を使用することができるか」の意識である。

そして、 $\alpha = 90^\circ$  の特殊な場合においては、頂点 A は BC を直径とする円を描く事から、 $\angle BAC$  が BC を弧とした場合の円周角として一定値を取るように頂点 A の軌跡が明らかにされる。

(direction-2)・・・頂点 A の軌跡は、 $\angle BOC = 2\alpha, OB = OC = r$  である三角形 ABC の外接円である。



このように場面契機を変更していく事で、解決として機能的価値 (諸要素が条件に一致) が実現化されていく。

そして各々において得られた (direction) を結合する事で、各々が持つ不足が補われていく。

・頂点 A は、(direction-1) の軌跡上に存在し、かつ (direction-2) の軌跡上に存在したのである。

(direction-3=direction-1+direction-2) に基づいて解決は図られたのである。

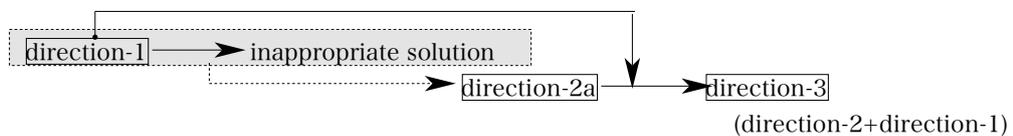
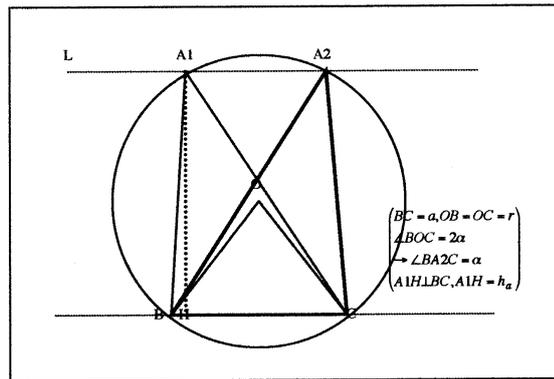


図 2-4) 事例問題 3 における解決発生過程

この問題解決においては、2つの場面契機の変更・場面分析により解決が図られたが、この2つの場面分析に加えて、「問題場面自体が如何なる機能的価値の実現を要求しているのか」という解決目標自体を問う目標分析が挙げられる。

それは「問題場面は、本来何を求めているのか・何をなしで済ましようか」の問いとして現れるのであるが、目標分析による問いへの応答として問題構造が何を要求するかが意識され、それに対応するよう場面契機の変更・葛藤分析が行われる事で解決が発生するのである。

以上を踏まえ、「問題解決の方向 (direction) は、如何にして与えられるか」を次のように理解する。

「不的確な解決至った際には、適宜行われる場面分析(葛藤契機・材料契機・目標契機の変更)によって問題解決の方向・direction に転換が起き、新しい direction が獲得され、機能的価値が実現されていく。」(図 2-5 を参照)

このように捉えるならば、問題解決の方向・direction の変更の意識化が可能

である事が説明されるのである。

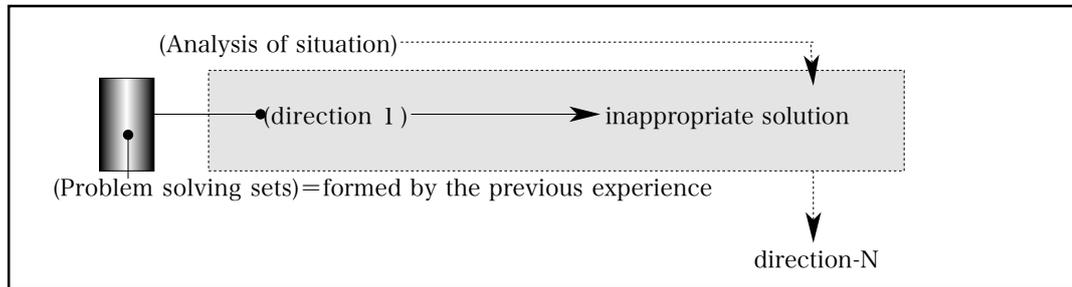


図 2-5 direction 獲得の過程

### 2.2.3 思考の固執 (Fixation) の定義

前節までに触れたゲシュタルト学派の考えに基づき、本研究において考慮の対象とする「思考の固執・Fixation」を、以下のように捉える。

数学的問題解決においては、解決者の主観的保証に基づいて特定の数学的知識・概念・アプローチ・アルゴリズムの使用が示される。それは、以前の類似した問題事態においても、ある解決アプローチ・アルゴリズムを用いる事によって成功的結果を得たという過去経験に依存する、方向付いた (direction を持った) 思考活動である。固執 (fixation) とは、思考活動の方向 (direction) を保持し続け、それから離れる事が出来ないという現象であり、次のように定義される。

・思考の固執-fixation の定義:

「成功的結果を得た先行経験により与えられた問題解決の方向・direction を継続的に保持し,棄却する事が出来ない状態」

そして,2-1 節でも述べたように, "固執 (fixation) には, 過去経験が形成した方向が, 解決者を成功的解決へと至らせる場合 (Positive case) と不成功的解決へと至らせる場合 (Negative case) の二つが存在する"と捉える事が出来る。

この 2 つの場合,特に"Positive case"を考慮するならば, 固執現象を全面的に否定する事は出来ない。問題解決が志向的活動である事からも, direction の継続的保持は解決過程において必然的に生じ, それ故に解決が発生する事はしばしば経験されるのである。上述した「固執-fixation」に関する議論が指すものを, 前節 (2-2-2) で用いた事例問題 3 の問題解決過程において捉え, 以下のように説明する。

事例問題 3 の解決過程は下図 2-6 に示されるものであり, (direction-2…頂点 A の軌跡= $\angle BOC = 2\alpha, OB = OC = r$  の三角形 ABC の外接円) が導いた不的確な解決に対して, (direction-1…頂点 A の軌跡=底辺からの距離  $h_a$  の直線) を結合し

た事によって得られた ( $\text{direction-3}=\text{direction-1}+\text{direction-2}$ ) に基づいて解決は図られた事を示している。

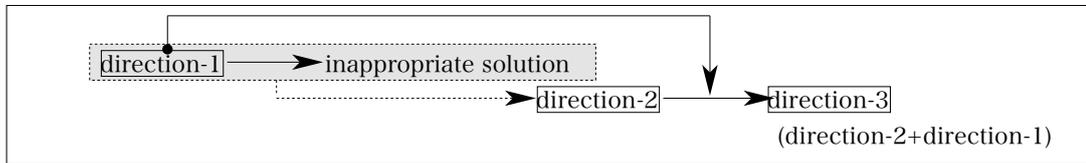


図 2-6 事例問題 3 における問題解決過程

この過程において、それぞれの direction-1,-2,-3 に基づいて解決が試みられた事から、それぞれに対する継続的保持が認められる。この direction-1,-2,-3 の継続的保持状態が固執であり、direction-1,-2 に対する固執が強く生じた為に、2 つの結合が起り得たのである。このように強い固執は時として成功的解決を導き、また不的確な解決をも導きかねない現象であるが、"固執・fixation"が問題視され、認識されるときは、むしろ不的確な解決へと陥り、成功的解決への障害となるときである。そして、問題解決における解決発生が direction に基づく事からも、創造的問題解決過程において否定されるべき対象は、(Negative case) の固執なのである。

望ましいと捉える数学的創造性発揮の為には、誤った方向・direction の継続的保持状態から自己を容易に解き放ち、的確な解決へと至るように方向を変更する事が必要となる。

## 2.3 思考の固執と数学的創造性—本研究における数学的創造性—

2.1,2.2 においては、数学的創造性発揮を妨げる主観的要因として思考の固執 (fixation) を挙げ、ゲントルト学派の考えに基づいて定義した。本節においては、知的思考過程の柔軟性として捉えてきた数学的創造性を、固執 (fixation) 現象に対する考えを持ち込むことによって、より明確に捉え直す事を目的とする。

1.1.2 で述べたように自身が捉える“数学的創造性”とは、複数の数学的知識・解決の手続き・アルゴリズムを組み合わせることで解決を実現する数学的観点を得る能力であり、Kruteskii(1976) が言及する“知的思考過程の柔軟性”とした。

人は、自身の内部に構築した知識の総体 KN を機能させることで、解決の機能的価値を実現する為に数学的観点・方向 (direction) を得ていき、問題解決を図っていく。そして、自身の問題解決過程を適宜,分析することによって新しい方向 (direction N) への修正,または獲得が為されていくが、この過程において、連続的な direction の獲得,修正を可能にする能力こそが数学的創造性である。

そして、(direction1) を継続的に保持する事によって (direction N) の獲得が妨げられる状態を「思考の固執」として捉えておこならば、数学的創造性が発揮される際には「固執の克服」が必然的に伴われる。言い換えるならば、総体 KN を機能させる事によって direction を獲得し、固執・fixation を克服する過程が数学的創造性の発揮なのである。(図 2-7 参照)

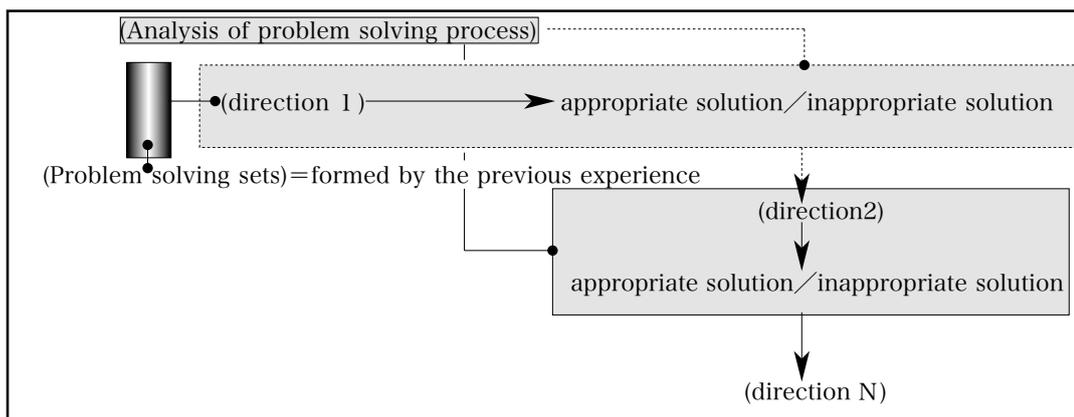


図 2-7 数学的創造性発揮の過程-固執の克服過程-

固執が生じた場合には，場面分析（葛藤分析，材料分析，目標分析）が行われる事で，その克服を意識化する事が可能となると考える。以下では，問題解決指導によって生徒が固執を克服するとはどのような過程を指すのであるかを，実際の問題解決過程をたどる中で説明する事を目的とする。

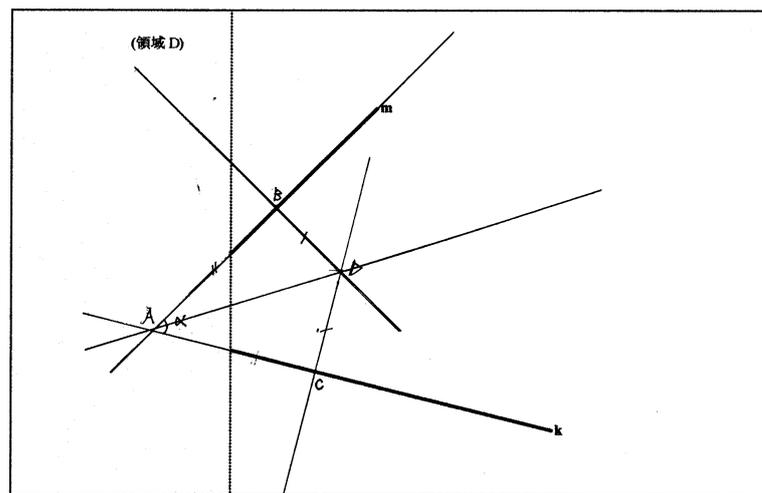
事例問題としたのは，中学校 1 年「平面図形-基本的作図」で扱われる角の二等分線の作図を基本とした問題である。

事例問題 4) 下図において領域 D において，直線  $m, k$  の延長が為す角  $\alpha$  を二等分する直線を作図せよ。(ただし，領域 D 内においては一切作図は行わない事とする。)

この事例問題 4 に対する問題解決は、当初、的確な解決を得るものではなく、各段階における主観的要素によって形成された不的確な direction に基づくものでり、幾度も不的確な解決に至っていく過程であった。最終的に成功的解決へと至るのであるが、それに至るまでには数回の direction 変更が為されていたのである。

まず、この事例問題において求める対象である  $\angle \alpha$  の二等分線は、直線 m,k から等距離にある点の軌跡であり、制限 (領域 D 内での作図は認めない) を無視した場合の典型的解決は次のものである。

解決 0…直線 m,k を延長し、実際に領域 D 内で構成した  $\angle \alpha$  の二等分線  
 (解決 0-作図法) 直線 m,k を延長したときの交点 A から等距離な点 B,C をとる。  
 B,C を通り各々の直線に対して垂直な二直線の交点として F をとる。  
 A と E を結ぶ事で  $\angle \alpha$  の二等分線を作図。



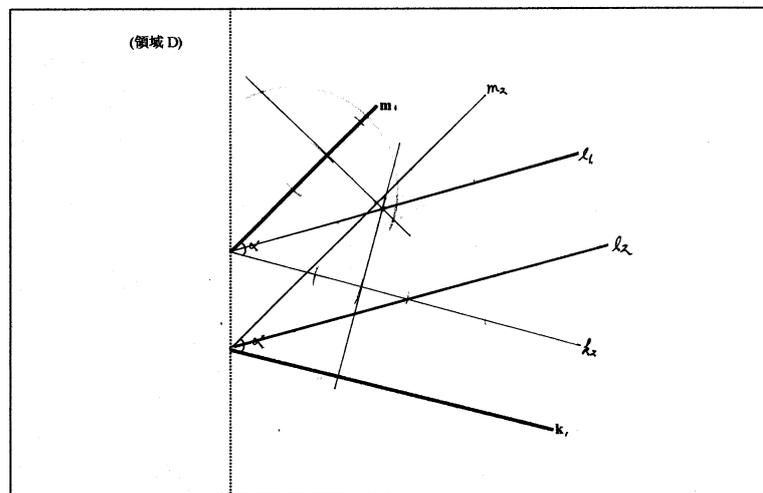
この典型的解決は、領域 D において直線 m,k を延長して  $\angle \alpha$  を構成した後、に作図するものであるが、例題 4 の持つ機能的制限ゆえに問題解決としては不

的確である。そこで機能的制限を考慮し、領域 D ではなく、領域 E に  $\angle \alpha$  を構成する事で問題解決が進行していく。

### 解決 1 (inappropriate solution)

(解決 1-作図法) 直線  $m, k$  の各々に対して平行な  $m_2, k_2$  をひき、 $m_1$  と  $k_2, m_2$  と  $k_1$  が為す角の二等分線  $L_1, L_2$  を作図。

$L_1, L_2$  から等距離な点を  $O$  とし、 $O$  を通り  $L_1, L_2$  に平行な直線をひき  $\angle \alpha$  の二等分線を作図。



領域 E に  $\angle \alpha$  を構成する事で、この不適格な問題解決は進行した。 $m_1$  と  $k_2, m_2$  と  $k_1$  が為す角の二等分線  $L_1, L_2$  を作図した段階で、direction-1(求める  $\angle \alpha$  の二等分線は  $L_1, L_2$  から等距離な点の軌跡である) が得られた。この direction-1 に基づいて  $L_1, L_2$  から等距離な点を  $O$  とし、 $O$  を通り  $L_1, L_2$  に平行な直線がひかれるが、 $m_1 O = k_1 O$  である保証が無く、不適格な解決に終わった。そして、葛藤契機 ( $m_1 O = k_1 O$  が如何にして保証するか) が意識される事で、direction-1 を棄却し、別の direction を持つ事が目指される。そして、実際には再び不適格な解決に終わるのであるが、 $\angle \alpha$  と等しい角を領域 E に見出していく事が考えられ、 $m_2, k_2$  が為す角  $\angle \beta$  ( $\angle \alpha = \angle \beta$ ) の二等分線がひかれていく

事になる。

不適格な解決に至る原因は、inappropriate direction-2( $\angle \alpha$ の二等分線が $\angle \beta$ の二等分線に一致する)に基づいた為であり、それに基づいた不適格な解決が次のように進行する。

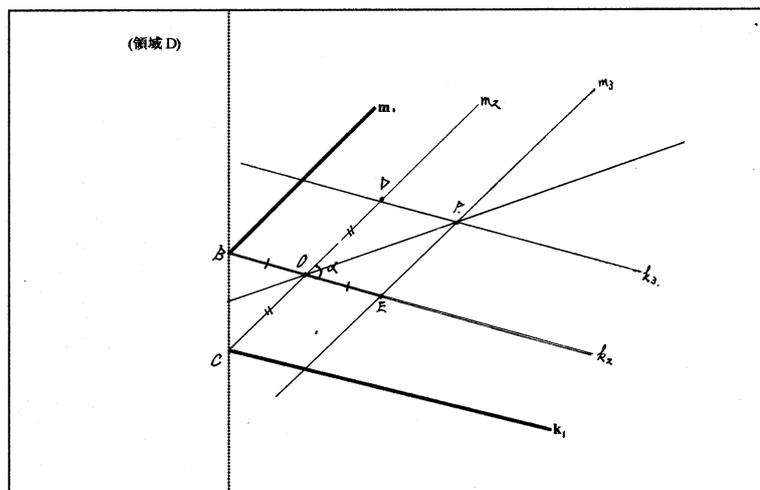
### 解決 2(inappropriate solution)

(解決 2-作図法) 直線  $m, k$  の各々に対して平行な  $m_2, k_2$  をひく。

$m_2$  と  $k_2$  の交点を  $O$  とし、直線  $m_2, k_2$  上に  $BO=OE, CO=OD$  となる点  $D, E$  をとる。

点  $E$  を通り  $m_1$  に平行な直線  $m_3$ , 点  $D$  を通り  $k_1$  に平行な直線  $k_3$  をひき、 $m_3, k_3$  の交点を  $P$  とする。

平行四辺形  $OCPD$  の対角線  $OP$  を延長し、 $\angle \alpha$  の二等分線として作図。



[Analysis of problem solving process]

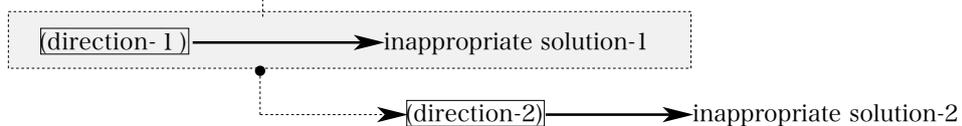


図 2-8 事例問題 4 の問題解決過程-direction1 の棄却-

direction-1 を棄却し、別の direction-2 を持つ事が目指された事で、実際には不的確に終わったのであるが、新たな問題解決が進行したのである。この時点、direction-1 の継続的保持状態である fixation-1 は、direction-2( $m_2, k_2$  が為す角  $\angle \beta$  とすると、求める  $\angle \alpha$  の二等分線は  $\angle \beta$  の二等分線に一致する) の獲得という形で克服されている。そして、direction-2 に基づく解決は、次のように考えられ進んでいく。

「 $m_2$  と  $k_2$  の交点を  $O$  とし、 $BO=OE, CO=OD$  となる点  $D, E$  を直線  $m_2, k_2$  上にとる。点  $C$  を通り  $m_1$  に平行な直線  $m_3$ 、点  $D$  を通り  $k_1$  に平行な直線  $k_3$  をひき、 $m_3, k_3$  の交点を  $P$  とする。作図する  $\angle \beta$  の二等分線は  $\angle \alpha$  の二等分線に一致し (inappropriate point-1)、平行四辺形  $OCPD$  の対角線に一致する (inappropriate point-2) 事から、線分  $OP$  を延長すれば作図すべき直線が得られる。」

この時点では、数学的には不的確である主観的判断 (inappropriate point-1,2) が誤っていると意識されない為に、実際には機能的価値が実現されていないにも関わらず「解決としての的確である」と判断され、結果に至った。

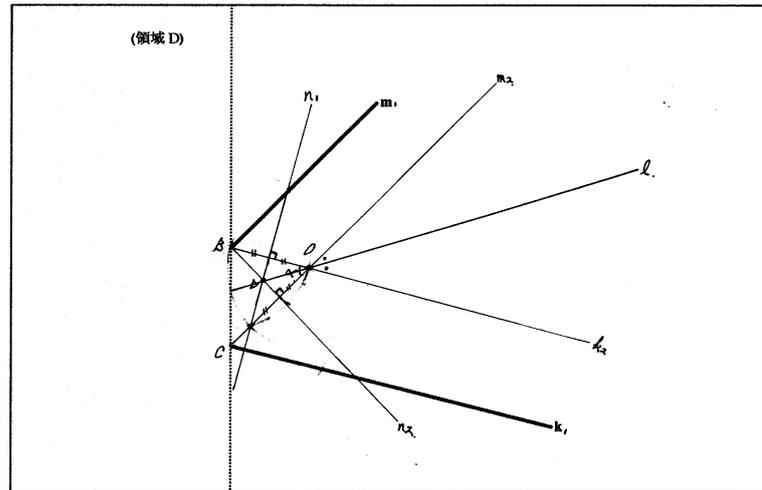
そして、inappropriate point-1,2 の修正が行われないうちに、direction-2 が継続的に保持された fixation-2 が続く。

もし、この解決が機能的価値を実現する為には、 $AO=BO$ 、平行四辺形  $OCPD$  が菱形である事が必要なのだが、それは意識されていないのである。この過ちが正されないままに、direction-2 から二次的に得られる direction-3( $m_2, k_2$  から等距離にある点の集合  $\angle BOC$  の二等分線も  $\angle \alpha$  の二等分線に一致する) へと direction の転換が起き、次の問題解決が進行していくが、本質的には direction-2 に対する継続的保持状態の範疇である。

解決 3(inappropriate solution)

(解決 3-作図法) 直線  $m, k$  の各々に対して平行な  $m_2, k_2$  をひく。

$m_2$  と  $k_2$  の交点  $O$  をとる。 $\angle BOC = \angle \alpha$  である事から  
 $\angle BOC$  の二等分線を作図していく。  
 交点  $O$  から等距離な点  $D, E$  をとり,  $D, E$  を通り各々の直線  
 に対する垂直二直線の交点  $F$  をとる。  
 $O$  と  $F$  を結ぶ事で  $\angle BOC$  の二等分線を作図。



解決 2,3 が図られた後の段階において,それらが不的確であると判断するに至った契機は,  $\angle BOC$  の二等分線と平行四辺形  $OCPD$  の対角線が一致せず, $\angle \alpha$  の二等分線にも一致しないという事実の認識である。この事実を認識する事で, (inappropriate point-1… $\angle \beta$  の二等分線は  $\angle \alpha$  の二等分線に一致) ・ (inappropriate point-2… $\angle \beta$  の二等分線は平行四辺形  $OCPD$  の対角線に一致する) への修正が図られ, fixation-2 の克服が達成されていく。この修正は材料契機 ( $AO=BO$ , 平行四辺形  $OCPD$  が菱形である事を如何にして保証するか) に対する反応として行われていく。

そして, direction-2,3 の棄却が起きると同時に, 再度 direction-1 の保持, direction-2 との結合が起きる。解決 1 における葛藤契機 ( $m_1O=k_1O$  が如何にして保証するか) ・ 解決 2 における材料契機 ( $AO=BO$ , 平行四辺形  $OCPD$  が菱形である事を如何にして保証するか) に対し反応する事で, 二次的な direction を獲得していく事が目指される。

(Analysis of problem solving process)

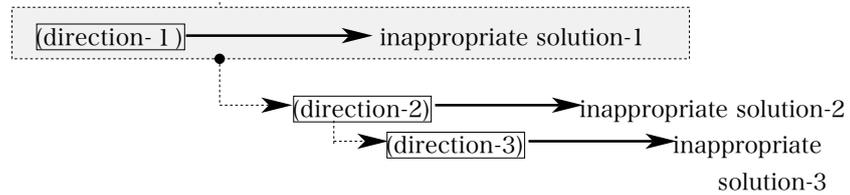


図 2-9 事例問題 4 の問題解決過程-direction2 の継続的保持-

### 解決 4(appropriate solution)

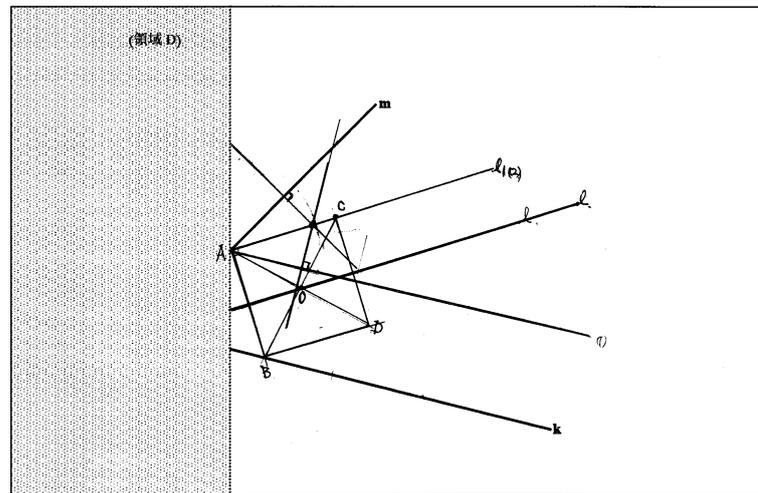
(解決 4-作図法)A 点を通り,直線 k に平行な k2 をひく。

$m_1, k_2$  の二直線よって出来る,A 点を頂点とする  $\angle \beta$  の二等分線 L1 を作図。

A 点を通り,L1 に垂直である直線 n1 をひき, n1 と k との交点 B をとる。

直線 L1 上に,  $AB=AC$  となるように C 点を取り,  $BD=CD$  となる点をとる。

正方形 ABCD の対角線 AD,BC の交点 O を通り, L1 に平行である直線 L を  $\angle \alpha$  の二等分線として作図。



葛藤契機 ( $m_1 O = k_1 O$  が如何にして保証するか) に対しては, 求める直線 L が L1, L2 から等距離にある事を保証する事で, 解決 2 における材料契機 ( $AO=BO$ , 平行四辺形 OCPD が菱形である事を如何にして保証するか) に対して

は、菱形の対角線の性質を direction-4 に結合する事で、各々の契機が変更されていく。

direction-4(direction-1+direction-2)に基づき、求める $\angle \alpha$ の二等分線が L1 に平行であり、菱形の対角線は垂直に交わる事から、A 点を通り L1 に対して垂直な直線 n1 に対する垂直二等分線の作図が目指される。作図法 4 によって示された図上では二直線 m,k から AC,BD への距離は等しく、AC,BD から L に対する距離も等しい事から、m,k から L へは等距離である事が明らかである。

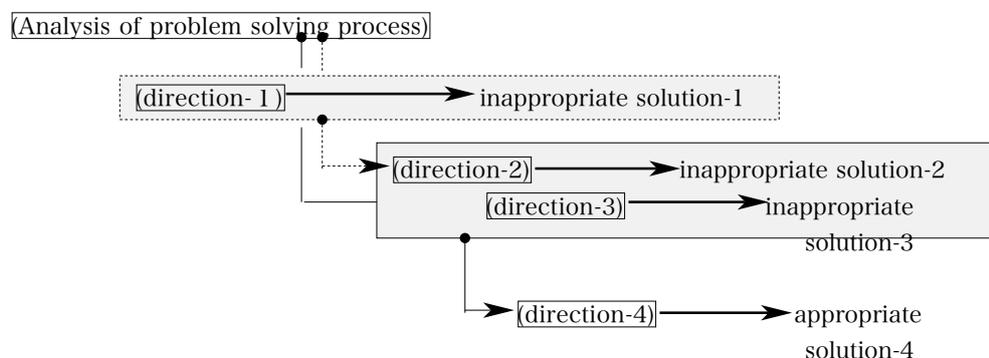


図 2-10 事例問題 4 の問題解決過程-direction2 の棄却-

ここまでで挙げている問題解決過程は、特定の個人固有のものであり、同様の課題に別の個人が直面したならば、異なる過程を踏むであろう事は容易に推察される。所有する知識総体 KN が細部において異なり、主観的要素はより異なる為に二者のたどる問題解決過程には相違が生まれ得るのである。しかし、異なる二者の解決過程においても共通な事実として、direction の保持としての固執 (Positive case/Negative case) が生じる事は挙げられるであろう。

そして、直面する課題が真に当該の生徒にとって問題であるならば、Negative case の固執は経験されうる。

真に問題であるとは、解決発生において、ある程度の困難が伴われる事である人が"問題を持つ"ということは、はっきりと考えられてはいるが、すぐには達

成できない目的を達成する適切な方策を,意識的に探求する事であり, 問題を解くとは,そういう方策を見出す事なのである。(G.Polya.1964)

創造的問題解決過程を考えると,この Negative case の固執は, 考慮され克服されなければならない。

ここで示したように, 人は Negative case の固執が生じた場合において, 場面分析(葛藤分析,材料分析,目標分析)を適宜行う事で, その克服を意識的に達成する事を可能とする。望ましい創造性発揮の為には, 誤った方向 direction の継続的保持状態から自己を容易に解き放ち, 的確な解決へと至るように方向を変更する事が可能とならなければならないのである。

そして, 以上を受ければ, 生徒の数学的創造性として知的思考過程の柔軟性を育成するとは, 生徒自身が内部に構築した知識の総体 KN を機能させ,複数の数学的知識・解決の手続き・アルゴリズムを組み合わせることで, 解決の機能的価値を実現する為の方向 direction を獲得する事を促し, 不的確な direction に対しては適宜修正(固執の克服)を行い, 的確な direction の獲得を目指すよう思考様式を確立させる事であると考え。

## 第三章

### 数学的創造性の育成と問題解決の指導

- 3.1 数学的創造性育成と問題解決指導－従来の創造性育成の方法－
- 3.2 創造性育成の具体的方策としての問題解決指導
- 3.3 中学校数学科における問題解決指導－アプリオリ分析－

本章においては、第3の課題「数学的創造性を育成する問題解決の指導は如何にあるべきか」について答える事を目指し、数学的創造性の育成を志向した問題解決指導の在り方について述べる。

3.1 数学的創造性育成と問題解決の指導－従来の創造性育成の方法－では、従来、創造性育成の方法として挙げられてきた2つのアプローチに残された課題を振り返る。それにより、教師が行う意図的介入が如何に行われるべきかを考える。

3.2 創造性育成の具体的方策としての問題解決指導では、第1章、第2章で得られた成果を基に、数学的創造性の育成を、実際に何であると捉えるかを考える。そして創造性の育成を志向した際に、教師が問題解決指導の中で果たす役割は何であるかについて述べたい。

3.3 中学校数学科における問題解決指導-アプリオリ分析-では、3-2節での「問題解決指導における教師の役割」を受けて「創造性育成の具体的方策」としての中学校数学科における問題解決指導の展開に対するアプリオリ分析を試みる。

### 3.1 数学的創造性育成と問題解決指導－従来の創造性育成の方法－

従来の学校教育においては、数学的創造性を育成する為に如何なる方法が取られてきたのであろうか。

Haylock(1987) が言明しているように、従来、数学的創造性は流暢性、柔軟性、独創性といった側面から評価されており、生徒の示し得る数学的創造性に対して、多様な解決 (Divergent production) を産出するよう設計された問題を用いての測定が試みられてきた。(Prouse, Evans, Baur, Jensen, Maxwell, Balka, Dunn, Zosa, Foster, Mayer, Brandau, Dossey, etc) 測定に用いられた問題を大きくカテゴリー化すると、問題解決 (problem solving)<sup>1)</sup>・問題

---

#### 1) 問題解決 (problem solving)

多数の解決を備える簡潔な数学的問題。1つの典型的な問題として、次のようなものがある。

「(3, 21, 2, 10) という一式の数と加減乗除の記号を用いて、計算結果が (=17) となるように、考えうるだけ多数の組み合わせを作りなさい。(Maxwell)」

その他の問題としては次のようなものもある。

「 $(p + q)(r + s) = 36$  であるとします。p, q, r, s に当てはまるであろう数を考えなさい。(Bishop, 1968)」

「9つの格子点を直線によって結び、面積が2平方cmとなるような多数の異なる形を描きなさい。(Haylock, 1984)」等

提起 (problem posing)<sup>1)</sup> ・再定義 (redefinition)<sup>2)</sup> の3つであり、近年創造性育成の方法としては、問題解決が選択されてきた。

Hashimoto(1997) は、創造性育成の方法として用いられ得るものとして、"オープンエンドアプローチ" ・ "問題の発展的取り扱い (from problem to problem)" の2つを挙げている。

前者のオープンエンドアプローチは、島田茂氏を中心とした研究グループが行った"算数・数学科の高次目標の評価方法開発"をテーマとする研究の中で提案されたものであり、多数の解決 (divergent production) が産出される未完結な問題を設定し、正答の多様性を積極的に利用する展開を指す。

島田氏の著書から氏の言葉を引用すると以下のように説明される。

---

#### 1) 問題提起 (problem posing)

提示された数学的場面、情報を基にして、新しく簡明な問題を創りあげる課題。Prouse(1964) と Balka(1974) の二人は、「問題において、数的情報(例えば、賃金・価格)を含んだパラグラフを提示された生徒が、その情報を元にして描写された場面に対して考えうる小問題を多数記録するよう要求される」といった課題を用いている。Jensen(1973) も同様のアプローチを用いているが、彼が生徒に対して提示した数学的場面は3つの形式で描写されたものである。その3つとは、言語的描写、グラフ式描写、図示描写によるものであった。例えば、「生徒がある棒グラフによって場面提示されたとすると、そのグラフを複数の観点で見ることによって、小問題を抽出し記録するよう要求される」といったものがある。その他の例 (Haylock, 1984) としては、「完成されたクロスワードパズルを提示された生徒が、多数の異なるアイデアを用いるよう促されながら、そのパズルを基に問題を作るよう要求される」といったものもある。

#### 2) 再定義 (redefinition)

再定義 (redefinition) とは、「数学的場面を提示された生徒が、自身が考えうるだけ多数の、変化し、かつ独自の方法で示した反応によって、場面の構成要素に対し数学的性質を根拠として絶えず再定義する」といったものである。例えば、Foster のカード分類テストでは、生徒が分類という自身の行動の根拠をカードの色、組札、偶数、7よりも大きい数、等といった数学的性質を観点に耐えず再定義することを要求されている。

(以上は、Haylock.D.W, 1987 から引用)

「われわれがオープンエンドアプローチと呼ぶ指導の仕方は、未完結な問題を課題として、そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展開し、その過程で、既習の知識、技能、考え方をいろいろに組み合わせて新しいことを発見していく経験を与えようとするやり方を意味するものとする。(島田, 1994)」

後者の問題の発展的取り扱い (from problem to problem) は、オープンエンドアプローチの開発を行ったグループが研究過程で得た結論として"解決のオープンさ"という制限を時として緩和する事が有益であるという考えから考案されたものであり、原問題を出発とし、構成要素の部分を変化(類似なもの、一般的なものへの置き換え・逆を考える)させる事で新しい問題を創る主体的な学習活動を指している。これらの開発に際して、評価の対象であった算数・数学科における高次目標は「数学に関する個々の知識・技能・概念・原理・法則等が子どもの中で一つの知的組織となり、子どもの人間としての能力や態度の一側面となること(島田,1994)」と説明され、その中には創造性という側面も含まれていると解釈される。

Hashimoto(1997) は、これら2つの方法と創造性育成との関係を、2つのアプローチにみられる"多様性 (openness)"に見ることが出来ると述べている。前者においては"解決の多様性"、後者においては"問題の発展方法の多様性"がみられ、それら"多様性"を示す為に、生徒が一つの問題に対して異なる観点,考え方を結合する過程において"創造性"がみられるとしているのである。挙げられた2つのアプローチにみられる良き点は、生徒の問題解決にみられる創造性に対して、量的側面(柔軟性-どれだけ沢山の数学的解決を出すことができるか,流暢性-異なる観点から正しい解決がいくつあげられたか)・質的側面(柔軟性-独自の数学的アイデアをどれだけ思いつくか)の両側面からの評価を試みた事であると捉える。たしかに、生徒に数学的創造性を発揮する問題解決の場面を提供

し、正当に評価を行う事で、各側面を伸ばす事は可能となるやもしれない。

しかし2つのアプローチは、上に挙げた長所を持つと同時に、教授,学習場面におけるまとめや結論が明確にならないという課題も残されており、またこのアプローチを展開するにあたって教師の果たす役割は、数学的創造性を発揮する問題解決場面の設定という消極的介入に終わる事が懸念される。

数学教育において"創造性育成"の重要性を認識し、学校教育において通常展開される授業場面を通して、その育成にあたるとするならば、むしろ教師が行う積極的介入によって達成する事が目指されなければならないのではなかろうか。

"如何なる教育的支援によって生徒の数学的創造性を育成するか、その積極的介入によって教師が果たすべき役割は何であるか。"この問いに答える事が、本研究が最終的に目指し、また行わなければならない議論なのである。

次節では、第1章,第2章で行った議論を基に、創造性育成の為の具体的方策としての問題解決指導についての検討を行う。

## 3.2 創造性育成の具体的方策としての問題解決指導

本節では、課題3. 数学的創造性を育成する問題解決の指導は如何にあるべきかに答える事を目的に、第1章,第2章で明らかにした"数学的創造性"・"思考の固執-fixation"を基に、数学的創造性の育成を志向した問題解決の指導の在り方に対する検討を目指すものである。

第1章.数学的創造性においては、学校教育において生徒に期待し得る側面として、独創性等よりは、むしろ Kruteskii が言及する知的思考過程の柔軟性を育成の対象として選択するに至り、それが問題解決過程において如何なる形で発揮されるかを現象として段階的に捉えた。

2.3 思考の固執と数学的創造性においては、人が知識の総体 KN を機能させる事によって direction の獲得を連続的に達成し、固執・fixation を克服する過程が数学的創造性発揮であると捉え直した。これらを基に考える事で、数学的創造性の育成とは、より望ましい形での知的思考過程の柔軟性の顕在化であり、生徒の数学的創造性発揮を段階的に移行させる事であると捉える事が出来る。これを志向するならば、生徒に次の事を達成させることが"創造性育成"であると考えられる。

生徒自身が内部に構築した知識の総体 KN を機能させ,複数の数学的知識・解決の手続き・アルゴリズムを組み合わせることで、解決の機能的価値を実現する為の方向 direction の獲得を促し、不的確な direction に対しては適宜修正(固執の克服)を行い、的確な direction の獲得を目指すよう思考様式を確立させる事であると考えられる。

そして、学校教育において展開される教授学習場面の中では、創造性育成を達成する具体的方策としての問題解決指導が取られるべきであるという立場をとる。

一般的に生徒は学校教育の場で経験する数学的問題解決において、主体的な

問題解決者である事が望ましく、よりよい問題解決者へと成長する事を促す事こそが教授,学習の目的である。しかし、この目的は教師という第三者の意図に基づく教育的支援という介入によって為されていくのであり、単に問題解決の場が提供されさえすれば達成されるものではない。

つまり,前節で述べたように、教師の果たす役割は、数学的創造性を発揮する問題解決場面の設定という消極的介入に終わるのではなく、より積極的介入によって「創造性育成」を達成していく事に、教育としての価値が存在するのである。

では、如何なる形での教育的支援によって生徒の数学的創造性を育成するのか、その積極的介入によって教師が果たすべき役割とは何であろうか。

2.3 で述べたように、数学的創造性の発揮が「固執・fixation」の克服を伴う事を考慮するならば、その問題解決指導における教師の意図的介入の本質は、生徒自身が陥っている当該の固執状態からの克服を促す事を志向したものでなければならない。そして,その意図的介入は、生徒の問題解決の進行状況を捉えて行われるべきであり、教師の果たす役割にも行われる各段階によって多少の差異が生まれる。以下では、大きく4つの役割に大別し述べていく。

まず、この意図的介入において教師の果たす第1の役割は、固執に陥っている事を生徒自身に意識化させる事にあると捉える。つまり、当該の陥っている固執状態が如何なる方向・direction を継続的に保持する事によって生じているものであるか、そのdirection の不的確さは何に依存したものであるかといった、生徒自身が認識出来ていないいくつかの点を意識化させなければならないのである。

実際の場合では、生徒が問題解決において如何なる解決予想を想定しているのか,如何なる知識や材料を用いて解決を図ろうとしているのか,解決過程において当該の障害となっているのは何であるかを問い,生徒に自身の解決過程に対

して場面分析を行わせ、表現させなければならない。問う事によって明確に意識化できると考えるのではなく、教師が提示していく場面契機(目標契機-問題場面自体が如何なる機能的価値の実現を要求しているのか,葛藤契機-どこで解決に失敗するのか、何を変化させなければならないか,材料契機-何を解決に向けて使用することができるのか)が指すものを先行して表現する事で、活動の主体を生徒に置き、保持している direction が何であるかの意識化を誘発するのである。

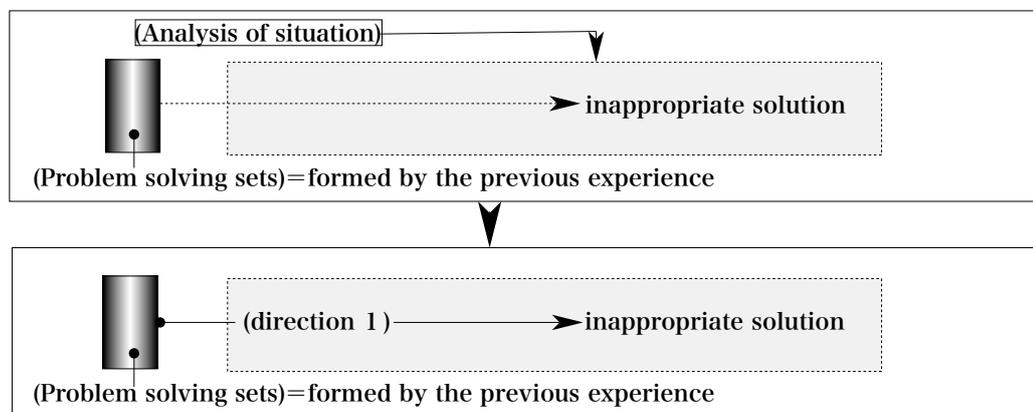


図 3-1 役割 1.固執の意識化-directionの意識化-

そして、第2の役割としては、意識化された direction-1の保持が成功的解決をもたらすであろう的確なものであるならば、それに基づく解決過程の進行を促すよう下位の direction-1aを与えるよう支援を行う事と捉える。

あくまでも問題解決の主体は生徒である事が望ましく、継続的保持が意識された当該の direction-1が成功的解決をもたらすと予想されるものであるなら、その保持を継続する事によって生じる解決発生を支援しなければならない。この場合においては、Positive caseの固執に転化させる事で、問題解決に対する支援が為されなければならないのである。

実際の指導の場面で、教師は生徒に対して direction-1の的確さを保証す

る。そして、その direction-1 に基づく解決過程に存在する葛藤契機(どこで解決に失敗するのか・何を変化させなければならないか),材料契機(何を解決に向けて使用することができるのか)を捉える事が出来れば、それを変更する為に direction-1 に結合されるべき下位の direction-1a を与える事で解決過程の進行を支援する事が出来るのである。

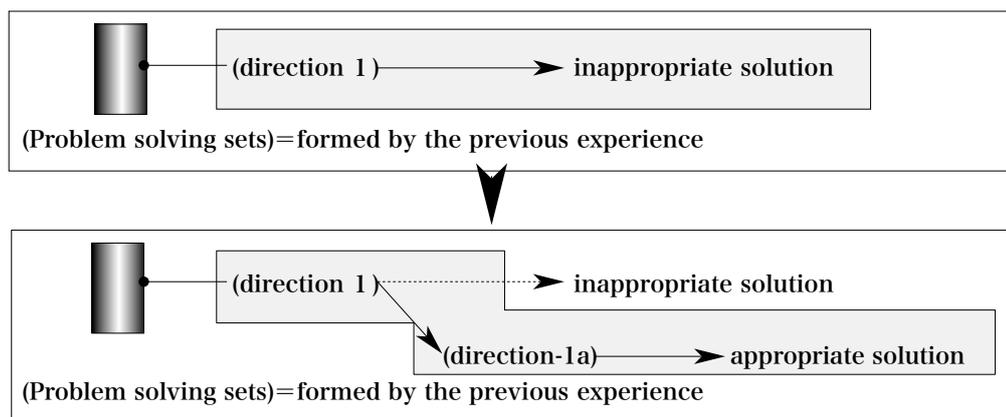


図 3-2 役割 2.Positive case の固執への転化-direction 保持の強化-

第 3 の役割は、Negative case の固執の克服を促す事である。それは、意識化された direction の保持が成功的解決をもたらさない不的確なものであるならば、それらの不的確性を決定している場面契機(葛藤契機・材料契機・目標契機)を変更し、direction の修正,または新しい direction の獲得を行うよう支援を行う事であると捉える。

問題解決の主体は生徒である事が望ましいのであるが、継続的保持が意識された当該 direction-1 が成功的解決をもたらさないもの (inappropriate direction-1) であると判断される際には、その不的確さを決定している目標契機(問題場面自体が如何なる機能的価値の実現を要求しているのか)を捉えさせ、変更させる事で成功的解決へと結び付く appropriate direction-2 への変更,獲得を促さなければならない。この場合において、Negative case の固執を克服

させる事で、問題解決に対する支援が為されなければならないのである。

実際の指導の場面で、教師は生徒に対して direction-1 の不適確さを認識させる。そして、その inappropriate direction-1 の持つ目標契機, 葛藤契機, 材料契機を捉えさせる事で、その変更を可能とする為には、如何なる知識・概念を持ち込む事が出来ると考えられるかを問い, appropriate direction-2 へ転換を誘発する事が必要なのである。

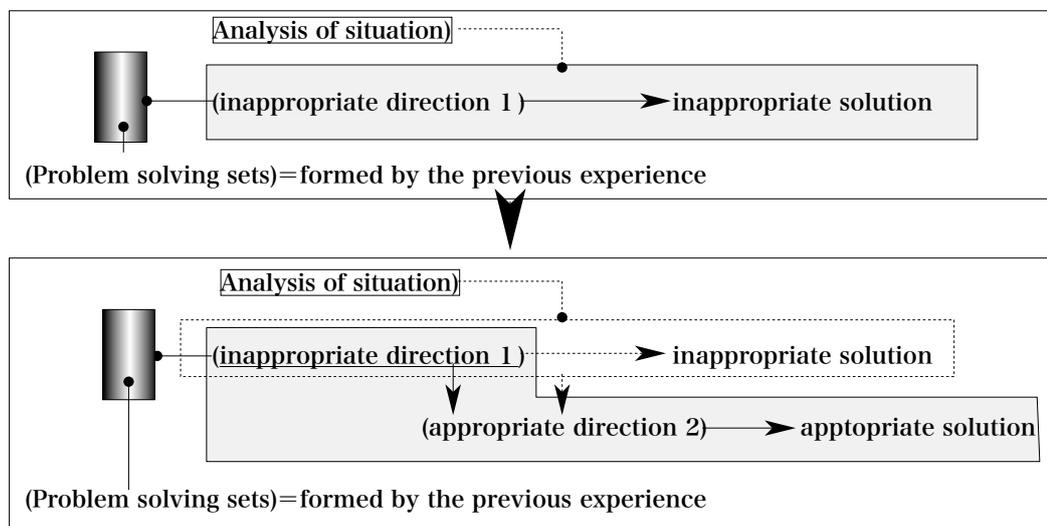


図 3-3 役割 3.Negative case の固執の克服-direction の変更-

第 4 の役割は、一つの direction に基づいて成功的解決を図った段階にある生徒に、別の direction に基いた解決を志向するよう促す事と捉える。本質的には、役割 3 で挙げた新しい direction への転換, 獲得へ向けての支援であるが、解決過程が如何なる direction に基づいて進行し, 解決が発生したのかを生徒自身に評価させる事で、解決の機能的価値を実現化する別の direction が存在しないかを考えるよう促す事が必要である。

実際の指導の場面で、教師は生徒が示した解決の的確性を保証する。そして、解決としての機能的価値の実現を再度、生徒自身が意識的に評価するよう

促す事で、別の direction を持つ事への志向を可能とする direction 変更への誘導を行う。

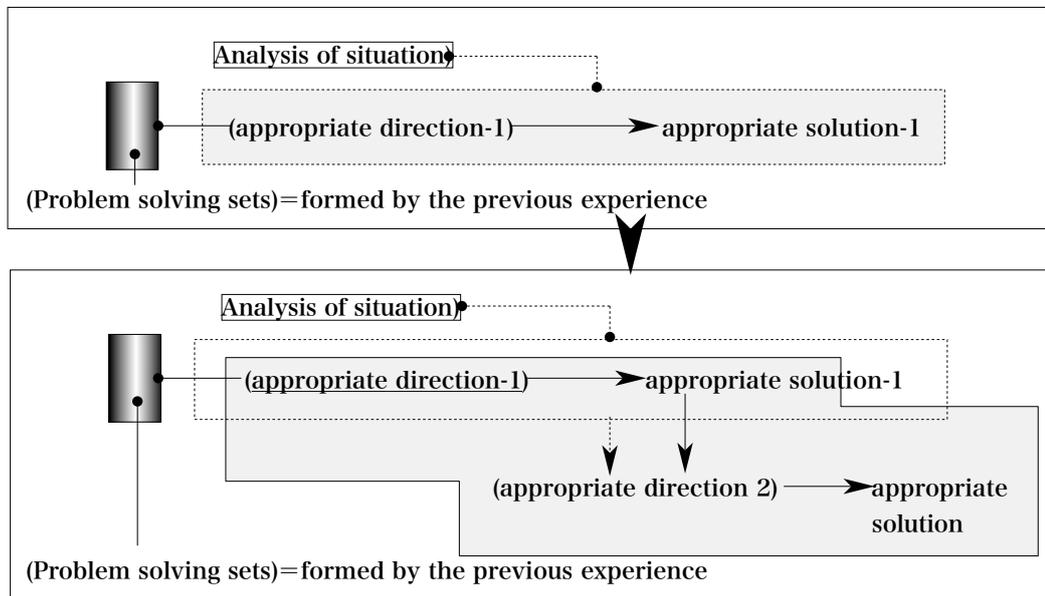


図 3-3 役割 4.新しい direction 獲得への誘導

これらの役割 1~4 で述べたものは、生徒の問題解決の進行状況を考慮して適切に行われるべき指導の在り方を指しており、それぞれが補完的な関係にあると考える。

教師が行う支援によって、ここ迄で述べた役割 1~4 が果たされる中で、生徒自身は自身内部に構築した知識の総体 KN を機能させ、複数の数学的知識、解決の手続き、アルゴリズムを組み合わせることで、解決の機能的価値を実現する為の方向 direction の獲得、不的確な direction に対しての適宜修正(固執の克服)が進行していく。

その過程において数学的創造性は発揮されていき、このような的確な direction の連続的獲得を志向した思考様式を確立する事は、数学的創造性を育成する問題解決指導の一つの流れとして提案出来るのではないだろうか。

次節では、本節で述べた事を基に、「創造性育成の具体的方策」としての中学

校数学科における問題解決指導の展開に対するアプリアリ分析を試み、役割 1～4 が指導場面において如何なる支援に還元されるかを示したいと考える。

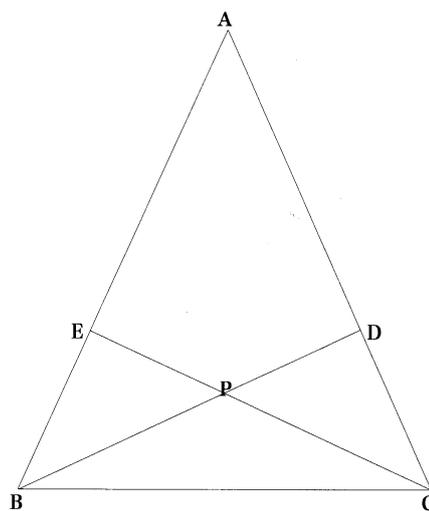
### 3.3 中学校数学科における問題解決指導－アプリオリ分析－

前節においては、本研究における"数学的創造性"として焦点を当てる"知的思考過程の柔軟性"の育成が、必要に応じて問題解決の direction の獲得,修正を行う事によって固執の克服を可能とするよう思考様式を確立させる事であると捉えた。そして、この達成を目的として教師が問題解決指導において果たす役割 1~4 を述べた。

本節では、前節で述べた「問題解決指導における教師の役割」を受けて、「創造性育成の具体的方策」としての中学校数学科における問題解決指導の展開に対するアプリオリ分析を試みる。この分析の中では、役割 1~4 が問題解決の指導場面において如何なる支援として還元されるかの一事例を示したいと考えるのである。

アプリオリ分析の対象は、中学校数学科第2学年「三角形の合同」において取り扱われる証明問題であり、次の「直角三角形の合同の証明」を課題問題とした問題解決指導の展開である。

課題問題 1)  $AB=AC$  である二等辺三角形  $ABC$  において、頂点  $B, C$  から対辺  $AC, AB$  に垂線  $BD, CE$  を下ろす。二直線  $BD, CE$  の交点を  $P$  とするとき、 $PB=PC$  である事を証明せよ。

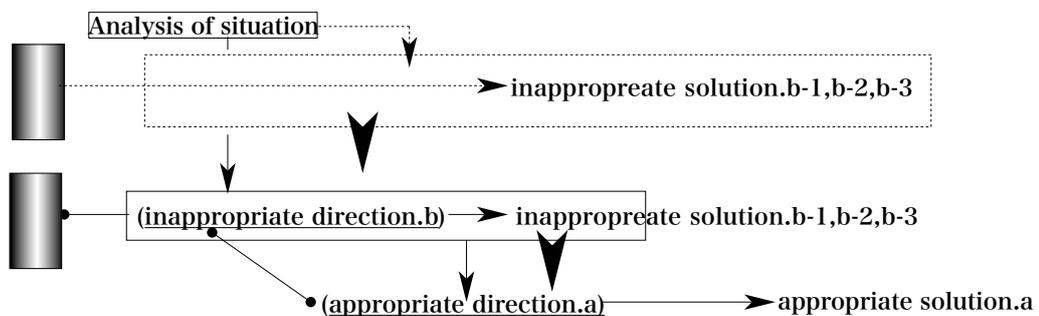


課題問題 1 に対して予想される問題解決としての展開は、大きく捉えて次の

2つである。

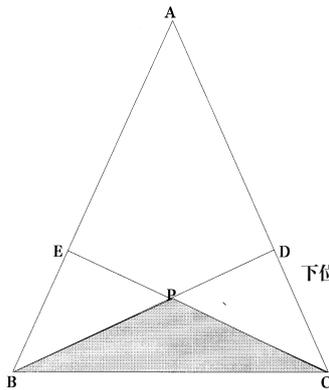
展開 A は、appropriate direction.a(PB=PC を、 $\Delta PBC$  が二等辺三角形である事を証明する事で導く)に基づいた活動であり、そして展開 B は、inappropriate direction.b( PB=PC を、 $\Delta PEB \equiv \Delta PDC$  を証明する事で導く)に基づくものである。上に示しているように、この2つの活動の結果に決定的差異を生むのは、それぞれの問題解決の direction であるが、2つの direction が的確 (appropriate) であるか、不的確 (inappropriate) であるかは、課題問題がその文脈において与えている諸条件(辺の長さ,角の大きさ等)に基づいて不備なく解決が図られるかという点によって判断される。諸条件に基づいて不備なく証明を進める事が出来るという点によって、direction.a は的確 (appropriate) であると判断され、それに基づいて成功的解決が図られるのである。

実際に予想される展開の詳細としては、4つの展開があり、appropriate direction.a による展開 A,inappropriate direction.b による展開 B-1,B-2,B-3 が挙げられる。展開 B-1,B-2,B-3 における問題解決の指導は、inappropriate direction.b の継続的保持である Negative case の固執の克服を達成するよう機能しなくてはならず、展開 A における指導は、appropriate direction.a の継続的保持である Positive case の固執を強化するものでなくてはならない。この指導によって目指す展開を示せば下図のような問題解決過程となる。



展開 B-1,B-2,B-3 においては、教師の意図的介入による固執の意識化、Negative case の固執の克服を達成する事によって、appropriate direction.a に対する Positive case の固執への転化を目指していくのであるが、次ページ以降は展開の詳細し、その中で役割 1~4 の支援への還元を示す。

展開 A,B-1,B-2,B-3 の順に詳細を示そうと考えるが、まず、展開 A を示す。



課題問題の提示

appropriate direction.aの保持

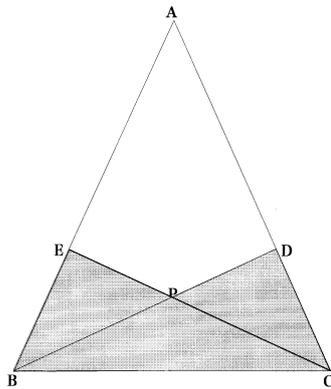
Sa-1)  $PB=PC$  は、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事が証明出来れば、二等辺三角形の定義から導く事が出来るので、まず「 $\triangle PBC$  が二等辺三角形」を証明する。

役割2.Positive caseの固執の強化

Ta-1)  $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事は、辺や角について何が言えれば証明する事が出来るだろうか。ただし、 $PB=PC$  は証明する事なので、それ以外に基本的性質として何が言えるか考えよう。

意図) direction.a を継続的に保持するように、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形であることを証明するために「両底角が等しい」事に着目を促す。

下位 direction の提示



appropriate direction.aの継続的保持

Sa-2)  $\triangle PBC$  が二等辺三角形であることを、二底角  $\angle PBC = \angle PCB$  から証明する

役割2.Positive caseの固執の強化

Ta-2)  $\angle PBC = \angle PCB$  はどの三角形の合同に着目すれば導く事が出来るだろうか。

意図) 「両底角が等しい」事を導くために  $\triangle DBC$  と  $\triangle ECB$  の合同を言う事へと着目させる事で、direction.a に対する固執を強化する。

appropriate direction.aの継続的保持

Sa-3)  $\angle PBC = \angle PCB$  を、 $\angle PBC$  と  $\angle PCB$  を対応する角に持つ2つの直角三角形  $\triangle DBC$  と  $\triangle ECB$  の合同から導く

appropriate direction.aに基づく解決

Sa-4)  $\triangle DBC$  と  $\triangle ECB$  において

仮定より、 $\angle CDB = \angle BEC = 90^\circ \dots(1)$

場面分析

Ta-4.1) 仮定から  $\triangle ABC$  が、どのような三角形だとわかるだろうか。

場面分析

Ta-4.2)  $AB=AC$  の二等辺三角形  $\triangle ABC$  では、基本的性質として辺や角について何が言えるだろうか。

Ta-4.3) 二等辺三角形の性質から、底角が等しい事が言えるので、 $\angle BCD = \angle CBE$  である。

$\triangle ABC$  は  $AB=AC$  の二等辺三角形であるから底角は等しく、 $\angle BCD = \angle CBE \dots(2)$

また、辺  $BC$  は共通であるから

$$BC=CB \dots(3)$$

(1),(2),(3) より、

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので、 $\triangle DBC$  と  $\triangle ECB$  は合同

役割1.固執の意識化-下位目標の分析-

Ta-5)  $\triangle PBC$  が二等辺三角形であることを証明するために、 $\triangle DBC$  と  $\triangle ECB$  の合同から何を導く事が目的だったのだろうか。

よって  $\angle PBC = \angle PCB \dots(4)$

(4) より、 $\triangle PBC$  は二等辺三角形であるから、

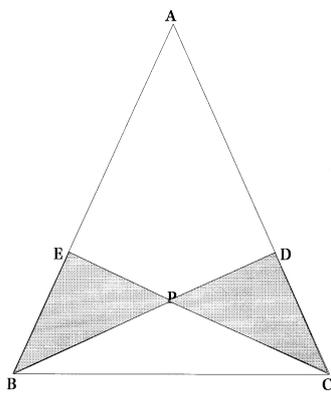
$PB=PC \dots(5)$

意図) 二等辺三角形の底角が等しいという基本的性質が  $\triangle ABC$  についても言える事に気がつかない場合、Ta-4.1, Ta-4.2, Ta-4.3 の順に教師が問いかける事で、問題状況に対する場面分析を行うよう促し、 $\angle BCD = \angle CBE$  を導くよう促す。与えられるのではなく、場面分析を行う中で主体的に獲得するように留意していく。

意図)  $\triangle DBC$  と  $\triangle ECB$  の合同が言えた段階から次に進めない場合には、「当初なぜその合同に着目したのか、何を目的としていたのか」という下位目標が何であるかを問う事で、目標分析を促し、固執の意識化を行う。

次に、展開 B-1 を示す。

展開 B-1-inappropriate direction.b( PB=PC を、 $\triangle PEB \equiv \triangle PDC$  を証明する事で導く)に基づく解決



課題問題の提示

Sb-1.1)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  において、

仮定より、 $\angle PEB = \angle PDC = 90^\circ \dots (1)$

対頂角の性質から、 $\angle BPE = \angle CPD \dots (2)$

仮定から、辺や角に関して他に分かる事が無いために三角形の合同条件、直角三角形の合同条件は使う事が出来ない。ゆえに  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同を言う事は出来ないので、 $PB=PC$  は証明出来ない。

葛藤分析

Tb-1.1) 仮定,図から辺や角について他に分かる事は本当に無いだろうか。

意図)何が解決を妨げているのか、葛藤契機「合同条件の根拠が存在しない」を意識化させる。

Sb-1.2)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  について (1),(2) 以外に辺や角について分かる事は、他には無い。

場面分析

Tb-1.2) では、 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同は証明は、出来ないだろう。

Sb-1.3)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同は、証明出来ない。

役割1.固執の意識化

Tb-1.3) なぜ、 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同を証明しようと考えたのだろう。

意図)何を目的として $\triangle PEB$ と $\triangle PDC$ の合同を証明しようと考えたのか、問題解決で何を目的としていたかを言語化する事によって、direction.bを保持している事を意識化させ、固執の意識化を促す。

Sb-1.4)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同が言えれば、PB と PC は対応する辺なので、長さが等しい事は証明出来るはずだと考えた

役割1.固執の意識化

Tb-1.4)PB と PCが対応する辺となる三角形の合同が証明出来れば、 $PB=PC$ が導かれると考えたんだ。確かに、考え方は正しい

役割3.Negative caseの固執の克服-direction獲得の促進-

Tb-1.5) だが、いま  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同は証明出来ないで、他の方法を考えなければならない。結論として  $PB=PC$  ならば、 $\triangle PBC$  はどんな三角形だという事が予想出来るだろうか。

意図)direction.b自体は間違いではなく、今問題の中では適切ではない事に気づかせ、direction.bの棄却を行わせる。

「結論の  $PB=PC$  が正しいならば  $\triangle PBC$  がどんな三角形になるか」を問う事で、他の方法として  $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事から  $PB=PC$  を導くように direction.aへ転換していくよう促す為に、二等辺三角形である事に着目させる。Negative caseの克服を志向

Sb-1.5)  $PB=PC$  ならば、 $\triangle PBC$  は二等辺三角形のはずである

役割3.Negative caseの固執の克服-direction獲得の促進-

Tb-1.6)ならば、 $\triangle PBC$ が二等辺三角形である事が証明出来れば、 $PB=PC$ だと導く事は出来るだろうか。

意図) $PB=PC$ ならば $\triangle PBC$ は二等辺三角形である事に着目出来た段階で、 $\triangle PBC$ の二等辺三角形を言う事で結論を導く事が出来るかを問い、direction.aの獲得を促進していく。direction.aの獲得によって、Negative caseの克服を達成することが志向される。

Sb-1.6)  $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事が証明出来れば、 $PB=PC$  だと言う事は出来る。

役割3.Negative caseの固執の克服-direction獲得の促進-

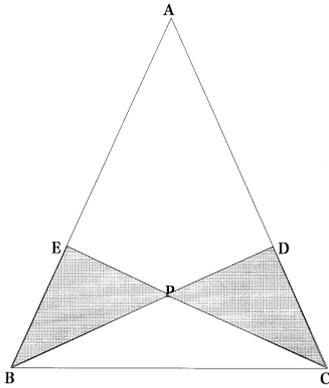
Tb-1.7) では、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事を証明する方法で考えてみよう。

意図)direction.bを棄却し、新しく獲得したdirection.aに基づいて問題解決を図るよう促す事で、directionの完全な転換を行わせる。

Sb-1.7)inappropriate direction.aに基づく展開 Aへ

次に、展開 B-2 を示す。

展開 B-2-inappropriate direction.b(  $PB=PC$  を、 $\triangle PEB \equiv \triangle PDC$  を証明する事で導く) に基づく解決



Sb-2.1)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  において、  
 仮定より、 $\angle PEB = \angle PDC = 90^\circ \dots(1)$   
 対頂角の性質から、 $\angle BPE = \angle CPD \dots(2)$   
 $PE=PD$ (inappropriate point) $\dots(3)$   
 (1),(2),(3) より、  
 一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  は合同である。  
 よって、 $PB=PC$

葛藤分析

Tb-2.1) この解決は正しいだろうか。

仮定と図から (1),(2) は言えるが、(3) の  $PE=PD$  が言えた根拠は何だろうか。

意図) 生徒の解決の不的確さを決定している葛藤契機(仮定から  $PE=PD$  は言う事が出来ない)を問う事で、問題解決の不的確さを生徒に提示する

Sb-2.2)  $PE=PD$  の根拠は、仮定や図からはわからない。

役割 1. 固執の意識化

Tb-2.2) では、 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同は証明出来ない。

では、なぜ  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同から  $PB=PC$  を証明しようとしたのだろうか。

意図) 何を目的として  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同を証明しようとしたのか、問題解決で何を目的としていたかを言語化する事によって、direction.b を保持している事を意識化させ、固執の意識化を促す

Sb-2.3)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同が言えれば、 $PB$  と  $PC$  は対応する辺なので、長さが等しい事は証明出来るはずだと考えた。

役割 1. 固執の意識化

Tb-2.3)  $PB$  と  $PC$  が対応する辺となる三角形の合同が証明出来れば、 $PB=PC$  が導かれると考えたんだ。

確かに、考え方は正しい

役割 3. Negative case の固執の克服-direction 獲得の促進-

Tb-2.4) だが、いま  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同は証明出来ないで、他の方法を考えなければならない。結論として  $PB=PC$  ならば、 $\triangle PBC$  はどんな三角形だという事が予想出来るだろうか。

意図) direction.b 自体は間違いではなく、今問題の中では適切ではない事に気づかせ、direction.b の棄却を行わせる。

「結論の  $PB=PC$  が正しいならば  $\triangle PBC$  がどんな三角形になるか」を問う事で、他の方法として  $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事から  $PB=PC$  を導くように direction.a へ転換していくよう促す為に、二等辺三角形である事に着目させる。Negative case の克服を志向

Sb-2.4)  $PB=PC$  ならば、 $\triangle PBC$  は二等辺三角形のはずである

役割 3. Negative case の固執の克服-direction 獲得の促進-

Tb-2.5) ならば、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事が証明出来れば、 $PB=PC$  だと導く事は出来るだろうか。

意図)  $PB=PC$  ならば  $\triangle PBC$  は二等辺三角形である事に着目出来た段階で、 $\triangle PBC$  の二等辺三角形を言う事で結論を導く事が出来るかを問い、direction.a の獲得を促進していく。direction.a の獲得によって、Negative case の固執の克服を達成することが志向される。

Sb-2.5)  $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事が証明出来れば、 $PB=PC$  だと言う事は出来る。

役割 3. Negative case の固執の克服-direction 獲得の促進-

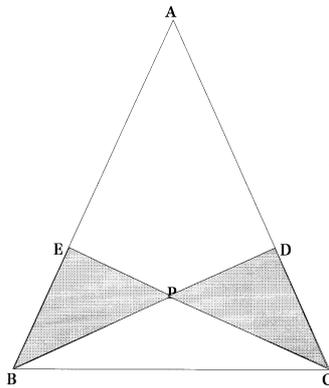
Tb-2.6) では、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事を証明する方法で考えてみよう。

意図) direction.b を棄却し、新しく獲得した direction.a に基づいて問題解決を図るよう促す事で、direction の完全な転換を行わせる。

Sb-2.6) inappropriate direction.a に基づく展開 A へ

次に、展開 B-3 を示す。

展開 B-3-inappropriate direction.b(  $PB=PC$  を、 $\triangle PEB \equiv \triangle PDC$  を証明する事で導く) に基づく解決



Sb-3.1)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  において、  
 仮定より、 $\angle PEB = \angle PDC = 90^\circ \dots(1)$   
 対頂角の性質から、 $\angle BPE = \angle CPD \dots(2)$   
 $PB = PC$  (inappropriate point)  $\dots(3)$   
 (1),(2),(3) より、直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので  
 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  は合同である。  
 よって、 $PB = PC$

葛藤分析

Tb-3.1) この解決は正しいだろうか。

仮定と図から (1),(2) は言えるが、(3) の  $PB = PC$  は、証明しなければならない結論である。 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同の証明に用いる事は出来るだろうか。

意図) 生徒の解決の不的確さを決定している葛藤契機 ( $PB = PC$  は使用出来ない) を問う事で、問題解決の不的確さを生徒に提示する

Sb-3.2)  $PB = PC$  は、 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同の証明に用いる事は出来ない。

役割 1. 固執の意識化

Tb-3.2) では、 $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同は証明出来ない。

では、なぜ  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同から  $PB = PC$  を証明しようとしたのだろうか。

意図) 何を目的として  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同を証明しようと考えたのか、問題解決で何を目的としていたかを言語化する事によって、direction.b を保持している事を意識化させ、固執の意識化を促す

Sb-3.3)  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同が言えれば、 $PB$  と  $PC$  は対応する辺なので、長さが等しい事は証明出来るはずだと考えた。

役割 1. 固執の意識化

Tb-3.3)  $PB$  と  $PC$  が対応する辺となる三角形の合同が証明出来れば、 $PB = PC$  が導かれると考えたんだ。確かに、考え方は正しい

役割 3. Negative case の固執の克服-direction 獲得の促進

Tb-3.4) だが、いま  $\triangle PEB$  と  $\triangle PDC$  の合同は証明出来ないで、他の方法を考えなければならない。結論として  $PB = PC$  ならば、 $\triangle PBC$  はどんな三角形だという事が予想出来るだろうか。

意図) direction.b 自体は間違いではなく、今問題の中では適切ではない事に気づかせ、direction.b の棄却を行わせる。

「結論の  $PB = PC$  が正しいならば  $\triangle PBC$  がどんな三角形になるか」を問う事で、他の方法として  $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事から  $PB = PC$  を導くように direction.a へ転換していくよう促す為に、二等辺三角形である事に着目させる。Negative case の克服を志向

Sb-3.4)  $PB = PC$  ならば、 $\triangle PBC$  は二等辺三角形のはずである

役割 3. Negative case の固執の克服-direction 獲得の促進

Tb-3.5) ならば、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事が証明出来れば、 $PB = PC$  だと導く事は出来るだろうか。

意図)  $PB = PC$  ならば  $\triangle PBC$  は二等辺三角形である事に着目出来た段階で、 $\triangle PBC$  の二等辺三角形を言う事で結論を導く事が出来るかを問い、direction.a の獲得を促進していく。direction.a の獲得によって、Negative case の固執の克服を達成することが志向される。

Sb-3.5)  $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事が証明出来れば、 $PB = PC$  だと言う事は出来る。

役割 3. Negative case の固執の克服-direction 獲得の促進

Tb-3.6) では、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事を証明する方法で考えてみよう

意図) direction.b を棄却し、新しく獲得した direction.a に基づいて問題解決を図るよう促す事で、direction の完全な転換を行わせる。

Sb-3.6) inappropriate direction.a に基づく展開 A へ

次に、アプリアリ分析を基に実際の中学生に対して行った問題解決指導の展開を示す。

対象生徒は鳥取市内の中学校に通う中学三年生 YT, 中学二年生 SS, NI の三人であり、問題解決指導は 1 対 1 の場面で行ったものである。

まず、YT を対象とした指導の展開を示す。

(問題解決指導…対象生徒 YT)

T0) 課題問題の提示

S1)[  $\triangle BCE$  と  $\triangle CBD$  で

仮定より  $\angle BEC = \angle CDB = 90^\circ \dots(1)$

また  $BC = CB$  は共通である…(2)

(1),(2) より

斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから  $\triangle BCE$  と  $\triangle CBD$  は合同

よって  $PB = PC$  ]

T1) 「できたかな」

S2) 「できた」

T2) 「(1),(2) から斜辺と 1 つの鋭角が等しい事を言ってるけど…

直角と斜辺が等しい事は言えているけど、何か足りないものはないかな。」

S3) 「1 つの鋭角が等しい」

S4)[  $AB = AC$  の二等辺三角形なので底角は等しいから、 $\angle EBC = \angle DCB \dots(3)$ ]

T3) 「斜辺と 1 つの鋭角が等しいので、 $\triangle BCE$  と  $\triangle CBD$  は合同。

なんで、直角三角形の合同をまず証明しようと考えたんだろう。  $PB = PC$  の根拠は聞いてもいいかな」

S5) 「合同な直角三角形が、折り返したら重なるから  $PB = PC$  です。」

T4) 「そうだね、証明としてはどうやって書こうか。これで十分かな。」

S6) 「十分じゃない。」

S7) 「できません。」

T5) 「他の方法を考えようか…、もし  $PB = PC$  なら  $\triangle PBC$  はどんな三角形だろう。」

S8) 「二等辺三角形。」

T6) 「じゃあ  $\triangle PBC$  が二等辺三角形だと言えたら、 $PB = PC$  は言う事は出来るかな。」

S9) 「出来る。」

T7) 「じゃあ、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形になる事が言えれば  $PB = PC$  は証明出来る…。

何が言えたら、 $\triangle PBC$  は二等辺三角形だと言えるだろうか。」

S10) 「二辺が等しいと 2 つの底角が等しい」

T8) 「 $PB = PC$  は結論だから、今は使う事が出来ない。

じゃあ、底角が等しい事から証明していこうか…出来るかな。」

S11) 「出来る。」

T9) 「じゃあ、やってみようか。」

S12)[ 合同な図形では対応する角がそれぞれ等しいので  $\angle PBC = \angle PCB$

よって  $\triangle PBC$  は二等辺三角形である。

ゆえに  $PB = PC$  ]

S…生徒の活動, T…教師の支援, 「」内は発話された言葉, [] 内はノートに記述された解答

次に、SS を対象とした指導の展開である。

(問題解決指導…対象生徒 SS)

T0) 課題問題の提示

S1)[ $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  において

仮定より、 $\angle BEP = \angle CDP = 90^\circ \dots(1)$

また対頂角だから、 $\angle BPE = \angle CPD \dots(2)$

(1),(2) から ]

S2) 「わからない、できませんよ」

T1) 「仮定や図からわかる事は他にないかな。」

S3) 「エー…、 $\angle BEP$  と  $\angle CDB$  が直角と対頂角が等しい以外は、わからない。」

T2) 「じゃあ、 $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  の合同は言う事は出来ないのかな。」

S4) 「出来ません。」

T3) 「本当に、 $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  の合同を言う事はできないの。」

S5) 「出来る。」

T4) 「 $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  の合同は証明出来るんだね。」

S6) 「出来ません。」

T5) 「S は  $PB=PC$  を証明するのに、なぜ  $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  の合同を言おうとしたの」

S7) 「 $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  で  $PB$  と  $PC$  は対応する辺で、合同な図形では対応する辺が等しい」

T6) 「 $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  が合同なら  $PB=PC$  だけど、いま合同だと証明出来ない。どうしよう。」

S8) 「エー…わからない」

T7) 「 $\triangle BEP$  と  $\triangle CDP$  の合同が言えないから、他の方法を考えていこうか。

結論の  $PB=PC$  が正しいなら  $\triangle PBC$  はどんな三角形だろうか、S はどう思う。」

S9) 「あ、二等辺三角形です。」

T8) 「S、 $\triangle PBC$  が二等辺三角形である事が言えれば、 $PB=PC$  は証明出来るだろうか。」

S10) 「あー。証明出来ます。」

T9) 「じゃあ、二等辺三角形になる事はどう証明出来るかを考えてみようか。

二等辺三角形の性質は、どんなものがあるか思い出してごらん。」

S11) 「底角が等しいのが言えたら、証明出来る。」

T10) 「底角の  $\angle PBC$  と  $\angle PCB$  が対応する角になるような2つの三角形は見つける事が出来るかな。」

S12) 「 $\triangle ECB$  と  $\triangle DBC$  の2つの直角三角形が合同」

T11) 「じゃあ、後はSがやってごらん。」

S13)[ $\triangle ECB$  と  $\triangle DBC$  において、

仮定より  $\angle BEC = \angle CDB = 90^\circ \dots(1)$

辺  $BC$  は共通…(2)

$\triangle ABC$  が二等辺三角形で、両底角が等しい  $\angle CBE = \angle BCD \dots(3)$

(1),(2),(3) より、

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから  $\triangle ECB$  と  $\triangle DBC$  が合同

合同な図形では対応する角がそれぞれ等しいので  $\angle PBC = \angle PCB$

だから  $\triangle PBC$  は二等辺三角形で、 $PB=PC$  ]

T12) 「S、問題が解けない時は自分が何をしようとしているのかを考えてみるといい。」

S12) 「はい」

S…生徒の活動,T…教師の支援,「」内は発話された言葉,[ ]内はノートに記述された解答

最後に示すのは、NIを対象とした指導の展開である。

(問題解決指導…対象生徒 NI)

T0) 課題問題の提示

S1)[ $\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ で

$$\angle BEP = \angle CDP = 90^\circ \dots(1)$$

$$EP = DP \dots(2)$$

対頂角なので $\angle EPB = \angle DPC \dots(3)$

(1),(2),(3)より

直角三角形で斜辺と1つの鋭角が等しいので

$\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ は合同

合同な図形では対応する辺の長さは等しいので $PB = PC$ ]

T1) 「Nちゃん、できたかな。」

S2) 「うん。」

T2) 「じゃあ見ていこうか、 $\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ の斜辺はどの辺だろう。EP,DPでいいかな。」

S3) 「うーん…BPとCP。じゃあ、この答え違うね。」

T3) 「そう $PB = PC$ は証明の結論だから使えないよ。じゃあNちゃん、 $PB = PC$ を証明するのにどうして $\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ の合同を言おうと思ったのか、どう考えたのか聞いてもいいかな。」

S4) 「だって対応する辺になるような三角形の合同が証明出来たら、二辺は等しいから。」

T4) 「そうだね、合同が言えたら $PB = PC$ だね。でも今、 $\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ の合同は証明出来そうかな。」

S5) 「無理そう。」

T5) 「そうか、でもちょっと他の方法で考えてみようか。図の中で何かわかる事って他にないかな。」

S6) 「 $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ が合同で、 $\triangle BCE$ と $\triangle CBD$ が合同っぽい。」

T6) 「それを使ってみようか。Nちゃんが答えに書いたように $\angle BEP = \angle CDP$ , $\angle EPB = \angle DPC$ 。三角形の内角の和は $180^\circ$ だから、残りの角 $\angle PBE$ と $\angle PCD$ の大きさは?」

S7) 「同じ。」

T7) 「じゃあ、あとは何があれば $\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ の合同を証明するのに合同条件が使えるかな。」

S8) 「あ、わかった。BEとCDが同じで、この直角三角形2つが合同だからできる。」

T8) 「じゃあ、 $BE = CD$ をまず証明して、 $\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ が合同になる事をいってみよう。」

S9) 「わかった、もう出来るよ。」

S10)[ $\triangle BCE$ と $\triangle CBD$ において

$$\angle BEP = \angle CDP = 90^\circ \dots(1)$$

$$\text{共通な辺だから } BC = CB \dots(2)$$

$\triangle ABC$ は二等辺三角形なので、2つの底角は等しいから

$$\angle CBE = \angle BCD \dots(3)$$

(1),(2),(3)より直角三角形で斜辺と1つの鋭角が等しいので、

$\triangle BCE$ と $\triangle CBD$ は合同。

合同な図形では対応する辺の長さは等しいので $BE = CD \dots(4)$

$\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ において、対頂角なので $\angle EPB = \angle DPC$

2つの角が等しいので、三角形の残りの角は等しい  $\angle PBE = \angle PCD \dots(5)$

(1),(4),(5)より、一辺とその両端の角が等しいので、 $\triangle BEP$ と $\triangle CDP$ は合同

合同な図形では対応する辺の長さは等しいので $PB = PC$

T9) 「出来たね。Nちゃん、他にも考え方があるんだけど、 $PB = PC$ なら $\triangle PBC$ はどんな三角形かな。」

S11) 「二等辺三角形。」

T10) 「 $\triangle PBC$ が二等辺三角形なのを証明出来れば、 $PB = PC$ が言える。その方法で考えてもいいよ。」

S…生徒の活動,T…教師の支援,「」内は発話された言葉,[ ]内はノートに記述された解答

YT,SSに行った問題解決指導は、アプリアリ分析に基づき direction.a に基づく解決へと移行するように意図して行っていたが、生徒自らが direction を主体的に形成していく事が望ましいという観点から、NI に行う際は direction.b に基づく解決を可能とするような下位の direction を提示し、Positive case の固執へと転化する事を意図して指導を行った。

アプリアリ分析の中で示した展開においては、問題解決指導における役割 1～4 に基づいた教師の支援を示したが、これらの支援は一事例としてのものである。しかし、生徒が通常の学習場面の中で経験する問題解決についても、それは生徒が意識化出来ている、いないに関わらず、何らかの目的に対する direction を持った思考活動であると捉えられる。そのため、生徒が問題解決において不的確な direction を保持する事によって問題解決の停滞に陥る事は、幾度も経験されるのではないであろうか。数学的創造性として"知的思考過程の柔軟性"を育成する立場からは、生徒が不的確な direction の保持を克服するよう direction の転換を可能とする支援を適宜に行い、彼等が自身の direction に対して捉え直しを行うよう思考様式を確立する事は、日常的な学習場面においても達成されるべき課題の1つとして捉える事が必要であると考えられる。

## 終章

### 研究の結論

- 4.1 研究の結論
- 4.2 問題点・反省点と今後の課題

本章においては，本研究から得られた結論と，研究から導きだされた今後の課題について述べる。

## 4.1 研究から得られた結論

本研究の目的は、序章に述べたとおり、学校教育において、児童に期待しうる「数学的創造性」とは何であるかを明確にし、創造性育成の具体的方策はどうあるべきかに対する検討を行う事であった。

このために、次のような3つの研究課題を設定し、これに答える形で論を進めてきた。すなわち、

課題1. 数学的問題解決における数学的創造性発揮を、どのような現象として捉える事が出来るか

課題2. 数学的創造性が発揮されない状態がなぜ起こりうり、また克服をどう達成するか

課題3. 数学的創造性を育成する問題解決の指導は如何にあるべきかである。

以下では、本研究から得られた結論を整理する事とする。

先ず、第1の課題「数学的問題解決における数学的創造性発揮を、どのような現象として捉える事が出来るか」については、本論文の第1章 数学的創造性において議論し、次の結論を得た。

第1に、1.1 数学的創造性と Divergent production において、D.W. Haylock の言明から従来の創造性研究において為された定義を整理することから、数学的創造性は多様な側面を有し、各側面は「思考過程」、「所産」の二物への考察に基づいて捉えられる事を得た。そして、学校教育においては全ての生徒に期待し得る側面として、知的思考過程の柔軟性を選択する事が有益であるという考えに至った。

第2に、1.2 数学的創造性発揮の段階モデル—事例的分析から捉えて—において、大学生の問題解決過程に対する分析から、問題解決過程を、人が学習経験の中で、自身内部へ形成した構造化された知識の総体 KN に働きかける事

によって解決を志向していく循環的活動・構造化された知識の総体 KN の機能の様相とし、創造性が有する側面・知的思考過程の柔軟性が発揮された状態を、問題解決過程における知識・数学的観点・数学的手段・解決の結び付けの様相として段階的に捉えた。

次に、第2の課題「数学的創造性が発揮されない状態がなぜ起こりうり、また克服をどう達成するか」については、本論文の第2章.思考の固執・fixation において議論し、次の事を結論として得た。

第1に、2-1節.数学的創造性研究における思考の固執 (Fixation) への着目において、Haylock.D.W, Allinger.G.D の言明を基に、問題解決過程において数学的創造性発揮を妨げる生徒の主観的要因;思考の固執・Fixation が挙げられる事を示した。Allinger の言明を基に、問題解決が志向的活動である事から固執が生じる事は必然的であると捉え、むしろ解決発生にはある観点への固執 (Positive case) が影響すると考え、創造的問題解決過程における否定の対象を Negative case の固執へと限定した。

第2に、2.2 思考の固執 (Fixation)ーゲシュタルト心理学から捉えてーにおいては、Maier の方向 (direction) の概念を持ち込む事によって問題解決過程における解決発生を捉え、現象としての思考の固執・fixation を、問題解決の方向・direction を継続的に保持し、棄却する事が出来ない状態と定義した。

第3に、2.3 思考の固執と数学的創造性ー本研究における数学的創造性ーにおいては、1.2 で知的思考過程の柔軟性として捉えた数学的創造性と、2.1,2.2 において捉えた、数学的創造性発揮を妨げる主観的要因としての思考の固執 (fixation) の関係を考慮する事で、数学的創造性が発揮される際の解決過程を次のモデル図 (図 2-7,p23 参照) で示した。

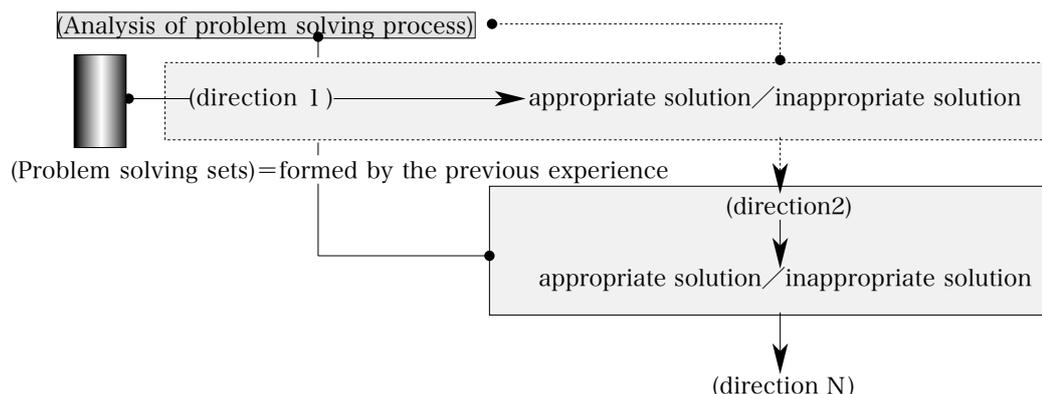


図 2-7 数学的創造性発揮の過程－固執の克服過程－

そして、本研究における数学的創造性を「人が、自身内部に構築した知識の総体 KN を機能させ、解決としての機能的価値を実現する為の direction を連続的に獲得、修正する事を可能にする能力」として捉え直すとともに、このモデル図に基づいて、事例問題に対する問題解決過程における固執の克服過程を示した。

次に、第 3 の課題「数学的創造性を育成する問題解決の指導は如何にあるべきか」については、本論文の第 3 章.数学的創造性の育成と問題解決の指導において議論し、次の事を結論として得た。

3.1 数学的創造性育成と問題解決の指導-従来の創造性育成の方法-において、従来、創造性育成の方法として挙げられてきた 2 つのアプローチに残された課題を振り返り、教育において価値ある指導として、教師が行う意図的介入は、単に問題解決場面を設定するという消極的介入に終わるのではなく、より積極的な介入が必要であると認めた。

3.2 創造性育成の具体的方策としての問題解決指導においては、課題 1,2 に対して得られた成果を基に、数学的創造性育成とは、知的思考過程の柔軟性の顕在化:知識総体 KN を機能させる事で direction の修正、連続的獲得を可能とする思考様式の確立であると捉えた。そして、数学的創造性発揮が、固執・fixation の克服を伴う事を考慮し、問題解決指導における教師の意図的介入の

本質は、生徒自身が陥っている当該の固執状態からの克服を促す事を志向する事とした。

意図的介入は、生徒の問題解決の進行状況を捉えて行われるものであり、教師の果たす役割も行われる各段階によって多少の差異が生まれるとし、以下の4つの役割を述べた。

役割 1.生徒自身が,当該陥っている固執状態 (direction の継続的保持) の意識化

役割 2.継続的保持が意識化された direction が適確である場合において、その方向に基づく解決進行を促す為の下位 direction-1a を与える事による,Positive case の固執への転化,強化

役割 3.継続的保持が意識化された direction が不適確である場合において、その不的確性を決定する場面契機 (葛藤契機,材料契機,目標契機) を変更し、新しい direction への修正,獲得を促す事による Negative case の固執の克服

役割 4.成功的解決を図った段階にある生徒に対して解決過程の評価を促す事によって、別の direction を持つ事へと志向する事を可能とする,direction 変更への誘導

3.3 中学校数学科における問題解決指導－アプリアリ分析－においては、3.2で述べた「問題解決指導における教師の役割」を受けて、「創造性育成の具体的方策」としての中学校数学科における問題解決指導の展開に対するアプリアリ分析を試みた。この分析の中で役割1～4は、問題解決の指導場面において如何なる支援として還元されるかの一事例を示した。

## 4.2 問題点・反省点と今後の課題

本節では、次の1点;本論文の有する欠点に関して、残された課題を整理する。

まず、本論文の有する欠点には実証的側面が乏しい事が挙げられる。当初、数学的創造性を如何なる側面から捉えるのかという観点から、その発揮を現象として明確にする事を意図して、ゲシュタルト学派等の考えを基に理論的考察を進めてきたが、研究の理論的側面と同等に重要である実証的側面からの議論が乏しいと考える。このとき特に、中学校数学科で扱われる題材について展開される問題解決指導の場面に関して、数学的創造性育成を志向し、本論文で得た結論を還元する事を目指すよう、今後研究を進める事が必要である。

第2に、学校教育における授業場面において展開される教室集団による準公的創造段階に対して取り組む事の重要性が挙げられる。本研究においては、全ての生徒が問題解決過程において発揮すると期待される数学的創造性について、知的思考過程の柔軟性を選択し、個人的創造段階に限定しての議論を進めてきた。しかし、学校教育における教授、学習場面が、教室空間という準公的集団を単位として展開されるものである事を考えるならば、その展開における教師対生徒集団、教師対生徒、生徒対生徒という社会的相互作用による数学的知識・概念の創造が経験されうる事は推察される。また、その重要性が認められる。本研究では、議論の対象とはしなかったが、今後"創造性育成"を主題として研究を進めていく中で、取り扱う事が必要であると捉え、修士課程において取り組む研究の対象としたい。

以上が、今後に残された課題である。

## 引用・参考文献

- Haylock,D.W. (1987).A Framework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren, In;Educational studies in Mathematics,18,p59-74.
- Haylock,D.W. (1997).Recognizing Mathematical Creativity in Schoolchildren, In;Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,29,p68-74.
- Haylock,D.W. (1985).Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in schoolchildren, In;International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,16(4),p547-553.
- Silver,E.A. (1997).Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem solving and Problem posing, In;Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,29,p75-80.
- Balka,D.S.(1974).Creative ability in mathematics, In;Arithmetic Teacher,21(7),p633-636.
- Allinger,G.D.(1982).Mind sets in elementary schoolmatematics, In;Arithmetic Teacher,30(3),p50-53.
- Hashimoto,Y.(1997).The Methods of Fostering Creativity through Mathematical Problem Solving, In;Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,29,p86-87.
- R.E.Mayer.(佐古 訳).(1979).新思考心理学入門,サイエンス社
- M.Wertheimer.(矢田部 訳).(1952).生産的思考
- K.Duncker.(小見山 訳),(1952).問題解決の心理－思考の実験的研究－,金子書房
- G.Polya.(柴垣 訳),(1967).数学の問題の発見的解き方 1・2,みすず書房

- ・ G.Polya.(垣内 訳),(1954).いかにして問題を解くか,丸善株式会社
- ・ 斎藤昇,(2001).構造的思考と創造力・表現力の関係.H10-12年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))研究成果報告書
- ・ 島田茂.(1994).新訂算数・数学科のオープンエンドアプローチ－授業改善への新しい提案－,東洋館出版
- ・ Erkki.Pehkonen.(1997).The State-of-Art in Mathematical Creativity, In;Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,29,p63-67.

## 資料

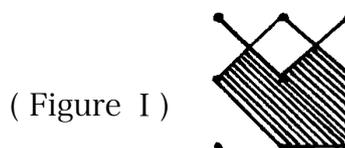
Haylock, D. W. (1987). A Framework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Educational studies in Mathematics*, 18. pp.59-74. (全訳)

Einstellung effect-Luchins Water jugs test-

Haylock, D. W. (1987). A Framework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Educational studies in Mathematics*, 18, pp.59-74. (全訳)

### ○Introduction-序論

「1cm 間隔に打たれた 9 個の格子点で構成される図上に、点のいくつかを結ぶ事によって作ることが出来る、面積 2 平方 cm の図形を出来るだけ多く見つけなさい。」—という問題を与えられた、ある 11 歳の生徒は、解決結果の中に Figure I のような図を示した。



また…ある 11 歳の生徒は，“16 と 36 が共通して持つ数 (両者に関連する数) を考えるだけ、たくさん記録しなさい”という指示を与えられ、次のような反応を示した。

Response—・ 2 (16 と 36 の両数は、公約数として 2 を持つ) , 4 (16 と 36 の両数は、公約数として 4 を持つ) , 40 (両数は 40 よりも小なる数である) , 6 (両数の、一の位の数字は 6 である) , 15 (両数は 15 よりも大きな数である) , 両数は共に完全数である, 576 (両数は, 576 の公約数である) , 両数は単位数ではない, 両数は平方数である。

これらの反応に、明らかにみえる思考の独創性・柔軟性は、「数学における創造的能力の徴候」として十分に認める事が出来る。だが…生徒が、このような創造的思考を示す機会が与えられる場合は、あまりにもまれである。

学校においては、生徒が狭い範囲で考える、型通りの解決過程・アルゴリズムに頼る、問題に対する、他よりも収束的な方法で考える事“を助長しているといった、評価法・指導法に対する問題点が、いくつか存在するようである。

一方で、生徒が“自身を固定観念から解き放つ、思考の固執を克服する、成功的結果のみを求めようとする強い精神的執着よりも少ない執着を示す”，もしくは，“柔軟に考える”・“創造描写を正当化する数学的思考の多様性(分岐的特性)”を促す事は，残念ながら，おろそかにされている。

### ○Creativity in School mathematics- 創造性と学校数学

これらの観点が，おろそかにされてきたという現状には，「数学教育における創造性の概念に対する認識が不十分である」という事実が十分に関係しているのかもしれない。だが，1950年代から，他分野(心理学など…)においても，教育研究においても，創造性研究は非常にもてはやされてきた。1985年一春の時点で，エリックデータベースは，1966年から書かれたも創造性を主題として言及した4732件の論文・報告を所有していた。ただし，これらの内，数学に関係したものは一握りである。

Tammadge (1979) は，彼の論文の中で，「すべての段階の児童に対し，創造的数学能力を促し，発達させる事の重要性を認めるべきである。」といった主張を，教師に対する差し迫った要求として述べている。彼は，数学教授はあまりにも長い間，合理的考えや，既存の知識を累積して学習することに重点を置いた暗記による学習形態“の強調によって支配されてきたと論じている。

想像力・直観を反映するタイプの学習形態は，「学習過程における躍進・学習者自身による新しい関係性の創立」そして数学授業の中で，創造性の可能性を許容する。Tammadgeによると「学校数学における創造性」は，「問題解決の手法と適用範囲との間に新しい関係を発見する能力」，「それ以前においては，およそ関係性を認めていなかった数学的思考同士を結びつける能力」を含んでいるとされている。

Vallee (1975) も以下の事を述べている。論理・直観は，創造的数学におい

て共に必要であるから、数学教授において、直観を強調すること・論理的推論を強調することは、演繹法を強調することと同様に重要であると…。

そして…Kruteskii (1976) は、彼の研究—「学齢児童における数学的能力」の中で児童が数学の課題(題材・単元)に対し、たんに精通・熟達しているということは、その児童の数学的才能の十分な尺度ではないが、学校教育(授業)の状況下、生徒が“その生徒独自に、数学に対して創造的に精通・熟達すること”へと拡張される事が必要だと論じている。Kruteskiiによると、児童における数学的創造性は、児童が「簡素な数学的問題への独自の定式化」、「問題解決の方法や意味を発見すること」、証明や定理の創案、定式化されたものに対する独自の演繹、そして「非標準的問題に対する独創的解決手法の発見」を図る中に、その存在を証明している。彼は、創造性と数学的才能(数学的能力)とを明らかに結びつけている。

Tammadge や Hollands (1972) のような他の人々も、すべての段階・年齢の生徒が示す「行動」という見地から「創造性」について議論している。

Wood (1965) は、議論の中で“inventiveness: 数学教授の対象に対する思考の枠組みにおいて、最も高位な行動カテゴリー “を、要素の集合・パターンを構成するために必要であるパーツ、もしくは「行動」として現れるまで、明確に観察する事が出来ない構造であると定義している。それは、適用や理解とは量的に異なる行動を生じさせる、独創性もしくは独特性の質を指す。生徒が、「自身にとって新しいとみなす方法の中で、数学の要素を結びつけていく、もしくは再配列していくといった考え」は、数学における創造性の議論の中で共通のテーマである。

例えば、Cornish や Wines (1980) を含めて、「生徒の数学的側面の一つの様相」としての「創造性」を、・数や形とともにパターン(規則性)が広がっていくこと、・モデル、ネットワーク、マップ、計画を再配列すること、・現実的場面

や予測している結果において、慣れ親しんだ慣習（よく知られた手法）を一変すること、と定義している。

Aiken（1973）は、「数学的創造性」の定義は、「生徒の問題解決過程（思考過程）」か、「問題解決（思考）の結果としての産物」のいずれかを考察した考えに基づいてなされていると指摘している。

まず、生徒が数学を行う思考過程に基づいた創造性の定義・叙述は、考える複雑な認識過程の特性へと集中したもの、創造を描写する為に適当とみなされた特定の思考の質を考えたもの“がある。

Kruteskii(1969)は、“ひとつの精神的な操作から別のものへの自由で容易な切り替え“を捉え、「創造性」の定義としている。Laycock(1970)は、もひとつの問題に対して多くの方法によって検討したり、パターンを観察したり、類似点と相違点を見抜く能力”として特定している。そして、Romey(1970)は「創造性」を“新しい思考方法の中で、数学的考え・テクニック・接近を結合させること”として定義している。

次に、本質的には「思考の結果である産物」に基づいた定義がある。その定義とは、もちろん教師が観察することの出来る思考の産物であり、それ自体は思考過程ではないもの、そして「創造」としての成果を創造的であると認めるための判断基準である。Spraker(1960)は、「数学における問題に対する、独創的な、もしくは興味深く、有効である解決法を産出する能力」として、数学的創造性を定義している。Jensen(1973)は、「文字や図による形式で描かれた数学的場面を提示されたときに、多くの異なる適切な質問を示すための能力」であると言っている。また、創造的産物を評価する為の本質的基準として適切なものがJacksonとMessickによって明らかにされている。それは—「多くの創出・数学的なアイデアは、それらが明らかな数学的基準によって、問題場面に対して適用的であるとみなされる場合のみ創造的である」と判断される—というも

のである。例えば、 $9 \times 8 = 56$  という主張は独創的な考えかもしれないが、それだけでこの主張を「創造」であるとみなす事は出来ない。なぜなら、標準的な数学の判断基準によって、この主張が不適切だと判断されるからである。

多くの研究者が、多様な解決 (divergent production) に対する考えを経て、または General divergent test の中で一般的創造性 (特定領域における創造性と限定されていないもの) を評価するために用いられた尺度から得られた要因を活用することで「学校数学における創造性」の主題へと近づいてきている。数学教授における目標カテゴリーの分析の中で、Hollands (1972) は、最も放置された (重要視されていない…) 教科教授の見地は「数学的創造性」であると述べ、数学的創造性を以下の、柔軟性・苦心、精巧・流暢性・独創性・感受性といった見地で特定している。

どの「児童における数学的創造性」の定義も、数学と創造性の両者について言及していなければならないが、いくつかの先に示された定義・描写では、明らかに、どちらか一方を他方以上に強調している。

Kruteskii といった、研究者達は、数学的思考・数学的プロセスの特性に最も関心を抱き、それらを数学における創造性の議論の中で強調している。彼らが議論を進める中、行動として認められる特定の創造とは何であるかといった疑問が生じてきた。例えば、Prouse(1964) は、「数学的創造性」に関して、Carlton(1959) が認めた創造的数学者の数学的特性を抽出することによって得られた基準・尺度を基に自身の議論を進めている。

また、Balka(1974) は、権威的数学教育者によって構成されたグループが選択した「数学的創造性の判断基準・尺度」を用いている。それらは数学的場面において、結果と原因に対する仮定を定式化する能力・一般化した数学的問題を特定のサブプログラムへと分離させる能力 (特殊化)・パターン (規則性) を決定する事、そして思考形式を固執させずに解き放つ事等を含めている。

Prouse(1964)が表したように,数学的問題解決過程 (process) は重要であり, 数学的思考の様相を引用するのであるから, 数学的創造性の基準・尺度は, 数学的創造性その見地からの数学の特性によって占められている。

これらは, 数学におけるものとして重要であるが, それら (process, result) 自体を創造性として叙述することが賢明であるかどうかといった事に関しては疑問である。この事に関する議論は, Haylock(1985)によってもなされている。

例えば, 規則性 (pattern) を発見しようという願望と数学的場面における帰納的結果 (generalizations) は, 実際には

思考の柔軟性・思考形式の固執からの開放といった, より明確な創造的行動とは一致しないことも見受けられる。

一方で, 研究者達が抱く「学校数学における創造性」に関する考えは, 概括的創造性の考えを考慮の範疇に含んでいる。

この事は, 数学における多様な解決を, 数学的創造性を測定する唯一の尺度であると考え, そして新奇さ・独創性を強調してきた研究者に関しても, とりわけ真実である。これらの研究のいくつかは, 数学的場面を考慮した見地から, 得られた所産・解決が妥当であるかといった範囲までの考察を欠いてしまっている。そういった議論がなされ, 結果としてあらゆる行動の中で多様な解決が, 数学・創造性の双方から数学的創造性として見なされ, 明確に示されるに違いない。「創造性」に関して, 一般的に受け入れられた定義などは無く, それゆえ, はっきりと簡潔・明確な数学的創造性の定義なども存在はしない。

Mackinnon(1970)は, 「創造性」は正確に定義された理論的構造を持つというよりは, むしろ多様な側面を持った事象だと考えられていると論じている。学齢児童における数学的創造性に対する研究の1つのアプローチは, 数学的創造性の定義を明確に定式化することを意図して始まったものではなかったが,

概括的創造性と関連する考えを考慮し、学校において児童が数学を行う事に最も関連するであろうと考慮される考えを選択したものであった。数学における創造性に対する2つの対称的考察方法の存在は、それに関する研究論文の中においても理解することができる。これらは、創造的過程・創造的所産への考慮を経たものなのである。

数人の研究者 (e.g.Ghiselin) は、創造的思考に寄与する認識過程の本性への考慮・新しく、予想しない解決(もしくは場面に対する反応)、を発見しようとする意思による情報の変質に着目し、研究を進めている。

その他の研究者 (e.g.Jackson and Messick, 1965) も、流暢性・柔軟性・独創性、そして所産が創造的であるとして認められるかどうかといった適切さといったような創造性評価の尺度を特定しようと動き出してきた。

## ○Mental sets, Overcoming fixation, and Rigidity -思考の構え,固執の克服と固着

「数学における創造性」に関して、1つの重要な観点は問題解決に関わる思考過程を考慮する事から明らかになる。

その思考過程とは、通常4つの段階を含むであろうと考えられており、その4つとは：準備段階、練り上げ(あたため),啓発(解明)、検証(確認)が挙げられている。(Poincare,1952 . Hadamard,1954 . Littlewood,1967 . Parr,1974)

準備段階において、問題は徹底的かつ意識的に調べられる。そして問題に対する全ての見方が知識として得られる。

練り上げの段階においては、思考者は問題に対し意識的に思考してはいないかもしれないが、意識下の精神(知性)は、突然の予想していない解決を産み出すために、あらゆる情報へと働きかけ続けている。

だが、有効な洞察力・理解、もしくは啓発・解明は、意識上において現れる。

検証段階は、第二次の意識的思考期間であると考えられている。この段階においては、洞察力を検証し、細部にわたって解決を図り、その解決を評価、そして…他者に伝達する事が可能となる形式として組み込むといった事が起る。

創造的思考過程において、多くの興味・関心が注がれる考察対象と成り得るものが、"練り上げ"から"解明"段階への移行過程に存在する。例えば、「なぜ、時として洞察力・理解がふと思いつくのか？」といった問題意識も含まれる。

とりわけ、児童が数学をする事と関係があると思われる、1つの提示は、「洞察力・理解が起りそこなうのは、当該の児童が知的固執に陥りやすい」というものである。人の思考は、不適確な方向に沿い固執する傾向がある。(Duncker,1945. Wertheimer,1959)

問題解決における固執は、柔軟性の相対物であり、創造的思考に対して考察するに、手がかりとなる1つの観点である。

精神的な作用要素 (mental sets) から解き放たれた考え、固執の克服、そして知的固執は、創造的思考過程に関する議論の中で、よく取り上げられるテーマである。これらの考えが、学習・数学をする児童へと関係しているという関連性は明らかである。すべての数学教育者は、児童が数学の問題に取り組む際に見せる、不適當な手法・アルゴリズムに対しての強い執着・固執に関する経験的知識を得てきたのだろう。

Kruteskii(1976) は、知的操作過程 (mental process) の柔軟性は、学齢児童の数学的能力の重要な構成成分であるとして認めている。この柔軟性は、例えば、固執の克服によって、自己規制としての参照、解決の典型的な方法の改善として児童によって示される。他の「真の数学的能力の描写」においても、Kruteskii(1976) は、固定観念から解き放たれ、知的操作過程における柔軟性を示す能力を強調している。

「数学的能力は、問題解決への個々のアプローチや1つの知的操作から、他のそれへの自由で容易な切り替わりにおいて現れる。数学的才能に恵まれた生徒は、必要な時に問題解決について、パターン化された典型的意味から離れる事が可能であり、そして…異なる解決手法を発見する。これは、まさに数学的創造性の出現として捉えられる。」 (Kruteskii,1969, p.117)

同様に、Balka(1974)は、数学における創造的能力の6つの評価基準(判断基準)リストの中に、数学的場面における解決を得る為に、確立した知的固執・心的構え(mind set)から解き放たれる能力を含めている。知的固執から解き放たれる、固執の克服といった考えは、心理学(Gestalt心理学…)における研究の中でも、かなり以前から取り扱われている。

そして Gestalt 学派に関する論文の中でも、それが提唱する学説の特に重要な部分を占めている。

Luchins(1942,1951)は、「Einstellung effect」に特定した研究を進めた。

Luchins は、その試みを"特定のアルゴリズム・典型的手法に対する固執"といったような、一連の問題へと集約している。「Einstellung effect」は、解決手法・手続きが不適切になったり・非効率的・不成功に陥る場合ですら、被験者がそれらを問題解決に対し適用し続ける際に示されるアルゴリズムに対する固執である。

Luchins の試みの中で、最も知られたものは"Water jugs test"に基づいたものである。このテストの中で被験者は、3つの容量が異なるジョッキを用いて、与えられた水の量を計って分けるような一連の問題を提示される。この時、固執は被験者が一連の問題解決の初期において確立したアルゴリズムを、後期段階の問題(より単純な解決を幾通りにも含んだ問題)に対しても使い続けようとする際に示される。

(Luchins Water jugs test) に関して→P 12

Cunningham(1966) は、それを Objective set の例として叙述している。

Cunningham は、Objective set を実験中の用具・題材、出来事の順序によって確立されるものであると考え、(subjective set) と対比させて捉えている。(subjective set) とは、主観によって実験へと向けられる態度・意思・予想といった一式の要素であろう。けれども…これらは保持し続ける事が困難であろう特質なのである。

Einstellung 現象は、一連の問題における出来事(各問題の提示)の順序によって発達させられるものであろうが、それはまた、一連の問題解決の為のアルゴリズム・規則性の発見・一般化という見地から思考する傾向へと、被験者が達する場合を指すのかもしれない。なぜなら、そのようなストラテジーは、被験者の経験上では成功的結果をもたらしてきたであろうから、固執として捉えられる行動は、真実には先述の結果を求めた事によって起るのではと考えられる。

この事は、数学において操作している精神的要素に関する特定の真実であろう。

その他の、精神的要素に関する議論の中での有益な特質は、特定のアルゴリズムを用いる事・プロセスにおける固執と特定の実在物を用いる際の固執の差異である。

Scheerer(1963) は、固執が原因となって問題が解決されない事の理由を示している。

人は、不正確ではないが、暗黙の前提によって問題解決を凶ろうとし始めるかもしれない。

彼は、対象(問題解決法)が独創的手法において用いられていたに違いないが、因習的な問題背景に組み込まれていた事を理由に解決への適切性に気づきそこなうだろう。

もしくは、人は解決に対する達成の遅れである、思考・時間の回り道を不服

にも受け入れるであろう。

最初の2つの考えは、「自己規制(自己統制)」についての Kruteskii の主張と同様のものである。

しばしば数学的問題は、生徒が自身の経験の中で用いたか、用いた事がないかといった原理に甘んじるといった幾つかの制約の為に解決され得ないことがある。

多くの「固執・精神的執着の克服」に関する研究は、成人を被験者としてなされたものであった。けれども、これらの示唆が持つであろう、児童の学習・問題解決との関連性は考慮に入れられてはこなかった。児童の問題解決過程における思考の固執・硬直に関する報告の中で、Cunningham(1966)は「固執と見なされる行動は、パーソナリティと状況的要因の相互作用の潜在的結果である。」と結論付けている。数人の児童は、多くの行動・態度の土台となる固執の一般的特質の結果として、固着的手法によって思考していく傾向を示している。一方で、Cunningham は、「学校において決まった手続きについての学習や反復練習といった、児童の数学学習における多くの経験に対する観点が、固着的(固執的)行動をとるように助長する態度に寄与しているかもしれない」と主張している。

Luchins(1942)によって独自に提案された、この主張は、Kellmer-Pringle や Mckenzie(1965)により、10~11歳の児童を被験者として更に研究されてきた。彼らは、先進的教育方式の学校と伝統的教育方式の学校の両校の児童を被験者としてLuchins Water jugs test<sup>4</sup>を実施し、それぞれの児童の成績を比較している。これまで、概して教授スタイルが児童の思考作用の固着に影響を及ぼしているのではといった仮説は支持されてはいない。

固執の克服能力という見地において考察したとき、2つの学校間には全体的に結果の違いを見つける事が出来ず、また性別の違いから考察した場合にも、

そのような結果の違いは認められなかった。この研究が、我々に与える唯一の明確な指摘は、「先進的学校において下位層の成績結果の児童は、伝統的学校のそれらに比べて固着的行動を低く示した」という事である。学校数学に関連する、固着などの精神的作用の破壊・克服についての議論の中で、いくつか矛盾は存在している。明確な数学的問題解決は、固定観念的解決手続き・型にはまった定型かつ予想される要素を用いないよう改める事を、時折要求するだろう。また数学学習は、必ずしも標準的な解決手続き・アルゴリズムや固定観念の形成に寄与しないであろう。これまで精神的作用要素(固着・固執)からの脱却に対し、学習教授スタイルといった外的要因が必ずしも寄与してはいない事を述べたが、それゆえに、そのような固執・固着から自身を解き放つ能力を指し示す行動を創造的行動としてみなす事は適当なようだ。

Allinger(1982)は、数学において知的作用要素(mind set)が自己の内部への有益な技能・技術の組み込みにより、実際には、時折好ましいものとなりうる場合もあるが、適確・有効な問題に対する解法へと解決者が到達しないよう阻害する精神作用的障害物(mental obstruction)を形成するにより、好ましくない有害な物となりうるという事実を強調している。Allingerは、小・中学校の両段階の児童における"数学における好ましくない固執・固着"の3つのタイプの例を示している。彼は、それらを次の、「Visual perception」・「Einstellung effect」・「Functional fixedness」で呼び、説明している(Duncker,1945)。以下、その説明を行う。

「Visual perception」(視覚的認識力)の固執・固着の場合、生徒は例えば、空間において現実に描かれてきた幾何的像の範疇において捉えようとする固執、2次元か3次元で幾何的像を表現しようとつとめる固執を示す。

Allingerは、ある特定のアルゴリズムに対する固執である「Einstellung effect」は、数学において頻繁に起る事であり、とりわけ算数においても、20

×10 を計算するためには不適當であるような長い乗法アルゴリズムを用いるといったような、最も適切とは判断できない成功的手続きを繰り返す事がある。

「Functional fixedness」（機能的固着）もまた、数学において起りうる事象である。

例えば、ある生徒が Dienes blocks のような特定の教具を学習に用いることを学んできたとしても、それを用いて他の数を表現することに何かしらの困難を生じさせうる。数学における Functional fixedness の例として頷けるものは、Allinger が先述した他の固執のカテゴリー、「Visual perception」・「Einstellung effect」と同様に有益であるとは言えず、むしろ数学教授においてよりも科学教授において、より重要な問題として捉えられる事象であろう。

固執や固着 (mental sets) に関する議論・研究の報告から、学校において児童が数学をする事に対する、その考えの適用性が存在するであろうことが明らかになっている。

まず生徒が問題解決において、初期段階でそれが成功的結果をもたらすであろうと判断したアルゴリズムを、不適當・最適とは言えない場面にですら、問題解決の為に使い続けようとする様子として示される固執は明確である。

この固執の対象となるアルゴリズムは、長い乗法のように、あらかじめ生徒の経験の中で学習されたもの・もしくは Luchins Water jugs test におけるそれと同様に、一連の問題例によって確立された解決であるかも知れない

次に固執は問題の内容領域に関連する、ある種の自己規制 (自己統制) として捉えられるかもしれない。生徒は与えられた問題に関連する、もしくは以前の経験の中で自身が用いたことのあるアルゴリズムの範囲に自己の思考を不適切・不必要にも制限してしまうであろう。

現代の研究者 (Haylock) によって開発されている 11～12 歳の児童を被験者として実施された、数学的創造性の一連のテストは、これら固執についての観

点をともに分析するような例を含んでいる。

### ○Divergent Product Test in Mathematics (数学における多様な解決)

創造的所産への言及による「創造性」の評価法は、主に Guilford(1959) や Torrance(1966) によって開発されたモノのように多様性解決課題テスト (divergent production test) を用いる事が主流になっている。

そういったテストに共通する構成要素・特徴は、被験者が多様な解決・場面に対する反応を潜在的に持つような問題を与えられるという事である。例えば、モすべての積み木を使って、何か形を構成しなさい“といったような問題もあるだろう。そういった問題とは、被験者が多様な思考を示すことが可能であるように意図されて作られたものである。

「多様な思考」とは、被験者が唯1つの解決を追求しなければいけないといった収束的思考とは対照的なものである。

従来、多様性解決課題 (divergent production task) における解決・反応の創造性は、流暢性(反応の数)、柔軟性(反応を特性によって分類したときのカテゴリーの数)、独創性(反応の統計的出現頻度の低さ,稀さ)といった観点から評価する事によって判定されてきた。

このようなテストは、問題に対する解決としての妥当性・確実性の2つの観点からの考察を理由に多数の批難を受けてきたにも関わらず、教育研究者にとっては確かな魅力を秘めた存在であり、多くの「創造性」についてなされた主張は、多様性解決課題 (divergent production test) を用いる事を支えとしている。

学校数学において「創造性」を考える中で、数学は多様な思考よりもむしろ収束的思考と結びつけて考える事の方が、より自然に思われるかもしれないが、多様性解決課題に考える事の妥当性は探求される事が必要とされている。

通常、学校数学の場で生徒が提示される課題・問題は、問題に対して唯1つ

存在する間違いの無い(適確な)解決を発見することが求められる収束的なものである。けれども…今日では、児童の数学に対しての経験は、数学的探求活動を含むように拡張されるべきだという多数の主張がある。ゆえに、彼らは収束的解決ではない、多様性解決を探求する場面を取り入れている。

Bishop(1968)は、「もし全ての評価課題が、唯一つの解決を追求するといった収束的思考課題であったなら、児童が数学において(創造的)であるように教授する事の価値、最近の数学教授が目指しうる目標とは何であるか」といった疑問を抱いてきた。多数の数学教育者達が、それ以前から数学的能力の重要な構成要素として Krutetskii が焦点を当てた知的思考過程(mental process)の柔軟性を明らかにする手段として、数学的場面において多様性解決課題(divergent production task)を用いる事の可能性を研究してきた。(Evans,1964 . Bishop,1968 . Baur,1970 . Hiatt,1970 . Foster,1970 . Mainville,1972 . Jensen,1973 . Maxwell,1974 . Dunn,1976 . Haylock,1978,1984. Zosa,1979)

数学的場面における多様性解決課題(divergent production task)の実行は、概括的多様性解決課題の実行とは関連してはいないように見える。数学において多様性解決を産出する事は、特殊な能力であり、単に「ある種の概括的創造性」と「数学的技能・学識」との結びつきであるとは言えないだろう。

多様性解決課題テスト(divergent production test)によって判定された、数学的創造性と数学的技能・学識との間の関係性についての研究は、多くの研究者達によってなされてきている。

Evans(1965)は、生徒が可能な限り多数に解決を示さなければならないような数学的場面を備えた10個の多様性解決課題テストを用いた。彼は、数学的創造性のスコアと「算数に関する学力、数学的段階、数学的技能・学識」そして概括的創造性など、それぞれのIQ間にある正の相関関係について報告して

いる。オープンエンドな数学的場面において、問題に対し生徒自身が造りだす事の出来る解決の幾らかの限界は、その生徒自身の数学的スキル・知識の習得レベルが関係するであろう事は予想されるから、数学的創造性と「他の数学に関する成績」との間に相関関係が存在することは決して意外ではないだろう。

だが…「数学における多様性解決課題が、因習的スキルテストによっては評価されることのなかった幾つかの数学的能力の観点を測定する事を可能にするであろう」といった、Evansの先の報告を支持する主張も存在する。(Hiatt, 1970)

11～12歳の児童を被験者として行われた調査研究(Haylock, 1986)の中で、数学的スキル成績には限界が存在するが、多様な解決・固執を克服する能力のいずれかによって測られた数学的創造性スコアへの影響を確定する事はないという結果が得られた。高い数学的スキル・学識を備えた生徒群の中でも、数学的創造性スコアにおいては非常に大きな偏差が存在することが明らかである。Mainville(1972)は、小学校教員となる予定の学生を被験者として、実際には数学的学力テストの成績と数学的多様性解決テスト(Mdpt)の成績の間には重要な相関関係は存在しなかったという結果を得ている。このMainvilleの研究では、Baur(1970)の行った事として、大学生が数学的創造性テストに取り組んだ際の成績は、多様な思考を強調する適切なトレーニングプログラムによって改善・発達されうるという結論を得ている。

Mayer(1970)は、Mainvilleの報告とは対照的に"数学への創造的アプローチを強調したプログラムに沿い、第一学年の学校児童を対象に教授を行った"研究の中で、そのような結果は得られなかったと報告している。

他にも、Maxwell(1974)により、「多様な思考と数学」に関連した研究がなされた。

彼女は、中等学校段階の生徒に対し6つの幾何問題(3つは収束的・一意的解

決を持つと分類され、3つは多様な解決を有すると分類される)を提示している。Maxwellは、これら6つの幾何問題に対して生徒が実行した問題解決の様子を基礎として、数学的問題解決において「収束的思考を高度に示す生徒群」と「多様な思考を高度に示す生徒群」とに分類している。彼女は自身が行った研究の中で、生徒の色付けられたブロックを、格子上の縦・斜めどの列にも同色のブロックが現れないよう配置するといった問題に対して解決を試みる中で、の行動を観察した。

観察の中では、高度に多様な思考を示す生徒群の生徒は、収束的思考を示す生徒群よりも、より少ない概念を用いる事が見られた。Maxwellは、数学的思考において、多様な思考は少数的役割を演じていると断定している。

もちろん、ある1つのブロック問題への解決の様子を観察する事から導き出された仮定を、複雑かつ多種多様な数学的思考に対しても適用しうるとして、同一に見なすことは非常に疑わしい。

Dunn(1976)は、12～13歳の生徒の6つの多様な解決課題テスト、概括的創造性テスト、IQテスト、数学的学識テスト、などを含めた多様なテストにおける成績の因子分析に着手した。6つの多様な解決課題テスト(divergent production test)の相関平均値は、0.26と低く、それらは明確に同一の因子として分類する事は出来なかった。

Dunnの因子分析は、収束因子(IQ, 数学的スキル・学識の成績の高さ)、多様な因子(多様な思考テストの成績の高さ)、数的流暢性因子を提唱している。

Maclean(1975)も、Dunnの6つの数学的創造性テストを用いて、数学的スキル・学識と幾つかの概括的創造性とが幾分か相関するという結果を得ている。

Jensen(1973)は、彼女自身が考案した多様な解決課題テストによって測られたとして、11～12歳の児童を被験者としても数学的創造性と数的能力、そして評価と問題解決の2つの観点からの数学的学力との関係について研究を行った。

彼女は、数学的学力の因習的評価対象となってきた数的能力 (numerical ability) と数学的学力とは適度に高い相関を示したと報告している。だが、同時に、それ自体は好ましく重要な結果だが、数学的創造性テストにおける成績と先述の因習的評価対象との間にある相関関係は低かった事も得ている。Jensen は、数学的創造性の幾つかの評価観点は、児童の数学的活動の様相を取り入れたものであるべきではと勧告している。

数学における多様性解決課題テストを用いてなされた研究によって得た主張・仮説は、幾分結論に達していないように見受けられるが、以下の観点の為の一般的賛助は存在するようである。「数学において能力を開発するようなテストは、必ずしも数学的スキル・学識重視といった因習的評価の考えによっては活用されないだろうが、多様な解決を探求するような課題テストによって測られた数学的創造性は、生徒の他の数学的能力の変化、とりわけ数学的スキル・学識の成績、等と完全に独立しているとは言えないであろう。」数学において多様な解決を産出する能力は、非数学的場面において多様な解決を産出する能力と必ずしも関係してはいないのである。

### ○Different styles of Divergent Production Test in Mathematics

数学における多様性解決課題テスト (Mdpt) は、構造と実行という2つの観点から見た場合、実際には様々な形式のそれ (Mdpt) が存在している。最も多く用いられた形式は「鉛筆と紙を用いてのペーパーテスト形式」での実施であるが、いくつかにおいては、それ以外の形式で実施されている。

Foster(1970) は、自身の調査研究の中で、彼が考案したテストを生徒に対して個別的に実施する形式をとっている。彼が生徒に対して実施したテストは以下のようなものである。「それぞれの生徒がカード (playing cards) を差し出され、それを6枚の組に分類するよう要求される。そして調査者に対し、自身

がカード分類の際に根拠・理由とした観点を述べる」といったものである。

Mayer(1970) は、切りばめ法に関する問題 (problems related to tessellations) に対し解決を試みる生徒の様子をビデオ記録し、分析を行うという形式で実施した。児童の創造性のレベルは、彼らが問題解決の中で、いかに頻繁に、それ以前には特定できなかった解決を導くか、課題において表現されていない特性を明らかにするか、課題の特性と他の特性との関係を探求したか、数学的に簡明な解決へと達したか・課題を修正 (変更) したか、によって評価されている。

この手法は形式・構造の2つの観点において変わったものである。

創造性スコアを計上するために用いられた評価基準において、先述の Foster, Mayer の数学的多様性解決課題テスト (Mdpt) と、それ迄の伝統的多様性解決課題 (conventional Mdpt) に共通なのは、生徒が産出した解決の数を評価する点である。

Brandau と Dossey(1979) もまた、数学的創造性を評価する意味で、生徒の問題解決における行動の観察という形式をとっている。彼らが行った行動観察の中では、「連続するオープンエンドな数学的場面において解決を試みる間中」、生徒は思考した内容を声に出して活動を続けることが要求される。この観察の中で、流暢性は「生徒が表出した口頭の数学的言明の総数」によって評価され、独創性は「流暢性の評価対象とした数学的言明の新奇さ・面白さ」により評価される。柔軟性は「数学的言明を観点毎に分類した際の、相異なるカテゴリー総数」によって評価されている。また、思考の組織化 (organization) は「生徒が専攻・一般化・推測した実例の総数」によって評価される。この時、数学的創造性スコアは、これら4つ (fluency, originality, flexibility, organization) のスコアの総和によって計上される。Brandau と Dossey の二人は、これら4つの変数が高く、重要かつ好ましい相関関係を示したという結果を得ている。

先述の数学的創造性評価に対する Mdpt を用いたアプローチは、Prouse, Evans, Baur, Jensen, Maxwell, Balka, Dunn, Zosa といった研究者によって考案されたアプローチとは対照的なものである。だが、Foster(1970), Mayer(1970), Brandau と Dossey(1979) らが実施した形式の数学的多様性解決課題テスト (Mdpt) は、紙と鉛筆を用いての因習的多様性思考テストの形式を元にして作られたものなのである。生徒は、数学的場面や問題を提示され、多様かつ多数の解決 (responses) を産出することを要求される。そして…産出された多様かつ多数の解決は、流暢性、柔軟性、独創性といった観点により、多様に評価されるのである。

数学的創造性を評価することを狙った Mdpt の様々な形式・手法は、"生徒の内に多様な思考が存在している"という考えに基づいており、多様な解決を全て総括的に描写しようとする試みには注意が払われる必要がある。けれども、多くの Mdpt に対して行われた分析の中で認識されうる、「3つの想起される強調すべき、多様な解決の形」が存在する。それらは、問題解決 (problem solving), 問題提起 (problem posing), 再定義 (redefinition) として言及される。

これら 3つの表題は確実かつ固着したカテゴリーではなく、研究者によって「数学的創造性」評価テストにおける思考の所産を考察するために用いられた、強調すべき観点として提唱されている。

問題解決 (problem solving) : これまでの研究者によって用いられてきた多数のテストは、多数の解決を備える簡潔な数学的問題であった。1つの典型的な問題として、次のようなものがある。「 $(3, 21, 2, 10)$  という一式の数と加減乗除の記号を用いて、計算結果が  $(=17)$  となるように、考えるだけ多数の組み合わせを作りなさい。(Maxwell)」

その他の問題としては次のようなものもある。「 $(p + q)(r + s) = 36$  であるとしなさい。  $p, q, r, s$  に当てはまるであろう数を考えなさい。

(Bishop,1968)」・「9つの格子点を直線によって結び、面積が2平方cmとなるような多数の異なる形を描きなさい。(Haylock, 1984)」等

問題提起 (problem posing) = (提示された数学的場面から問題を創りあげる) : Prouse(1964) と Balka(1974) の二人は、「問題において、数的情報(例えば、賃金・価格)を含んだパラグラフを提示された生徒が、その情報を元にして描写された場面に対して考えうる小問題を多数記録するよう要求される」といった課題を用いている。Jensen(1973) も同様のアプローチを用いているが、彼が生徒に対して提示した数学的場面は3つの形式で描写されたものである。

その3つとは、言語的描写、グラフ式描写、図示描写によるものであった。例えば、「生徒がある棒グラフによって場面提示されたとすると、そのグラフを複数の観点で見ることによって、小問題を抽出し記録するよう要求される」といったものがある。その他の例(Haylock,1984)としては、「完成されたクロスワードパズルを提示された生徒が、多数の異なるアイデアを用いるよう促されながら、そのパズルを基に問題を作るよう要求される」といったものもある。

再定義 (redefinition) : 数学において、多様な解決として評価されてきた第3の対象は再定義 (redefinition) である。再定義 (redefinition) とは、「数学的場面を提示された生徒が、自身が考えうるだけ多数の、変化する、かつ独自の方法で示した反応によって、場面の構成要素に対し数学的性質を根拠として絶えず再定義する」といったものである。例えば、Fosterのカード分類テストでは、生徒が分類という自身の行動の根拠をカードの色、組札、偶数、7よりも大きい、等といった数学的性質を観点に耐えず再定義することを要求されている。

あるMdptにおいて、生徒は幾何図形を提示される。そして幾何図形の内部に引かれた特定の線分(線分A)に対し、考えうるだけ多数の異なる叙述を記録

するよう求められる。(Haylock,1978)

この課題に対する成功的解決は、幾何図形の内部に描かれている他の部分(線分 A 以外の部分)と着目している線分 A との関係性を観点として、線分 A の図形内における意味を絶えず再定義するといったものである。

その他の (redefinition task) は、 $\{2$  つの数,  $16 \cdot 36$  が共通して持つ数は何であるか、多数の異なる叙述を記録するよう求める (Haylock,1978) “といったものである。この課題では、その数的性質を観点として  $16 \cdot 36$  の 2 数を絶えず再定義することが求められている。

### ○Conclusion (結論)

学校数学における創造性を主題として為された数々の論文による報告は、“数学的問題解決において固執を克服する能力”, “数学的場面において多様な解決を産出する能力”の双方が、数学的創造性の評価対象となる重要な成分を構成しているであろうという主張に賛助をもたらしている。

児童が数学に取り組む際の、精神的要素(心的態度: mental sets), 固執 (fixation), そして固着 (rigidity) に対する考えの妥当性に関する問題点は、2 つの鍵となる観点に関わり合っているのではと提唱している。それらは、“アルゴリズムに対する固執”, “問題背景に対しての固執”として言及されている。

アルゴリズムに対する固執では、当初それが成功的解決をもたらすであろうと判断されたアルゴリズム・手続きを、不適切,不成功になる場合においてすら問題解決に適用し続けようとする行動の中で示される。

そして、問題背景に対しての固執は、自身が取ろうとする解決の与えられた問題に対する適用が適切か否かを、問題の構成要素の範囲を根拠として判断してしまうというものである。

多様性解決 (divergent production) を認めた手法に関しては、多様性解決

(divergent production) を見る場面を構成するために 3 つの形態を強調することを提唱している。その多様性解決場面の 3 つの形態は、問題解決場面 (problem solving situation)、問題提起場面 (problem posing situation)、そして再定義場面 (redefinition situation) である。

再定義 (redefinition) において、生徒は数学的性質を観点とした場面要素の再定義を繰り返し行う事を要求される。

学校数学において多様な思考の存在を奨励し・育成する手法を発見する事の必要性を受け入れる人々は、学校数学における創造性の評価・育成について、彼ら自身が持つ思考の枠組みの基礎を構成しうる鍵となる考えを見つけ得たのかもしれない。

### ●(Einstellung effect)

人は問題解決にあたり、適確かつ正しいアプローチを好む為に、自身の経験の中で確立されたアルゴリズムを用いる事に固執するといった、偏った解決過程を踏もうとする傾向がある。そういった現象により、特定の場合に問題解決が妨げられる事が起りうるが、このような現象を「Einstellung effect」という。

### ●(Luchins Water jugs test)

「Luchins Water jugs test」では、被験者は幾通りもの指定された容量の jugs 一式を与えられ、それを用いて要求された (提示された) 量の水を測っていくよう要求されるといったものである。

実際の問題は、次のような 1~10 迄の一連の課題であり、jugs は容量が異なる 3 種 (A,B,C) が与えられている。

(Problem)	Jug A	Jug B	Jug C	(Desired quantity)
1	21	127	3	100
2	14	163	25	99
3	18	43	10	5
4	9	42	6	21
5	20	59	4	31
6	23	49	3	20
7	15	39	3	18
8	28	76	3	25
9	18	48	4	22
10	14	36	8	6

Problem 8 を除いた全ての問題は、A~C の jugs を用いたアルゴリズム 1 :  $(B-2C-A)$  によって解決される。

Problem 1~5 迄を通した問題群に対して、この解決は最も簡潔なものである。

だが、Problem 7, 8 に対しては、より簡潔なアルゴリズム 2 :  $(A+C)$  が存在する。

Problem 8 は、アルゴリズム 1 を用いて解決することは出来ないが、アルゴリズム 3 :  $(A - C)$  によって解決される。

Problem 6, 10 は、アルゴリズム 3 を用いることにより、より簡潔に解決されうる。

この実験では、特定のアルゴリズム (経験上で確立されたアルゴリズム) に対する固執である「Einstellung effect」の存在を実証する一例として次の結果を挙げている。

・ Problem 1 ~ 10 迄を順序通りに解決した被験者の 83% が、Problem 6, 7 に対しても、アルゴリズム 1 を用いた解決を示した。(Problem 6 に対しては、アルゴリズム 3 が適確、Problem 7 に対しては、アルゴリズム 2 が適確である…)

64% の被験者が、Problem 8 を解決することが出来ず、79% が、Problem 9, 10 に対してもアルゴリズム 1 を用いた解決を示した。

・ Problem 5 ~ 10 迄の問題群を提示された被験者のうち、解決の為にアルゴリズム 1 を用いたのは 1% 以下であった。

そして Problem 8 の解決を達成出来なかったのは、5% のみであった。問題解決を図る際、問題はそれに対する被験者自身の注意深い観察が為される事によって解決されうるであろう。Problem 5 迄の解決の後で、Luchins は被験者に対し「問題に対し盲目となるな・注意深く考察するべきである」という助言を与えている。その助言が、被験者の問題に対する注意深い考察を促し、50% 以上の被験者が残りの問題群に対する「より簡潔な解決」を発見する事ができた。